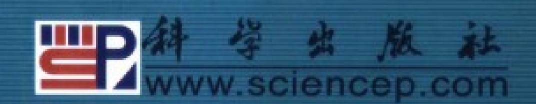
现代物理基础丛书 3

数学物理方程及其近似方法

程建春 编著



(O-1952.0101)



ISBN 7-03-013292-0
定 价：58.00 元

现代物理基础丛书　　3

数学物理方程及其近似方法

程建春　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统论述了数学物理方程及其近似方法，主要内容包括：数学物理方程的基本问题、本征值问题和分离变数法的基本原理、Green函数方法、变分近似方法、积分方程基本理论、微扰理论、数学物理方程的逆问题和非线性数学物理方程。

本书是为理工科高年级本科生和研究生编写的，也可作为本科生数学物理方程课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程及其近似方法/程建春编著．—北京：科学出版社，2004
(现代物理基础丛书；3)
ISBN 7-03-013292-0

Ⅰ．数… Ⅱ．程… Ⅲ．数学物理方程 Ⅳ．O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第035271号

责任编辑：胡 凯 贾瑞娜／责任校对：张 琪
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年8月第一次印刷 印张：29 3/4
印数：1—3 000 字数：583 000

定价：58.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代物理基础丛书》编委会

前　言

本书是为研究生学习数学物理方程而编写的. 研究生在本科阶段已学过这方面的课程,为了避免重复并且达到提高的目的,本书选择内容较深,讲述方法立足点较高. 特别是引进了若干泛函方面的理论(例如,第二章中 Hilbert 空间概念),并且尽可能给出严格的数学证明(例如,第四章详细证明了本征函数系完备性定理). 当然,直观的物理描述方法还是占主导地位.

本书共分八章,各章的内容大致如下:第一章讲述数学物理方程的基本问题,介绍几个典型定解问题的求解方法,重点讨论定解问题的适定性(主要是惟一性和稳定性). 第二章讲述分离变数法基本原理. 首先引进 Hilbert 空间概念(特别是平方可积函数空间 $L^2[a,b]$). 因为正交函数展开是分离变数法的关键,故第二章对一定函数类按完备的正交归一系展开问题进行了详细的讨论. 本章讨论的另一个十分重要的问题是本征值问题,特别是 Sturm-Liouville 型本征值问题. 第三章介绍求解定解问题的一个重要方法,即 Green 函数理论. 本章特别强调的一个问题是如何利用 Green 函数把微分方程化成积分方程. 第四章介绍一种十分有用的近似方法,即变分近似方法,它在工程或物理问题中应用广泛. 第五章是关于积分方程的基本理论,因微分方程可通过 Green 函数转化成积分方程,而对积分方程的讨论往往比较简单(例如讨论解的存在性). 此外,积分方程在实际问题中也经常出现. 第六章讨论微扰理论、主要介绍正则微扰(参数变形法和多尺度展开)、奇异微扰及边界层理论方面的基本概念. 实际问题能严格求解的很少,因此微扰理论具有实用意义. 这方面的理论相当丰富,本章仅仅介绍一些基本思想. 第七章介绍目前科学与工程的热点课题,即数学物理方程的逆问题,介绍逆问题的基本概念和主要方法. 最后,第八章介绍若干典型的非线性数学物理方程,特别是这些非线性方程存在的"孤立波"解.

整个课程大致需要 120 学时左右,总的来说,量比较大. 但因研究生自学能力强,本书的数学推导详细,适合于自学. 选择适当的章节,在 80 学时(或 60 学时)内完成教与学的任务是不成问题的.

本书的出版得到国家杰出青年科学基金和南京大学"985"工程的资助.

目　　录

第一章　数学物理方程的基本问题

数学物理方程是源于物理及工程问题的微分方程(常微分方程和偏微分方程). 典型的数学物理方程包括波动方程、输运方程及位势方程(Laplace 方程). 它们分别描述三类不同的物理现象：波动(声波和电磁波)、输运过程(热传导和扩散)和状态平衡(静电场分布、平衡温度场分布和速度势等). 从方程本身来看，它们又是三类方程，即双典型、抛物型和椭圆型方程的最简单例子.

除偏微分方程外，另一类十分重要的数学物理方程为**积分方程**，即方程中含有未知函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$积分的方程. 典型的积分方程有第一、第二类 Fredholm 和 Volterra 方程，我们将在第五章专门讨论.

本章讨论三类典型数学物理方程的若干基本问题,主要内容有:1.1 节讨论数学物理方程的分类并引出定解问题及定解问题适定性的概念，以后各节分别讨论波动方程、Laplace 方程以及热传导方程的各种定解问题，重点是解的惟一性和稳定性.

1.1　数学物理方程的分类及一般性问题

本节首先简单介绍有关偏微分方程及其解的若干基本概念，然后讨论二阶线性偏微分方程的分类以及标准形式,最后在 1.1.4 小节中讨论数学物理方程的一般性问题，即定解问题以及定解问题适定性概念.

1.1.1　基本概念:古典解和广义解

含有未知函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$及偏导数的方程称为**偏微分方程**，如果方程中出现的偏导数最高阶为 m 则称方程为 **m 阶偏微分方程**. 进一步，如果方程关于 u 及 u 的各阶偏导数都是线性的，则称方程为 **m 阶线性偏微分方程**.

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\mathbf{L}u = f \tag{1.1.1}$$

其中算子 $\mathbf{L}$ 定义为

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{1.1.2}$$

其中 a_{ij}、b_i、c 和 f 都是变量 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的函数. 显然,可以写出无数偏微分方程,但并不是每个方程都有它的实际应用. 因此我们主要讨论物理和工程中

出现的方程，这样的方程称为**数学物理方程**．典型的数学物理偏微分方程有三类：波动方程、输运方程以及位势方程，它们分别具有以下形式

(1) 波动方程

$$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = f(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.3}$$

(2) 输运方程

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = g(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.4}$$

(3) 位势方程

$$\nabla^2 u = h(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.5}$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示空间变量，$t$ 表示时间变量，∇^2为 Laplace 算子

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1.1.6}$$

显然，以上三个方程是二阶线性偏微分方程(1.1.1)的特例．

以二阶线性偏微分方程(1.1.1)为例，我们来说明方程解的概念．式(1.1.1)的解是指函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$具有方程出现的各阶连续偏导数，使方程的左边恒等于右边，这样的解称为式(1.1.1)的**古典解**．考虑二个自变量(x, t)的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1.7}$$

作变换

$$\zeta = \frac{x+t}{2}; \qquad \eta = \frac{x-t}{2} \tag{1.1.8}$$

则式(1.1.7)变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \tag{1.1.9}$$

上式的解可积分两次得到，具有一般形式

$$u(\zeta, \eta) = F(\zeta) + G(\eta) \tag{1.1.10}$$

显然上式是式(1.1.9)解的基本条件是，$F(\zeta)$和 $G(\eta)$必须具有连续的一阶偏导数．回到原来的变数，可得式(1.1.7)的通解为

$$u(x, t) = F(x+t) + G(x-t) \tag{1.1.11}$$

把上式代入式(1.1.7)，显然要求 $F(x+t)$和 $G(x-t)$关于(x, t)具有连续的一阶和二阶偏导数．由此可见，尽管式(1.1.7)与(1.1.9)可通过变换式(1.1.8)等价起来，但二者的古典解对函数 F 和 G 有不同的光滑性要求．式(1.1.11)中任意函数 F 和 G 由其他附加条件决定．如果我们要求 $u(x, t)$满足初始条件

$$u\big|_{t=0} = f(x); \qquad u_t\big|_{t=0} = g(x) \tag{1.1.12}$$

则 F 和 G 应满足

$$f(x) = F(x) + G(x)$$
$$g(x) = F'(x) - G'(x) \tag{1.1.13}$$

不难求得

$$2F(x) = f(x) + \int_c^x g(s)\mathrm{d}s; \qquad 2G(x) = f(x) - \int_c^x g(s)\mathrm{d}s$$

其中 c 为任意实数．于是满足初始条件式(1.1.12)的式(1.1.7)的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-t) + f(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\mathrm{d}s \tag{1.1.14}$$

上式称为 d'Alembert 公式．显然，上式满足式(1.1.7)的条件是 $f(x)$ 具有连续的一阶和二阶导数，而 $g(x)$ 具有连续的一阶导数，即要求 $f \in C^2$，$g \in C^1$，否则式(1.1.7)和(1.1.12)不存在古典解．但是，实际物理问题往往不能给出具有如此光滑性的函数 f 和 g，而这样的问题却有实际意义．例如考虑 f 和 g 具有形式

$$f(x) = \begin{cases} 2(x^2-1)^2, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}; \qquad g(x) = 0 \tag{1.1.15}$$

显然，$f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处一阶导数连续，但二阶导数间断．因此，严格地讲式(1.1.7)和(1.1.15)不存在古典解．但如果把式(1.1.15)代入式(1.1.14)有

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) \tag{1.1.16}$$

其中

$$u_1(x,t) = \begin{cases} [(x-t)^2-1]^2, & |x-t| \leqslant 1 \\ 0, & |x-t| > 1 \end{cases} \tag{1.1.17}$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} [(x+t)^2-1]^2, & |x+t| \leqslant 1 \\ 0, & |x+t| > 1 \end{cases} \tag{1.1.18}$$

显然，在 x-t 平面上除四条直线 $|x \pm t| = 1$ 外，式(1.1.16)满足波动方程(1.1.7)．因此，可把式(1.1.16)看作式(1.1.7)的一种**广义解**．由于在 $|x \pm t| = 1$ 上 $u(x,t)$ 的二阶导数间断，但一阶导数连续，故这种广义解也称为**弱间断解**．

因此，有必要推广方程解的含义，引进广义解的概念．广义解有多种定义，本节介绍基于函数序列收敛概念定义的广义解，在以后的讨论中，我们将根据具体情况，给出广义解的具体定义．仍然以式(1.1.12)为例，存在古典解的条件 $f \in C^2$ 和 $g \in C^1$ 不成立，但可设想用下述方法来解决这一问题．我们选取函数序列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$，并且序列的每个元素满足 $f_n \in C^2$ 和 $g_n \in C^1$，于是对每一对 f_n 和 g_n 可以建立一系列初值问题

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1.19}$$

$$u_n\big|_{t=0} = f_n(x); \qquad \frac{\partial u_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_n(x) \tag{1.1.20}$$

显然，这些初值问题的古典解存在且为

$$u_n(x,t)=\frac{1}{2}[f_n(x-t)+f_n(x+t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g_n(s)\mathrm{d}s \tag{1.1.21}$$

当 $n\to\infty$ 时，如果序列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在“某种意义下”收敛到 $f(x)$ 和 $g(x)$

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f(x);\qquad \lim_{n\to\infty}g_n=g(x) \tag{1.1.22}$$

并且 $\{u_n\}$ 也在“某种意义下”收敛到某个函数 $u(x,t)$

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)=u(x,t) \tag{1.1.23}$$

则把 $u(x,t)$ 称为“某种意义下”的广义解. 所谓“某种意义下”，可以是严格的一致收敛，也可以是“平均收敛”（见第二章）或“弱收敛”（见第三章），只要我们对“某种意义下”的选择恰当，那么所得的广义解也有意义.

对一般的方程(1.1.1)，设函数序列 $\{u_n\}$ 满足可微条件（**L** 中出现的各阶导数）且在“某种恰当意义下”收敛到 u

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u \tag{1.1.24}$$

如果 $\mathbf{L}u_n$ 也在“某种恰当意义下”收敛到 f

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{L}u_n=f \tag{1.1.25}$$

则我们称 u 为式(1.1.1)的广义解.

1.1.2 两个自变量二阶线性方程的分类和化简

考虑二个自变量 (x,y) 的二阶线性偏微分方程

$$\mathbf{L}u\equiv a\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+gu=f \tag{1.1.26}$$

其中 a、b、c、d、e、f 和 g 都是 x 和 y 的已知函数. 我们从下列问题引出上式的特征方程，然后根据特征方程来对方程进行分类和化简. 设在 x-y 平面上给定曲线 C，如图 1.1.1，C 的参数方程为

$$x=\varphi(t)$$
$$y=\psi(t) \tag{1.1.27}$$

在 C 上给定 $u=u(x,y)=u[\varphi(t),\psi(t)]$、$p\equiv u_x[\varphi(t),\psi(t)]$ 以及 $q\equiv u_y[\varphi(t),\psi(t)]$，且满足相容性条件

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

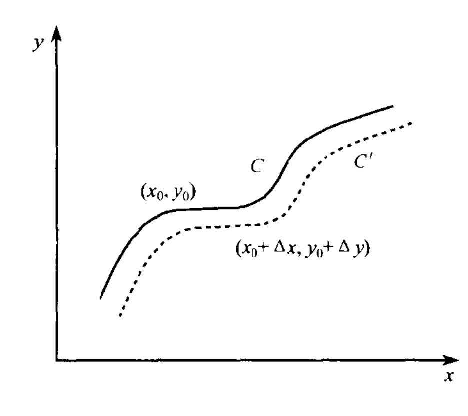


图 1.1.1 曲线 C 及邻域 C'

曲线 C 上的 u、p 和 q 称为 **Cauchy 数据**. 问题是，由 C 上给定的 Cauchy 数据，如何求 C 的邻域 C' 上 $u(x,y)$ 的值？利用 Taylor 展开

$$u(x',y') \approx u(x_0,y_0) + p\Delta x + q\Delta y + \frac{1}{2}u_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}u_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2 + \frac{1}{2}u_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \cdots$$

其中(x_0,y_0)在 C 上，$(x',y')=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$在 C'上．为此，至少必须知道 C 上$u(x,y)$的二阶偏导数 u_{xx}、u_{xy}和 u_{yy}．在 C 上有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_{xx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + u_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_{xy}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + u_{yy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.29}$$

因为 $u(x,y)$是式(1.1.26)的解，故从式(1.1.26)～(1.1.29)可得决定 u_{xx}、u_{xy}和 u_{yy}的线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}u_{xx} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}u_{xy} + 0\cdot u_{yy} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.30}$$

$$0\cdot u_{xx} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}u_{xy} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}u_{yy} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.31}$$

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f - (dp + eq + gu) \tag{1.1.32}$$

上述方程的解是否存在，依赖于系数行列式的性质

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{vmatrix} = a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

如果曲线 C 满足$\Delta\neq0$，则解存在且惟一．反之，如果 $\Delta=0$，则 Cauchy 数据 p、q 和 u 不能任意给定，否则方程组无解．满足 $\Delta=0$，即满足方程

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 0 \tag{1.1.33}$$

的曲线 C 对式(1.1.26)有重要意义，称之为**特征曲线**．相应地，式(1.1.33)称为**特征方程**．因此在特征曲线上，Cauchy 数据 p、q 和 u 不能任意给定．式(1.1.33)可改写成形式

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + c = 0 \tag{1.1.34}$$

于是可解出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right) \tag{1.1.35}$$

因此，特征曲线是否存在依赖于(b^2-ac)：

(1) 当 $b^2-ac>0$,存在两根实的特征曲线；

(2) 当 $b^2-ac=0$,两根实的特征曲线退化成一根；

(3) 当 $b^2-ac<0$,不存在实的特征曲线．

据此可把式(1.1.26)作下列分类，称式(1.1.26)是:

双曲型的：如果 $b^2-ac>0$；**抛物型**的：如果$b^2-ac=0$；**椭圆型**的：如果 $b^2-ac<0$.

由于 a、b 和 c 是(x,y)的函数，故上述分类只在某一区域才成立. 当方程在不同的区域具有不同的类型时，称之为**混合型**的. 当 a、b 和 c 为常数时，方程在整个(x,y)平面内类型不变.

例 1.1.1 一维波动方程(1.1.7)是双曲型的，可求得二簇实的特征曲线 $x\pm t=$常数,它们是 x-t 平面上的直线簇；一维热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

是抛物型的，只有一簇实特征曲线 $t=$常数，是 x-t 平面上平行于 x 轴的直线;二维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

是椭圆型的，不存在实的特征曲线.

例 1.1.2 混合型方程最曲型的例子是 Tricomi 方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.1.36}$$

上半平面 $y>0$，方程是椭圆型的；下半平面 $y<0$，方程是双曲型的，这时具有二簇实特征曲线

$$x\pm\frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3}=\text{常数} \tag{1.1.37}$$

而在 x 轴上 $y=0$,方程是抛物型的.

利用特征曲线，可对式(1.1.26)进行化简,从而求出其标准形式. 分三种情况讨论：

(1) 方程(1.1.26)是双曲型的，这时可从式(1.1.34)求得两根实特征曲线

$$\varphi_1(x,y)=\text{常数};\qquad \varphi_2(x,y)=\text{常数} \tag{1.1.38}$$

利用隐函数微分关系

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^{-1},(i=1,2)$$

可得 φ_i 满足的方程为

$$a\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^2=0 \tag{1.1.39}$$

由于式(1.1.38)是式(1.1.34)的两个独立解，故 Jacobi 行列式不等于零

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

因此可取变换

$$\xi = \varphi_1(x,y); \qquad \eta = \varphi_2(x,y) \tag{1.1.40}$$

代入式(1.1.26)并利用式(1.1.39)可得方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + D\frac{\partial u}{\partial\xi} + E\frac{\partial u}{\partial\eta} + Fu = G \tag{1.1.41}$$

其中 D、E、F 和 G 是重新定义的已知函数(为了方便，下面经常使用这四个字母，并不意味它们在每个方程中都一样)，上式称为 Laplace 双曲方程，其特征曲线是

$$\xi = 常数; \qquad \eta = 常数$$

为 ξ-η 平面上平行于坐标轴的直线簇. 进一步作变换

$$\xi = \frac{s+t}{2}; \qquad \eta = \frac{s-t}{2} \tag{1.1.42}$$

式(1.1.41)可化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D\frac{\partial u}{\partial s} + E\frac{\partial u}{\partial t} + Fu = G \tag{1.1.43}$$

式(1.1.41)或(1.1.43)为双曲型方程的标准形式. 显然一维波动方程(1.1.7)或(1.1.9)是其最简单的形式.

(2) 方程(1.1.26)是抛物型的，这时只存在一根实特征曲线

$$\varphi(x,y) = 常数 \tag{1.1.44}$$

φ 同样满足式(1.1.39)，进一步利用 $b^2-ac=0$ 可化成

$$\left(\sqrt{a}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sqrt{c}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{1.1.45}$$

取 $\xi=\varphi(x,y)$以及任意函数 $\eta=\eta(x,y)$，只要两者函数独立(Jacobi 行列式不等于零)，代入式(1.1.26)有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + D\frac{\partial u}{\partial\xi} + E\frac{\partial u}{\partial\eta} + Fu = G \tag{1.1.46}$$

进一步作函数变换

$$v = u\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} E(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{1.1.47}$$

式(1.1.46)又可写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} - D\frac{\partial v}{\partial\xi} = Fv + G \tag{1.1.48}$$

上式或式(1.1.46)为抛物型方程的标准形式. 显然一维热导方程是其最简单的

形式.

(3) 方程(1.1.26)是椭圆型的，因无实的特征曲线存在，式(1.1.34)的解只能是复函数，故设

$$\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) + \mathrm{i}\varphi_2(x,y) = \text{常数} \tag{1.1.49}$$

是式(1.1.34)的一个解，则可取变换

$$\xi = \mathrm{Re}[\varphi] = \varphi_1(x,y); \qquad \eta = \mathrm{Im}[\varphi] = \varphi_2(x,y) \tag{1.1.50}$$

由于 $\varphi(x,y)$满足

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{1.1.51}$$

把式(1.1.49)或(1.1.50)代入上式，实部和虚部分开可得

$$a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = a\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$$

利用上二式和式(1.1.50)、式(1.1.26)可化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + D\frac{\partial u}{\partial\xi} + E\frac{\partial u}{\partial\eta} + Fu = G \tag{1.1.52}$$

上式为椭圆型方程的标准形式. 显然二维 Laplace 方程是其最简单的形式.

例 1.1.3 把 Tricomi 方程化成标准形式. Tricomi 方程的特征方程为

$$y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1 = 0 \tag{1.1.53}$$

在椭圆型区域 $y>0$，上式化成 $\mathrm{d}x \pm \mathrm{i}\sqrt{y}\mathrm{d}y = 0$,故

$$x \pm \mathrm{i}\frac{2}{3}\sqrt{y^3} = \text{常数} \tag{1.1.54}$$

取变换

$$\xi = x; \qquad \eta = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} \tag{1.1.55}$$

式(1.1.36)变成标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \tag{1.1.56}$$

在双曲型区 $y<0$,式(1.1.53)化为 $\mathrm{d}x \pm \sqrt{-y}\mathrm{d}y = 0$,故

$$x \pm \frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3} = \text{常数} \tag{1.1.57}$$

取变换

$$\xi = x - \frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3}; \qquad \eta = x + \frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3} \tag{1.1.58}$$

式(1.1.36)化为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0 \tag{1.1.59}$$

1.1.3　多个自变量线性方程的分类和标准型

由 1.1.2 小节的讨论知，方程的类型取决于式(1.1.26)左边包含二阶偏导数的项，这些项称为方程的主部. 因此，对 n 个自变量的二阶方程(1.1.1)，只要考虑式(1.1.2)的主部 $\mathbf{L}_0$ 即可

$$\mathbf{L}_0=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} \tag{1.1.60}$$

在 n 维空间中一点 $\boldsymbol{r}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的邻域内考虑二次式

$$A(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^0\lambda_i\lambda_j \tag{1.1.61}$$

其中 $a_{ij}^0=a_{ij}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，我们总可取 $a_{ij}=a_{ji}$，并设它们都是实数，这样以 a_{ij}^0为元素的矩阵是实对称矩阵，存在实线性变换

$$\lambda_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}^0\eta_k \tag{1.1.62}$$

可化二次式(1.1.61)为标准型

$$A(\eta)=\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij}^0c_{ik}^0c_{jl}^0\eta_k\eta_l=\sum_{k,l=1}^{n}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^0c_{ik}^0c_{jl}^0\Big)\eta_k\eta_l$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}\alpha_{kl}^0\eta_k\eta_l\equiv\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\eta_k^2 \tag{1.1.63}$$

其中 $\alpha_{kl}^0=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^0c_{ik}^0c_{jl}^0$，而 ε_k 只取 1，−1 或者 0.

另一方面，在 $\boldsymbol{r}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$邻域内，利用式(1.1.62)的系数方阵 $c=[c_{ik}^0]$的转置方阵 $c^{\mathrm{T}}=[c_{ki}^0]$作变换

$$y_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ki}^0x_k,\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.1.64}$$

代入式(1.1.1)和(1.1.2)，其主部的变换为

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^0\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k,l=1}^{n}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^0c_{ik}^0c_{jl}^0\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_l}$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}^0\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_l}=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}. \tag{1.1.65}$$

根据上式作下列分类：

(1) 如果所有的 $\varepsilon_k=1$ 或者 −1，即二次式(1.1.61)是正定的(或负定的)，则称式(1.1.1)在点 $\boldsymbol{r}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的邻域为**椭圆型**的，这时式(1.1.1)可化成

标准形式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+cu=f \tag{1.1.66}$$

同样为了方便，字母 b_i、c 和 f 在下面多次使用，但并不意味它们相同.

(2) 若在 $\boldsymbol{r}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$点有$(n-1)$个 $\varepsilon_k=1$(或 -1)，而另一个为 -1 (或 $+1$)则称式(1.1.1)在点 $\boldsymbol{r}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的邻域为**双曲型**的，有标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+cu=f. \tag{1.1.67}$$

(3) 若在点 $\boldsymbol{r}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$有$(n-l)$个 $\varepsilon_k=1$(或 -1)而 l 个$\varepsilon_k=-1$(或 $+1$)，且 l 及 $n-l>1$，则称式(1.1.1)在点 $\boldsymbol{r}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的邻域为**超双曲型**的

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}-\sum_{j=l+1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+cu=f. \tag{1.1.68}$$

(4) 最后，如果恰有一个 $\varepsilon_k=0$，同时所有其他的 $\varepsilon_k=1$(或 -1)，则称式(1.1.1) 在点 $\boldsymbol{r}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的邻域为**抛物型**的，有标准形式

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}-\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+cu=f. \tag{1.1.69}$$

如果 a_{ij}为常数，则方程的类型在全空间内不变. 显然在全空间内，波动方程(1.1.3)是双曲型的，输运方程(1.1.4)是抛物型的，而位势方程(1.1.5)是椭圆型. 由此可见，波动方程、输运方程和位势方程确实是三类典型方程.

例 1.1.4 考虑 $\mathbf{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$. 如果在区域 G 内$p(\boldsymbol{r})>0$, 则 $\mathbf{L}$ 在 G 内是椭圆型的，于是方程

$$\rho(\boldsymbol{r})u_{tt}+\mathbf{L}u=f(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.70}$$

$$\rho(\boldsymbol{r})u_t+\mathbf{L}u=f(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.71}$$

$$\mathbf{L}u=f(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.72}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{r})>0$，分别在 G 内属双曲型、抛物型和椭圆型方程. 以上三个方程分别是比式(1.1.3)～式(1.1.5)更为一般的波动方程、输运方程和位势方程，它们分别描写非均匀介质中的波动、输运和热平衡.

1.1.4 数学物理方程的一般性问题

我们知道 n 阶常微分方程的通解依赖于n 个任意常数，这些常数由初始条件或边界条件决定. 对偏微分方程，问题要复杂得多,通解一般依赖于任意函数. 例如一维波动方程(1.1.7)的通解式(1.1.11)依赖于二个任意函数 F 和G，为了决定这些任意函数，必须附加其他条件，这些条件由具体的物理问题给出. 我们主

要讨论下列三类条件：

(1) 初始条件：例如对波动方程(1.1.70)和热导方程(1.1.71)，变量 t 具有时间意义. 一般给定 $t=0$ 时 $u(\boldsymbol{r}, t)$的值

$$u|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.73}$$

对波动方程，由于出现对 t 的二阶偏导数，故还必须有

$$u_t|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.74}$$

这样的问题称为 **Cauchy 问题或初值问题**.

(2) 边界条件：对椭圆型方程(1.1.72)，一般给定区域 G 的边界∂G 上 $u(\boldsymbol{r})$ 及 $u(\boldsymbol{r})$的法向导数之间的线性关系

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = b(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.75}$$

当 $\alpha=1, \beta=0$ 时，称为**第一类边界条件**；当 $\alpha=0, \beta=1$ 时，称为**第二类边界条件**；当 $\alpha\neq0, \beta\neq0$ 时，称为**第三类边界条件**. 这样的问题称为**边值问题**.

(3) 混合条件：当考虑有限区域 G 内的波动或输运问题时，必须同时给定初始条件以及边界条件，这样的问题称为**混合问题**.

上述初始条件或边界条件统称为**定解条件**，求偏微分方程满足定解条件的解的问题称为**定解问题**. 注意，边界条件式(1.1.75)是线性的，如果边界条件非线性，即使方程是线性的，整个定解问题也是非线性的. 一个典型例子是重力作用下水表面波问题，方程为 Laplace 方程，但水表面的边界条件是非线性的.

从物理上看，定解问题的意义也很明显，因为方程本身描述物理系统的一般性规律，一个具体的物理系统必须与外界有相互作用，这样的相互作用就反映在边界条件上. 此外，一个系统随时间的变化还与它的“历史”有关，初始条件即反映了这点.

由以上讨论可知，对位势方程，我们一般讨论边值问题，即定解条件为给定边界上的数值与法向导数的关系(1.1.75)，而对波动方程和输运方程则可提混合问题或初值问题.这不是偶然的，它涉及定解问题的适定性，其含义是：如果定解问题同时满足下列三个条件：

(1) **存在性**：即定解问题存在古典解；

(2) **惟一性**：如果解存在，是否惟一？

(3) **稳定性**：例如初始条件式(1.1.73)或(1.1.74)中 $\varphi(\boldsymbol{r})$或 $\psi(\boldsymbol{r})$有微小变化，解的变化情况如何？

那么称定解问题在古典意义下是适定的，否则，称定解问题在古典意义下不适定. 由实际物理问题导出的定解问题，其解一般存在且惟一，而稳定性具有十分重要的意义. 因为无论是初始条件中的数据，还是边界条件中的数据，甚至方程中的非齐次项，都是由实验测得，必定存在误差，如果它们的微小误差带来解的很大变化，则在古典意义下这个问题已没有多大实际意义. 此外，解的存在性

涉及所给定解条件的相容性，如果给出矛盾的定解条件，解显然是不存在的，而惟一性问题则涉及所给定解条件的完备性问题.

随着近代科学技术的发展，出现了许多不适定问题，这些不适定问题具有明显的物理意义．一个典型例子是重力探矿中导出的 Laplace 方程的 Cauchy 问题，在古典意义下，这个问题是不适的（见 1.4 节和 5.1 节的讨论）．为此发展了许多求解不适定问题的方法，我们将在第七章作简单介绍.

1.2　波动方程与 Cauchy 问题的适定性

本节讨论最简单的双曲型方程，即波动方程的若干重要性质．主要有：波动方程的 Cauchy 问题、混合问题和齐次化原理，以及能量不等式和适定性问题．尽管讨论以波动方程为主，但许多定性的结果对一般的双曲型方程成立.

1.2.1　波动方程的 Cauchy 问题

考虑波动方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \qquad (n \leqslant 3)$$

$$u(\boldsymbol{r}, t)|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{r}); \qquad u_t(\boldsymbol{r}, t)|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{r}) \tag{1.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$．我们用球面平均法求 $n=3$ 时式(1.2.1)的解，基本思想是：代替直接求 $u(\boldsymbol{r}, t)$，先计算 t 时刻以 $\boldsymbol{r}$ 为中心，半径为 ξ 的球面 S_ξ 上 u 的平均值，如图 1.2.1．设球面 S_ξ 上流动坐标为 $\boldsymbol{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$，则

$$\xi = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$$

而 $u(\boldsymbol{r}, t)$ 的平均值 $\bar{u}(\xi, t)$ 为

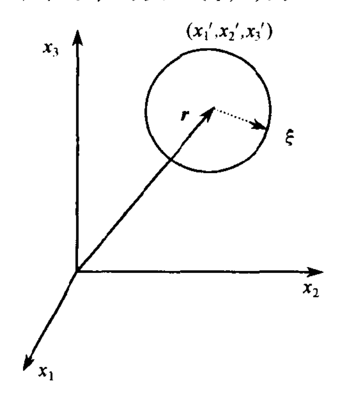


图 1.2.1　球面平均

$$\bar{u}(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\xi^2} \iint_{S_\xi} u(\boldsymbol{r}', t) \mathrm{d}S' \tag{1.2.2}$$

其中 $\mathrm{d}S'$ 是 S_ξ 上的面元．如果求得 $u(\xi, t)$，只要令 $\xi \to 0$，于是应该有

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \lim_{\xi \to 0} [\bar{u}(\xi, t)] \tag{1.2.3}$$

设球面 S_ξ 包围的体积为 V_ξ，对(1.2.1)第一式两边在 S_ξ 内作体积分

$$\int_{V_\xi} u_{tt} \mathrm{d}\tau_\xi = \int_{V_\xi} \nabla^2 u \mathrm{d}\tau_\xi \tag{1.2.4}$$

其中 $\mathrm{d}\tau_\xi$ 是 V_ξ 中的体元．利用 Gauss 公式，式(1.2.4)右边

$$\int_{V_\xi} \nabla^2 \bar{u}\,\mathrm{d}\tau_\xi = \iint_{S_\xi} \frac{\partial u}{\partial n'}\mathrm{d}S' = \iint_{S_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi^2 \mathrm{d}\Omega$$

$$= \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\iint_{S_\xi} u\,\mathrm{d}\Omega = 4\pi\xi^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \tag{1.2.5}$$

得到上式，已利用

$$\bar{u}(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\xi^2}\iint_{S_\xi} u(\boldsymbol{r}', t)\mathrm{d}S' = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_\xi} u\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.2.6}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega$ 为立体角元 $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，而式(1.2.4)左边

$$\int_{V_\xi} u_{tt}\mathrm{d}\tau_\xi = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{V_\xi} u r_1^2 \mathrm{d}r_1\mathrm{d}\Omega = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\xi r_1^2\mathrm{d}r_1\iint_{S_\xi} u\,\mathrm{d}\Omega = 4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\xi r_1^2 \bar{u}\,\mathrm{d}r_1$$

因此有

$$\xi^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^\xi \bar{u}\, r_1^2 \mathrm{d}r_1 \tag{1.2.7}$$

上式两边对 ξ 求导，得 $\bar{u}(\xi, t)$满足的方程

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0$$

或者

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial^2(\xi\bar{u})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2.8}$$

作变换 $v=\xi\bar{u}$，得一维波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2.9}$$

由 1.1.1 小节知，$v(\xi, t)$可表示成

$$v(\xi, t) = f_1(t-\xi) + f_2(t+\xi) \tag{1.2.10}$$

因此，球面平均 $\bar{u}(\xi, t)$为

$$\bar{u}(\xi, t) = \frac{1}{\xi}[f_1(t-\xi) + f_2(t+\xi)] \tag{1.2.11}$$

当 $\xi\to 0$ 时，$\bar{u}(\xi, t)$必须有限，故要求

$$[f_1(t-\xi) + f_2(t+\xi)]|_{\xi=0} = 0 \tag{1.2.12}$$

于是有

$$f_2(t) = -f_1(t) \equiv f(t)$$

因此

$$\xi\bar{u} = f(t+\xi) - f(t-\xi) \tag{1.2.13}$$

两边对 ξ 求导

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi \bar{u}) = \bar{u} + \xi \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = [f'(t-\xi) + f'(t+\xi)] \tag{1.2.14}$$

由式(1.2.3)和上式

$$u(\boldsymbol{r},t) = \lim_{\xi \to 0}[\bar{u}] = 2f'(t) \tag{1.2.15}$$

为求 $f'(t)$，必须利用式(1.2.1)中初始条件，为此计算

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi \bar{u}) = [f'(t+\xi) - f'(t-\xi)] \tag{1.2.16}$$

与式(1.2.14)相加得

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial t}(\xi \bar{u}) = 2f'(t+\xi) \tag{1.2.17}$$

令 $t=0$ 得

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial t}(\xi \bar{u})\right]\Bigg|_{t=0} = 2f'(\xi)$$

把式(1.2.6)代入上式，得

$$2f'(\xi) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi}{4\pi}\iint_{S_\xi} u \mathrm{d}\Omega + \frac{\xi}{4\pi}\iint_{S_\xi} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\Omega\right)\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \iint_{S_\xi} \varphi \mathrm{d}\Omega\right) + \xi \iint_{S_\xi} \psi \mathrm{d}\Omega\right]$$

当 $\xi = t$ 时，由式(1.2.15)

$$u(\boldsymbol{r},t) = 2f'(\xi)\,|_{\xi=t}$$

故最后得

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_t} t\varphi \mathrm{d}\Omega + t\iint_{S_t} \psi \mathrm{d}\Omega\right) \tag{1.2.18}$$

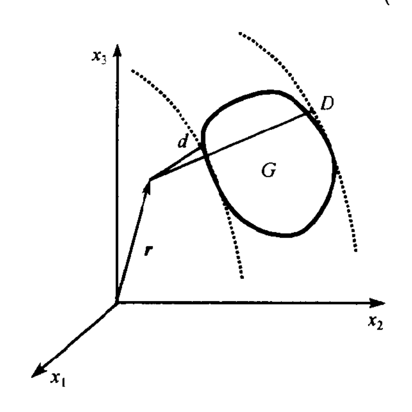


图 1.2.2 Huygens 原理

式中 S_t 是半径为 t、圆心在 $\boldsymbol{r}$ 点的球面：$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2 = t^2$. 用球面元表示，上式变为

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_t} \frac{\varphi}{\xi}\mathrm{d}S' + \iint_{S_t} \frac{\psi}{\xi}\mathrm{d}S'\right) \tag{1.2.19}$$

其中 $\xi = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$，上式即为三维波动方程 Cauchy 问题的解，称为 **Poisson 公式**. 当 φ 和 ψ 分别具有连续的三阶和二阶偏导数时，即 $\varphi \in C^3, \psi \in C^2$，不难验证式(1.2.18)或(1.2.19)确是三维波动方程 Cauchy 问题的古典解. 由式(1.2.19)可知，$\boldsymbol{r}$ 点处 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的值完全由球面

$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 = t^2$$

上的初始分布 φ 及 ψ 值决定，如果 φ 和 ψ 局域在某一区域 G 中，如图 1.2.2，当 $t<d$ 或 $t>D$ 时，$\boldsymbol{r}$ 点处 $u(\boldsymbol{r},t)$ 等于零，其中 d 和 D 分别是 $\boldsymbol{r}$ 点到 G 的最小和最大距离．因此波动有明显的前阵面和后阵面，该现象称为 **Huygens 原理**．

对二维波动 $n=2$，初值分布

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x_1,x_2); \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x_1,x_2)$$

可看作三维情况的特殊情况，故式(1.2.19)仍成立．由于初始条件与 x_3 无关，故可积出．把积分投影到 x_1'-x_2' 平面上，球面元与平面元之间有关系

$$dS'\cos\gamma = dx_1'dx_2'$$

其中 γ 为两个面元的法向之间的夹角

$$\cos\gamma = \sqrt{t^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2}/t$$

代入式(1.2.19)可得

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{\psi(x_1',x_2')dx_1'dx_2'}{\sqrt{t^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_D \frac{\varphi(x_1',x')dx_1'dx_2'}{\sqrt{t^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2}} \tag{1.2.20}$$

其中 D 为圆域

$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 \leqslant t^2$$

对二维 Cauchy 问题，由于积分在圆面上进行，如图 1.2.3，故 Huygens 原理已不再成立．进一步对式(1.2.20)使用降维法，可得一维波动方程 Cauchy 问题的解，设初始条件为

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x_1)$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x_1) \tag{1.2.21}$$

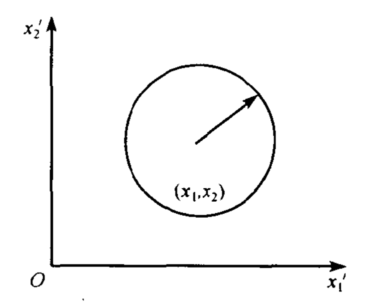


图 1.2.3 积分在圆内进行

作坐标平移 $\eta_1 = x_1' - x_1$； $\eta_2 = x_2' - x_2$，在圆域积分，式(1.2.20)化成

$$u(x_1,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\psi(x_1+\eta_1)d\eta_1\int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t}\varphi(x_1+\eta_1)d\eta_1\int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} \tag{1.2.22}$$

求出积分得到

$$u(x_1,t)=\frac{1}{2}\int_{-t}^{t}\psi(x_1+\eta_1)\mathrm{d}\eta_1+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t}\varphi(x_1+\eta_1)\mathrm{d}\eta_1$$

即

$$u(x_1,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x_1+t)+\varphi(x_1-t)]+\frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (1.2.23)$$

上式与式(1.1.14)一致. 当 $\varphi\in C^2,\psi\in C^1$ 时不难验证上式确是一维波动方程 Cauchy 问题的古典解.

进一步分析式(1.2.23)的意义，考察局域在$[a,b]$区域内的初始分布，如图 1.2.4，经过时间 t 后，波动到达的范围(受初始分布影响的区域)由不等式

$$a-t\leqslant x_1\leqslant b+t,\qquad (t>0) \quad (1.2.24)$$

限定. 而在此范围以外，则 $u(x_1,t)=0$. 在 x_1-t 平面上，上式表示的区域称为区域$[a,b]$的**影响区域**，如图 1.2.5.

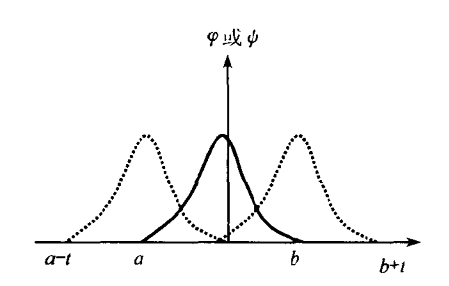


图 1.2.4　初值局域分布

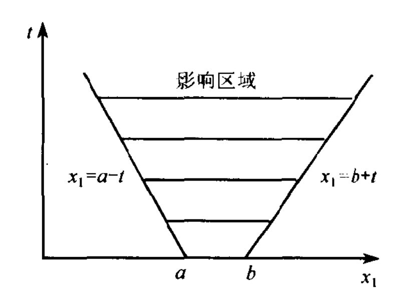


图 1.2.5　$[a,b]$的影响区域

由式(1.2.23)可知，u 在(x_1,t)点的值仅仅依赖于 x_1 轴上区间$[x_1-t,x_1+t]$上的初始分布，而与其他点上的初始分布无关，因此区间$[x_1-t,x_1+t]$称为点(x_1,t)的依赖区间. 作二条直线

$$x_1=a+t;\qquad x_1=b-t \quad (1.2.25)$$

及 x_1 轴围成的三角形区，如图 1.2.6，在此区域内的任一点(x_1,t)的依赖区间都落在区间$[a,b]$之内部. 因此，解在此三角形区域中的值就完全由$[a,b]$上的初始分布决定，而与此区域外的初始分布无关，这个三角区域称为$[a,b]$的**决定区域**. 给定$[a,b]$上初始分布，就可以在其决定区域中求得 Cauchy 问题的解.

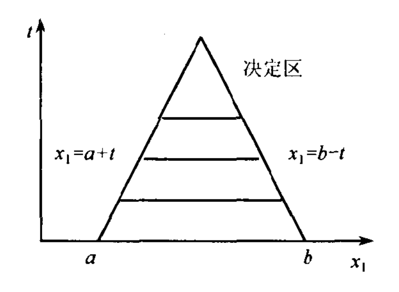


图 1.2.6　$[a,b]$的决定区

值得注意的是，一维波动方程的特

征线($x_1\pm t=$常数)起着十分重要的作用，这正是双曲型方程的普遍特性，即在 x_1-t 平面上，波动沿特征线传播.

1.2.2 非齐次波动方程和推迟势

考虑非齐次方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt}+\mathbf{L}u=g(\boldsymbol{r},t) \tag{1.2.26}$$

其中 $\mathbf{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$，在区域 G 内 $p(\boldsymbol{r})>0$，故上式是双曲型方程. 设初始条件与式(1.2.1)中相同. 由于式(1.2.26)是线性方程，可令 $u=u_1+u_2$，其中 $u_1(\boldsymbol{r},t)$满足齐次方程，但初值不为零，如式(1.2.1)中所表达，$u_2(\boldsymbol{r},t)$满足非齐次方程，而初值为零.

Duhamel 齐次化原理指出，只要求得 $u_1(\boldsymbol{r},t)$，则 $u_2(\boldsymbol{r},t)$的解可用 $u_1(\boldsymbol{r},t)$来表示. 设齐次方程的下列 Cauchy 问题

$$\varphi_{tt}+\mathbf{L}\varphi=0;\qquad \varphi\big|_{t=\tau}=0;\qquad \varphi_t\big|_{t=\tau}=g(\boldsymbol{r},\tau) \tag{1.2.27}$$

的解为 $\varphi(\boldsymbol{r},t,\tau)$，则 $u_2(\boldsymbol{r},t)$为

$$u_2(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t\varphi(\boldsymbol{r},t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.28}$$

上述结论的证明是容易的，事实上因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial t}&=\varphi(\boldsymbol{r},t,t)+\int_0^t\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}\tau=\varphi(\boldsymbol{r},t,\tau)\big|_{t=\tau}+\int_0^t\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.2.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}&=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{t=\tau}+\int_0^t\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau=g(\boldsymbol{r},t)+\int_0^t\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau\\&=g(\boldsymbol{r},t)-\int_0^t\mathbf{L}\varphi\mathrm{d}\tau\\&=g(\boldsymbol{r},t)-\mathbf{L}\int_0^t\varphi\mathrm{d}\tau=g(\boldsymbol{r},t)-\mathbf{L}u_2\end{aligned} \tag{1.2.30}$$

故

$$\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+\mathbf{L}u_2=g(\boldsymbol{r},t) \tag{1.2.31}$$

因此式(1.2.28)满足非齐次方程. 由式(1.2.29)和(1.2.30)立即看出 $u_2(\boldsymbol{r},t)$同样满足齐次初始条件. 利用齐次化原理及 1.2.1 小节的结果，立即可求得下列定解问题的解

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}=g(\boldsymbol{r},t);\qquad u\big|_{t=0}=0;\qquad u_t\big|_{t=0}=0 \tag{1.2.32}$$

当 $n=3$ 时，由式(1.2.19)得

$$\varphi(\boldsymbol{r},t,\tau)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_{t-\tau}}\frac{g(\boldsymbol{r}',\tau)}{\xi}\mathrm{d}S' \tag{1.2.33}$$

其中 $\xi=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，故

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t\varphi(\boldsymbol{r},t,\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_{S_{t-\tau}}\frac{g(\boldsymbol{r}',\tau)}{\xi}\mathrm{d}S'\mathrm{d}\tau \tag{1.2.34}$$

作变换 $t-\tau=\tau'$ 则

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_{S_{\tau'}}\frac{g(\boldsymbol{r}',t-\tau')}{\xi}\mathrm{d}S'\mathrm{d}\tau' \tag{1.2.35}$$

在半径为 τ' 的球面上，面元为 $\mathrm{d}S'=\tau'^2\mathrm{d}\Omega$，于是上式变成

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_{\Omega}\frac{g(\boldsymbol{r}',t-\tau')}{\xi}\tau'^2\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}\Omega \tag{1.2.36}$$

上式中积分相当于在球 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2=t^2$ 中作体积分，于是有

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leqslant t}\frac{g(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}v' \tag{1.2.37}$$

其中 $\mathrm{d}v'$ 是球 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2=t^2$ 中的体元. 上式 $u(\boldsymbol{r},t)$ 称为**推迟势**.

当 $n=2$，利用式(1.2.20)得

$$\varphi(x_1,x_2,t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\iint_D\frac{g(x_1',x_2',\tau)\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_2'}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-x')^2-(x_2-x_2')^2}}$$

其中 D 为圆内：$(x-x_1')^2+(x_2-x_2')^2\leqslant(t-\tau)^2$. 因此，当 $n=2$ 时，方程(1.2.26)的解为

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\iint_D\frac{g(x_1',x_2',\tau)\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-x_1')^2-(x_2-x'_2)^2}} \tag{1.2.38}$$

最后，当 $n=1$ 时，由式(1.2.23)

$$\varphi(x,t,\tau)=\frac{1}{2}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}g(s,\tau)\mathrm{d}s$$

于是，方程(1.2.32)的解为

$$u(x,t)=\int_0^t\varphi(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}g(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau. \tag{1.2.39}$$

1.2.3　能量不等式和 Cauchy 问题的适定性

为了简单，考虑一维波动方程 Cauchy 问题的适定性问题. 由上面的讨论，当 φ 和 ψ 满足一定的可微条件时

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x)$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \tag{1.2.40}$$

的古典解存在且由式(1.2.23)表示.

余下的问题是讨论式(1.2.40)解的惟一性和稳定性问题. 为此引进能量积分的概念. 考虑图 1.2.7 中 x-t 平面上的三角形区, 即区间(x_1, x_2)的决定区, 用平行于 x 轴的直线截三角区为二部分, 交特征线于(A, B)二点, 线段 AB 用L_t 表示, 显然 L_t 随 t 变化, 当 $t=0$ 时, L_0 表示三角区的底边 x_1x_2. 在 L_t 上作积分

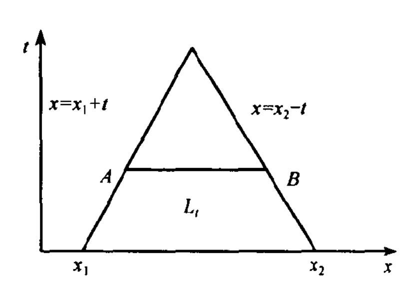


图 1.2.7　在三角区域上作能量积分

$$E(L_t) = \int_A^B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{1.2.41}$$

$E(L_t)$在物理上有能量的意义, 故称为**能量积分**. 下面证明不等式

$$E(L_t) \leqslant E(L_0) \tag{1.2.42}$$

由于 $E(L_t) \geqslant 0$, 故只要证明 $E(L_t)$随 t 单调下降即可, 即证明

$$\frac{\mathrm{d}E(L_t)}{\mathrm{d}t} \leqslant 0 \tag{1.2.43}$$

因(A, B)二点坐标是 t 的函数, 故式(1.2.41)中上下限是 t 的函数, 利用变上、下限求导公式可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(L_t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_A^B \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\mathrm{d}x \\ &\quad - [u_t^2(A) + u_x^2(A) + u_t^2(B) + u_x^2(B)]\end{aligned} \tag{1.2.44}$$

积分号内第二项分部积分有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(L_t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_A^B \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x + 2u_t(A)u_x(A) - 2u_t(B)u_x(B) \\ &\quad - [u_t^2(A) + u_x^2(A) + u_t^2(B) + u_x^2(B)]\end{aligned}$$

由于 u 满足波动方程(1.2.40), 故

$$\frac{\mathrm{d}E(L_t)}{\mathrm{d}t} = -\{[u_t(A) - u_x(A)]^2 + [u_t(B) + u_x(B)]^2\} \leqslant 0$$

因此,式 (1.2.42)得证. 利用式(1.2.42)可证明波动方程 Cauchy 问题解的惟一性: 三角形区域内的解 $u(x, t)$由$[x_1, x_2]$上的初值分布惟一地决定, 而与此区间以外的初值无关. 设式(1.2.40)存在两个解 u_1 和 u_2, 则 $\varphi = u_1 - u_2$ 满足

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \qquad \varphi\big|_{t=0} = \varphi_t\big|_{t=0} = 0 \tag{1.2.45}$$

由于 $t=0$ 时

$$E(L_0)=\int_A^B\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x=0$$

故由式(1.2.42)，在三角形区域恒有 $E(L_t)=0$，即 $\varphi_t=\varphi_x=0$，因此 $\varphi=$常数，又 $t=0$ 时 $\varphi=0$，故 $\varphi\equiv0$，于是 $u_1=u_2$，惟一性得证！

为了证明稳定性，考虑积分

$$E_1(L_t)=\int_A^B u^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{1.2.46}$$

对 $E_1(L_t)$求导

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_1(L_t)}{\mathrm{d}t}&=2\int_A^B u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x-[u^2(x_A)+u^2(x_B)]\\&\leqslant2\int_A^B u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\leqslant\int_A^B u^2\mathrm{d}x+\int_A^B\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_A^B u^2\mathrm{d}x+\int_A^B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

利用能量积分式(1.2.41)，上式变成

$$\frac{\mathrm{d}E_1(L_t)}{\mathrm{d}t}\leqslant E_1(L_t)+E(L_t) \tag{1.2.47}$$

两边乘 e^{-t}可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}E_1(L_t)]\leqslant\mathrm{e}^{-t}E(L_t) \tag{1.2.48}$$

故

$$E_1(L_t)\leqslant\mathrm{e}^tE_1(L_0)+\mathrm{e}^t\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}E(L_\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.49}$$

利用式(1.2.42)，上式变成

$$E_1(L_t)\leqslant\mathrm{e}^tE_1(L_0)+(\mathrm{e}^t-1)E(L_0) \tag{1.2.50}$$

上式称为**能量不等式**，其意义是把 t 时刻解的积分值$E_1(L_t)$与初始给定的条件联系起来．下面利用能量不等式来说明 Cauchy 问题式(1.2.40)关于初值微小变化的稳定性．设 u_1 和 u_2 为式(1.2.40)中初值分别为(φ_1,ψ_1)和(φ_2,ψ_2)时的解，记 $u=u_1-u_2$ 和 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$，以及 $\psi=\psi_1-\psi_2$，由式(1.2.50)

$$\begin{aligned}\int_A^B|u_1-u_2|^2\mathrm{d}x\leqslant{}&\mathrm{e}^t\int_A^B|\varphi_1-\varphi_2|^2\mathrm{d}x\\&+(\mathrm{e}^t-1)\int_A^B\left(|\psi_1-\psi_2|^2+\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|^2\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故当 $t\in(0,T)$(其中 T 为任一有限正数)时，对任一给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使

$$\int_A^B|\varphi_1-\varphi_2|^2\mathrm{d}x<\eta;\quad\int_A^B|\psi_1-\psi_2|^2\mathrm{d}x<\eta;\quad\int_A^B\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x<\eta$$

时有

$$\int_A^B |u_1 - u_2|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon$$

因此 Cauchy 问题式(1.2.40)在均方偏差意义下，对初值分布是稳定的. 上述结论不仅对高维波动方程的 Cauchy 问题成立，而且可推广到更一般的双曲型方程的 Cauchy 问题上去.

1.2.4　混合问题解的惟一性和稳定性

首先考虑最简单情形，即一维波动方程的混合问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in (0, l), \qquad t > 0 \tag{1.2.51}$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x); \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \tag{1.2.52}$$

用分离变数法(见第二章)不难求解上述定解问题，但我们不具体求解它，而假定其解存在，证明解的惟一性和关于初始分布(φ, ψ)的稳定性.

考虑能量积分

$$E(t) = \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{1.2.53}$$

对 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = 2\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\mathrm{d}x \tag{1.2.54}$$

第二项分部积分，并利用边界条件，可得

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = 2\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x = 0 \tag{1.2.55}$$

即

$$E(t) = 常数 \tag{1.2.56}$$

上式的物理意义很明显，它表示波动过程中能量守恒. 下面利用上式证明混合问题解的惟一性，为此只要证明下列零初值问题只有零解即可

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0; \qquad u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0 \tag{1.2.57}$$

因 $t = 0$ 时

$$E(0) = \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg|_{t=0}\mathrm{d}x = 0 \tag{1.2.58}$$

故由式(1.2.56)，$E(t) \equiv 0$，于是 $u_t = u_x = 0$，因此 $u =$ 常数，而由初始条件，$u \equiv 0$，即零初值问题只有零解，于是混合问题的惟一性得到证.

为了证明混合问题关于初值的稳定性，考虑积分

$$E_1(t) = \int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{1.2.59}$$

同 1.2.3 小节一样，不难推出下列能量不等式

$$E_1(t) \leqslant \mathrm{e}^t E_1(0) + (\mathrm{e}^t - 1)E(0) \tag{1.2.60}$$

于是立即得出结论：波动方程的混合问题式(1.2.51)和(1.2.52)的解在下述意义下是稳定的. 对任何给定的 $\varepsilon>0$，一定可以找到 $\eta>0$，只要初值分布之差满足

$$\int_0^l |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|^2 \mathrm{d}x < \eta; \qquad \int_0^l |\psi_1 - \psi_2|^2 \mathrm{d}x < \eta;$$

$$\int_0^l \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x < \eta \tag{1.2.61}$$

则解 u_1 和 u_2 之差$(u_1 - u_2)$满足

$$\int_0^l |u_1 - u_2|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon \tag{1.2.62}$$

即初值的微小变化只能引起解的微小变化，故稳定性得证. 下面考虑三维波动方程，设混合问题

$$u_{tt} - \nabla^2 u = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in G \tag{1.2.63}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{r}); \qquad u_t|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{r}) \tag{1.2.64}$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G} = 0, \qquad (\alpha/\beta > 0) \tag{1.2.65}$$

的解存在，现在证明其惟一性和关于初值分布的稳定性. 为此只要推出与式(1.2.56)和(1.2.60)相似的能量守恒式和不等式即可. 考虑能量积分

$$E(t) = \int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + (\nabla u)^2\right]\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} \frac{\alpha}{\beta} u^2 \mathrm{d}S \tag{1.2.66}$$

下面来证明能量守恒式

$$E(t) = \text{常数} \tag{1.2.67}$$

对 $E(t)$求导

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = 2\int_G \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\nabla u)\cdot\left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}\tau + 2\iint_{\partial G} \frac{\alpha}{\beta} u \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}S \tag{1.2.68}$$

利用 Green 公式(见 1.3.2 小节)

$$\int_G (\nabla u)\cdot\left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \int_G \frac{\partial u}{\partial t}\nabla^2 u \mathrm{d}\tau$$

代入上式

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = 2\int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u\right)\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\tau + 2\iint_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\alpha}{\beta}u\right)\mathrm{d}S$$

由于 u 满足式(1.2.63)和(1.2.65)故

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

于是式(1.2.67)得证. 由此可推出定解问题式(1.2.63)～(1.2.65)解的惟一性.

下面来证明能量不等式(1.2.60)对三维混合问题也成立，只要 $E(t)$ 的定义改成式(1.2.66). 事实上，对 $E_1(t)$ 有

$$E_1(t)=\int_G u^2\mathrm{d}\tau \tag{1.2.69}$$

二边求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_1(t)}{\mathrm{d}t}&=2\int_G u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\tau\leqslant\int_G u^2\mathrm{d}\tau+\int_G\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\int_G u^2\mathrm{d}\tau+\int_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau+\iint_{\partial G}\frac{\alpha}{\beta}u^2\mathrm{d}S\\&=E_1(t)+E(t)\end{aligned}$$

其中第二步是因为 $\alpha/\beta>0$，上式两边乘 e^{-t}

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}E_1(t)]\leqslant\mathrm{e}^{-t}E(t)$$

积分得

$$E_1(t)\leqslant\mathrm{e}^tE_1(0)+\mathrm{e}^t\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}E(\tau)\mathrm{d}\tau$$

利用式(1.2.67)

$$E_1(t)\leqslant\mathrm{e}^tE_1(0)+(\mathrm{e}^t-1)E(0) \tag{1.2.70}$$

故得证. 由上式不难得到结论：当初始条件 φ_1 与 φ_2，ψ_1 与 ψ_2 任意“接近”时，解 u_1 与 u_2 也可任意接近. 具体有，对任何给定的 $\varepsilon>0$，一定可以找到 $\eta>0$，只要初始条件之差 $(\varphi_1-\varphi_2)$ 与 $(\psi_1-\psi_2)$ 满足

$$\int_G|\varphi_1-\varphi_2|^2\mathrm{d}\tau<\eta;\qquad\int_G\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}\tau<\eta,\qquad(i=1,2,3)$$

$$\int_G|\psi_1-\psi_2|^2\mathrm{d}\tau<\eta;\qquad\iint_{\partial G}|\varphi_1-\varphi_2|^2\mathrm{d}S<\eta$$

那么，总有

$$\int_G|u_1-u_2|^2\mathrm{d}\tau<\varepsilon$$

至此，我们证明了波动方程 Cauchy 问题和混合问题的解在均方差意义下的惟一性和稳定性，该结论对一般的双曲型方程基本成立.

1.3 Laplace 方程与 Helmholtz 方程

本节讨论二个最简单的椭圆型方程，即 Laplace 方程与 Helmholtz 方程，主要分析二个自变量的 Laplace 方程和调和函数的基本性质、Laplace 方程边值问题的适定性和 Helmholtz 方程与辐射问题.

1.3.1 二个自变量的 Laplace 方程

满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0 \tag{1.3.1}$$

的函数 $u(x_1,\cdots,x_n)$称为调和函数. 考虑 $n=2$，分别以 x 和 y 代替 x_1 和 x_2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.3.2}$$

由复变函数理论，任何解析函数 $w(z)$

$$w(z)=\xi(x,y)+\mathrm{i}\eta(x,y) \tag{1.3.3}$$

(其中 $z=x+\mathrm{i}y$)的实部 $\xi(x,y)$及虚部 $\eta(x,y)$都是方程(1.3.2)的解. 幂次函数 $z^n(n\geqslant 0)$是解析函数

$$w=z^n=(x+\mathrm{i}y)^n=r^n\exp(\mathrm{i}n\varphi) \tag{1.3.4}$$

其中(r,φ)是平面极坐标，于是

$$\mathrm{Re}(w)=r^n\cos n\varphi;\qquad \mathrm{Im}(w)=r^n\sin n\varphi \tag{1.3.5}$$

都是方程(1.3.2)的解. 由于式(1.3.2)是线性方程，故上式的任一线性组合也是它的解

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)r^n \tag{1.3.6}$$

当 $r\to\infty$，$w=z^{-n}$是解析函数，故

$$\mathrm{Re}(w)=r^{-n}\cos n\varphi;\qquad \mathrm{Im}(w)=-r^{-n}\sin n\varphi \tag{1.3.7}$$

是式(1.3.2)在无限远处正则的解. 可以证明，在平面极坐标下 Laplace 方程(1.3.2)有分离变数形式的通解

$$u(r,\varphi)=C_0+D_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)(C_nr^n+D_nr^{-n}) \tag{1.3.8}$$

式中 $D_0\ln r$ 可有解析函数 $w=\ln z(z\neq 0)$的实部推得. Laplace 方程的一个重要性质是在变换下

$$\xi=\xi(x,y);\qquad \eta=\eta(x,y) \tag{1.3.9}$$

方程的形式不变，其中 $\xi(x,y)$和 $\eta(x,y)$是任一解析函数的实部和虚部. 验证如

下：由复合函数求导法则

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \eta}+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial \eta}+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}$$

因此

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}+2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}$$

因 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 是解析函数的实部与虚部，满足 Laplace 方程，并且由 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y};\qquad \frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

代入上式即得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)$$

因此只要

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\neq 0$$

在新坐标系(ξ,η)下，Laplace 方程仍变成 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

而且由于曲线族 $\xi(x,y)=C_1$ 与 $\eta(x,y)=C_2$(C_1 和 C_2 为常数)代表两族相互正交的曲线，故变换式(1.3.9)构成正交曲线坐标系.

上述结论是应用保角变换法求解二维 Laplace 方程边值问题的基础. 因涉及许多复变函数方面的理论，这里不作进一步讨论.

复变函数中一个十分有用的公式是 Cauchy 积分公式：设 $f(z)$是区域 G 中单值解析函数，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\begin{cases}f(z), & z\in G\\ 0, & z\notin G\end{cases}\tag{1.3.10}$$

下面利用上式求解圆内 Laplace 方程的第一边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(r<R)$$
$$u\big|_{r=R}=u(R,\varphi)\equiv g(\varphi)\tag{1.3.11}$$

暂且设 $f(z)$在圆 $r=R$ 上解析，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{r=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'})\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\mathrm{d}\varphi'}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \quad (1.3.12)$$

因在圆周 $r=R$ 上，$\xi=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}$，而在圆内 $r<R$ 上，$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，记 $z^*=(R^2/r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$。显然 z^*位于圆外，故由式(1.3.10)

$$0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{r=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z^*}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'})\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}\mathrm{d}\varphi'}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \quad (1.3.13)$$

两式相减

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'})\left[\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}-\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\right]\mathrm{d}\varphi'\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'})(R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi'\end{aligned} \quad (1.3.14)$$

取上式的实部，即得式(1.3.11)的解

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi')(R^2-r^2)\mathrm{d}\varphi'}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi'-\varphi)},(r<R) \quad (1.3.15)$$

上式称为 **Poisson** 公式，函数

$$G(R,\varphi;r,\varphi')=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\varphi')} \quad (1.3.16)$$

称为 **Poisson** 核．推得式(1.3.15)时，曾假定 $f(z)$在圆上解析．事实上可以证明，只要 $g(\varphi)$在圆周上连续，式(1.3.16)仍是边值问题的解．

利用关系

$$G(R,\varphi;r,\varphi')=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(\cos n\varphi'\cos n\varphi+\sin n\varphi'\sin n\varphi) \quad (1.3.17)$$

(其中 $\rho=r/R<1$)，不难表明式(1.3.15)具有式(1.3.8)的形式，因此式(1.3.15)确是 Laplace 方程的解．进一步还可验证：当 $g(\varphi)$是连续函数时，它还满足边界条件．如果引进广义函数弱收敛的概念(见第三章)，有关系

$$\lim_{r\to R}[G(R,\varphi;r,\varphi')]=2\pi\delta(\varphi-\varphi')$$

于是有

$$u(r,\varphi)|_{r=R}=\lim_{r\to R}[u(r,\varphi)]=\int_0^{2\pi}g(\varphi')\delta(\varphi-\varphi')\mathrm{d}\varphi'=g(\varphi)$$

故式(1.3.15)满足边界条件．

上面简单介绍了复变函数方法讨论二维 Laplace 方程，它们在弹性力学、流体力学和电磁学等方面有十分重要的应用．

1.3.2 调和函数的基本性质

首先考虑三维空间情形，介绍调和函数 $u(\boldsymbol{r})$的两个基本性质，(1)均值性：

调和函数 $u(\boldsymbol{r})$在其定义域 G 内任一点 M_0 的值，等于 $u(\boldsymbol{r})$在以 M_0 为球心，而含于 G 中的任一球面 S_R 上的积分平均值

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R} u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{1.3.18}$$

反之，如果 $u(\boldsymbol{r})$满足均值公式，则 $u(\boldsymbol{r})$在 G 内必定是调和函数；(2)极值性：调和函数不可能在其区域内部达到极值，故极大值和极小值只能在 G 的边界∂G 上取得. 为了证明上述性质，先引进 Green 公式，利用

$$\int_G \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.3.19}$$

取 $\boldsymbol{A} = u\nabla v$ 得第一 Green 公式

$$\int_G u\nabla^2 v\mathrm{d}\tau + \int_G(\nabla u)\cdot(\nabla v)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.3.20}$$

取 $\boldsymbol{A} = v\nabla u$ 则

$$\int_G v\nabla^2 u\mathrm{d}\tau + \int_G(\nabla u)\cdot(\nabla v)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.3.21}$$

上两式相减得到 Green 公式

$$\int_G(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{1.3.22}$$

显然要求 u 和 v 在 G 内二次可微，在∂G 上一次可微. 取 $v = 1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$可得

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}_0) = &-\frac{1}{4\pi}\int_G\frac{\nabla^2 u}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right)\right]\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{1.3.23}$$

严格地，要在 $\boldsymbol{r}_0$ 点挖去半径为 ε 的小球，然后令 $\varepsilon\to 0$，如图 1.3.1. 如果 $u(\boldsymbol{r})$满足 Laplace 方程$\nabla^2 u = 0$ 则

$$u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right)\right]\mathrm{d}S \tag{1.3.24}$$

式(1.3.22)中取 $v = 1$，而 u 满足 Laplace 方程，可得调和函数的另一性质

$$\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 0 \tag{1.3.25}$$

上式有明显的物理意义：在静电场中，意味着穿过闭曲面∂G 的电通量守恒；如果描述热平衡，则意味着 G 内能量守恒，因为 G 内不存在热源.

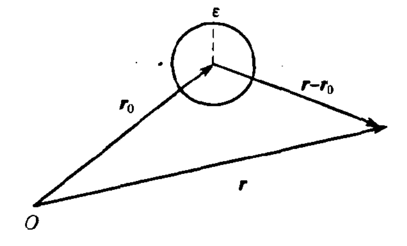


图 1.3.1 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 的矢量关系

为了证明式(1.3.18)，取∂G 为以 $\boldsymbol{r}_0$ 为球心，R 为半径的球面 S_R，在 S_R 上

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right)\bigg|_{S_R}=-\frac{1}{R^2}$$

代入式(1.3.24)

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R}\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S+\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R}u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{1.3.26}$$

利用式(1.3.25)即得式(1.3.18)，反之结论证明略.

从均值公式式(1.3.18)可直接推出极值性. 下面给出一直观的说明，详细的证明可参看有关书籍. 用反证法，设调和函数 $u(\boldsymbol{r})$在 G 内 M_0 点取极值，则由 u 的连续性，总可取以 M_0 为圆心，ε 为半径的小球，在球内一致有

$$u(\boldsymbol{r})>u(M_0)(M_0\text{ 是极小时})；\ u(\boldsymbol{r})<u(M_0)(M_0\text{ 是极大时})$$

两种情况均值公式都不可能成立，因此 $u(\boldsymbol{r})$不是调和函数，于是极值点 M_0 不可能在 G 内取得，在 G 内调和函数只可能存在鞍点，如图 1.3.2. 设 $u(\boldsymbol{r})$在∂G 上取极大值为 M

$$\max_{r\in G+\partial G}[u(\boldsymbol{r})]=\max_{r\in\partial G}[u(\boldsymbol{r})]=M \tag{1.3.27}$$

又因 Laplace 方程是齐次方程,$(-M)$ 一定是$[-u(\boldsymbol{r})]$的极小值，因此极值性可表示成

$$\max_{r\in G+\partial G}|u(\boldsymbol{r})|=\max_{r\in\partial G}|u(\boldsymbol{r})|=M \tag{1.3.28}$$

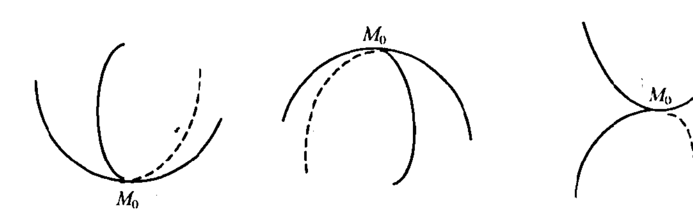


图 1.3.2 M_0 极小、极大和鞍点三种情况

对 n 维情形,式(1.3.22)中取 $v(\boldsymbol{r})$

$$v(\boldsymbol{r})=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^{n-2}}, & n>2\\ -\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|, & n=2\end{cases}$$

于是可得均值公式

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\iint_{S_R}u\,\mathrm{d}S_n \tag{1.3.29}$$

其中 S_R 是半径为R 的 n 维球面,ω_n 为 n 维单位球面的面积$\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

1.3.3　边值问题的适定性

考虑 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\nabla^2 u = 0, \boldsymbol{r} \in G; \qquad u|_{\partial G} = f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \partial G \tag{1.3.30}$$

设上述问题的解存在，下面利用极值性证明它的惟一性和稳定性.

首先,证明解的惟一性：设存在两个解 u_1 和 u_2，则 $u = u_1 - u_2$ 满足

$$\nabla^2 u = 0; \qquad u|_{\partial G} = 0 \tag{1.3.31}$$

由式(1.3.28)

$$\max_{r \in G+\partial G} |u(\boldsymbol{r})| = \max_{r \in \partial G} |u(\boldsymbol{r})| = 0 \tag{1.3.32}$$

如果在 G 内 $u(\boldsymbol{r}) \neq 0$，则应有

$$\max_{r \in G+\partial G} |u(\boldsymbol{r})| = \max_{r \in G} |u(\boldsymbol{r})| \neq 0 \tag{1.3.33}$$

上式与式(1.3.32)矛盾！故在 G 内恒有 $u(\boldsymbol{r}) \equiv 0$，即 $u_1 \equiv u_2$,惟一性得证.

下面证明稳定性，设 u_1 和 u_2 分别是下列问题的解

$$\nabla^2 u_1 = 0; \qquad u_1|_{\partial G} = f_1 \tag{1.3.34}$$

$$\nabla^2 u_2 = 0; \qquad u_2|_{\partial G} = f_2 \tag{1.3.35}$$

并且在∂G 上有 $|f_1 - f_2| < \varepsilon$,令调和函数 $u = u_1 - u_2$，则 u 满足

$$\nabla^2 u = 0; \qquad u|_{\partial G} = f_1 - f_2 \tag{1.3.36}$$

利用式(1.3.27)有

$$\max_{r \in G+\partial G} |u(\boldsymbol{r})| = \max_{r \in \partial G} |u(\boldsymbol{r})| = \max_{r \in \partial G} |f_1 - f_2| < \varepsilon$$

即在 G 内 $|u_1 - u_2| < \varepsilon$. 这表明解对边值的微小偏差是一致稳定的. 对第二、三类边界条件，已不能利用式(1.3.27)，但可用下述方法来证明其解的惟一性. 考虑下列边值问题

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u = f, \qquad \boldsymbol{r} \in G \\ &\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = g(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in \partial G \end{aligned} \tag{1.3.37}$$

其中 $\alpha/\beta \geqslant 0$. 设上述边值问题存在两个解 u_1 和 u_2，则 $u = u_1 - u_2$ 满足

$$\nabla^2 u = 0; \quad \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0 \tag{1.3.38}$$

令式(1.3.21)中 $u = v$ 则有

$$\int_G u \nabla^2 u \mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S - \int_G (\nabla u)^2 \mathrm{d}\tau \tag{1.3.39}$$

利用(1.3.38)第一式

$$-\int_G (\nabla u)^2 \mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S = 0 \tag{1.3.40}$$

分三种情况讨论：

(1) 第一类边界条件 $u|_{\partial G}=0$ 代入上式得到

$$\int_G (\nabla u)^2 \mathrm{d}\tau = 0$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{1.3.41}$$

故 $u=$常数，又因 $u|_{\partial G}=0$ 故 $u\equiv 0$，于是 $u_1\equiv u_2$，惟一性得证.

(2) 第二类边界条件，由式(1.3.40)，同样得 $u=$常数. 因此，对第二类边界条件,式(1.3.37)的解可确定到只差一个任意常数.

(3) 第三类边界条件，由式(1.3.38)的边界条件及式(1.3.40)

$$\int_G (\nabla u)^2 \mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} \frac{\beta}{\alpha} u^2 \mathrm{d}S = 0$$

由假定 $\beta/\alpha>0$，故由上式可推得 $u=$常数和 $u|_{\partial G}=0$，故 $u\equiv 0$，于是 $u_1\equiv u_2$,惟一性得证.

1.3.4 Helmholtz 方程与辐射问题

考虑波动方程

$$\varphi_{tt} = \nabla^2 \varphi(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.3.42}$$

如果我们求上式的时谐解

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = u(\boldsymbol{r}) \exp(-\mathrm{i}kt) \tag{1.3.43}$$

则 $u(\boldsymbol{r})$满足方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + k^2 u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.3.44}$$

其中 k 为任一实数. 显然上式是椭圆型的，称为 **Helmholtz 方程或约化波动方程**. 对 Helmholtz 方程，边值问题的解已不存在惟一性. 例如，考虑第一类边值问题

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + k^2 u(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in \overline{G} \\ &u\,|_{|\boldsymbol{r}|=\pi/k} = f(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in \partial\overline{G} \end{aligned} \tag{1.3.45}$$

其中 $\overline{G}$ 为半径等于 π/k 的球外，因齐次问题 $w|_{|\boldsymbol{r}|=\pi/k}=0$ 存在非零解

$$w = c\,\frac{\sin k\,|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{r}|} \tag{1.3.46}$$

其中 c 为任一常数，故对式(1.3.45)的解 u，$u+w$ 也是解，而且这样的解有无穷多. 但式(1.3.45)来源于具体的物理问题，例如声波的辐射问题：在球面$|\boldsymbol{r}|=\pi/k$ 上给定声压 $\varphi=f_0\exp(-\mathrm{i}kt)$，求球外开空间的辐射声场,则 $u(\boldsymbol{r})$满足定解问题式(1.3.45). 为了使 $u(\boldsymbol{r})$惟一，还必须附加其他条件，这样的条件称为 **Sommerfeld 辐射条件**. 表述如下：对边值问题

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + k^2 u(\boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in \overline{G} \\ &u(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = f(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in \partial\overline{G} \end{aligned} \tag{1.3.47}$$

其中 $\overline{G}$ 表示闭区域 G 以外的开区域，要求解满足：

(1) 无限远条件

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r^{n-1}}\left|\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}ku\right| = 0; \tag{1.3.48}$$

(2) 在 $\overline{G}$ 内

$$\left|\sqrt{r^{n-1}}u(r)\right| = \text{有限常数} \tag{1.3.49}$$

物理上，式 (1.3.48)表示 u 应取向外部空间辐射波场的解，而式(1.3.49)表示辐射能量的有限性.

3 **例** 1.3.1　考虑三维空间的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{1.3.50}$$

的二个球对称解

$$u_1 = \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}; \qquad u_2 = \frac{\exp(-\mathrm{i}kr)}{r} \tag{1.3.51}$$

因

$$r\left|\frac{\partial u_1}{\partial r} - \mathrm{i}ku_1\right| = \frac{1}{r}; \qquad r\left|\frac{\partial u_2}{\partial r} - \mathrm{i}ku_2\right| = -\left(2\mathrm{i}k + \frac{1}{r}\right)\exp(-\mathrm{i}kr)$$

故 u_1 满足辐射条件式(1.3.48)，而 u_2 不满足. 事实上，由式(1.3.43)

$$\varphi_1(r,t) = \frac{1}{r}\exp[\mathrm{i}k(r-t)]; \qquad \varphi_2(r,t) = \frac{1}{r}\exp[-\mathrm{i}k(r+t)] \tag{1.3.52}$$

显然，$\varphi_1(r,t)$表示从原点向外辐射的球面波，而 $\varphi_2(r,t)$表示由无穷远处向原点入射的球面波，因此 u_1 表示辐射解. 如果要求式(1.3.45)的解满足辐射条件，显然应取 $w\equiv 0$，故这时式(1.3.45)的解惟一.

因边值问题式(1.3.47)中给定 G 的边界∂G 上边界条件，而求 G 的外部 $\overline{G}$ 中 $u(\boldsymbol{r})$的值，这样的边值问题称为**外边值问题**. 对 Laplace 方程，也可定义第一、二和三类外边值问题. 如果限定 $u(\boldsymbol{r})$在无穷远处的渐近行为(相当于无限远处存在边界条件)，可证明解的惟一性.

注意：如果式(1.3.43)中时间关系取

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = u(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{i}kt) \tag{1.3.53}$$

则无限远条件式(1.3.48)应改为

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r^{n-1}}\left|\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}ku\right| = 0 \tag{1.3.54}$$

而

$$u_2 = \frac{\exp(-\mathrm{i}kr)}{r}; \qquad \varphi_2(r,t) = \frac{\exp[\mathrm{i}k(t-r)]}{r}$$

表示向外辐射的解.

1.4 热传导方程与定解问题的适定性

本节讨论最简单的抛物型方程，即热传导方程的定解问题，以及解的若干重要性质. 主要内容有：热传导方程的 Cauchy 问题、混合问题以及混合问题的适定性. 最后对三类典型方程的定解问题提法作一小结，讨论几个不适定的定解问题.

1.4.1 热传导方程的 Cauchy 问题

考虑一维热传导方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad t > 0; \qquad u|_{t=0} = f(x), \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{1.4.1}$$

用 Fourier 积分法解上述定解问题(见第二章,2.5 节)，首先设 $f(x)$的 Fourier 积分存在，并且当 $x \to \pm\infty$时 u 和 $u_x \to 0$(最后这些条件可减弱)，用 $U(\lambda, t)$表示 $u(x,t)$的 Fourier 积分

$$U(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} u(x,t)\mathrm{d}x \tag{1.4.2}$$

反变换为

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} U(\lambda, t)\mathrm{d}x \tag{1.4.3}$$

对式(1.4.1)作 Fourier 变换，得决定 $U(\lambda, t)$的方程

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t} + \lambda^2 U(\lambda,t) = 0 \\ U(\lambda,t)|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(x)\mathrm{d}x \equiv F(\lambda) \end{gathered} \tag{1.4.4}$$

上式的解为

$$U(\lambda, t) = F(\lambda)\exp(-\lambda^2 t) \tag{1.4.5}$$

代入式(1.4.3)即得解

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x - \lambda^2 t} F(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-s) - \lambda^2 t} f(s)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s \tag{1.4.6}$$

式中对 λ 的积分如下

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(x-s)-\lambda^2 t}d\lambda = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda(x-s)-\lambda^2 t}d\lambda + \int_{0}^{\infty} e^{-i\lambda(x-s)-\lambda^2 t}d\lambda$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\cos[\lambda(x-s)]d\lambda$$

令 $I(a)$如下

$$I(a) = 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\cos(a\lambda)d\lambda \qquad (1.4.7)$$

则

$$\frac{dI(a)}{da} = -2\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda^2 t}\sin(a\lambda)d\lambda = \frac{1}{t}\int_0^{\infty}\sin(\lambda a)d(e^{-\lambda^2 t}) = -\frac{a}{2t}I(a)$$

于是 $I(a)$满足

$$\frac{dI(a)}{da} + \frac{a}{2t}I(a) = 0; \qquad I(a)|_{a=0} = 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t}d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \qquad (1.4.8)$$

故求得

$$I(a)|_{a=x-s} = 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\cos[\lambda(x-s)]d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] \qquad (1.4.9)$$

上式代入式(1.4.6)即得 Cauchy 问题式(1.4.1)的形式解

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s,t)f(s)ds \qquad (1.4.10)$$

其中函数 $G(x-s,t)$称为热传导方程的 **Poisson 核**，在热传导方程中起着十分重要的作用

$$G(x-s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] \qquad (1.4.11)$$

下面验证式(1.4.10)确为 Cauchy 问题式(1.4.1)的古典解，分二步讨论：

首先，验证式(1.4.10)满足热导方程：显然当初值函数 $f(x)$为有界的连续函数时，积分式(1.4.10)对所有的 $t>0$ 收敛，且在积分号内对 x 及 t 微分任意次而得的积分也对所有的 $t>0$ 收敛，故由积分式(1.4.10)定义的 $u(x,t)$当 $t>0$ 时关于 x 和 t 都无穷可微．此外直接计算表明 $G(x-s,t)$(当 $t>0$ 时)满足方程 $G_t - G_{xx} = 0$. 因此，当 $t>0$ 时，式(1.4.10)满足热导方程．

其次，必须验证式(1.4.10)满足初始条件．这里不进行详细的证明，仅指出，如果引进广义函数弱收敛(见第三章)，有关系式

$$\lim_{t\to 0}G(x-s,t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4t}\right] = \delta(x-s) \qquad (1.4.12)$$

利用 δ 函数的性质，当 $f(x)$是连续函数时

$$u(x,t)|_{t=0} = \lim_{t\to 0}u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-s)f(s)ds = f(x) \qquad (1.4.13)$$

综上所述，当 $f(x)$ 是 x 的有界连续函数时，式(1.4.10)确实给出 Cauchy 问题式(1.4.1)的古典解，且此解当 $t>0$ 时关于 x 和 t 都无穷可微.

对 $f(x)$ 的限制可进一步放宽：设 $f(x)$ 连续，并且

$$|f(x)| \leqslant M\exp(Ax^2) \tag{1.4.14}$$

其中常数 M 和 A 大于零，则方程(1.4.10)是 Cauchy 问题式(1.4.1)在 $x-t$ 平面上带状区域 R

$$R:[-\infty < x < \infty, 0 < t \leqslant T] \tag{1.4.15}$$

中的古典解，并且在 R 中 $u(x,t)$ 无穷可微，即 $u \in C^\infty$，其中 $T<1/(4A)$.

对非齐次热传导方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t), \qquad t>0; \qquad u|_{t=0} = 0, \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{1.4.16}$$

也存在 Duhamel 齐次化原理. 设 $\varphi(x,t,\tau)$ 是下列齐次问题的解

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \qquad t>\tau; \qquad u|_{t=\tau} = g(x,\tau), \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{1.4.17}$$

则式(1.4.16)的解为

$$u(x,t) = \int_0^t \varphi(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.4.18}$$

于是，从式(1.4.10)立即可得到

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t-\tau) g(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{1.4.19}$$

如果初始条件是非齐次的，即满足(1.4.1)的第二式，则显然有

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s,t)f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t-\tau)g(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{1.4.20}$$

对 n 维初值问题，同样可求得定解问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = g(x_1, x_2, \cdots, x_n, t), \qquad t>0 \\ &u|_{t=0} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{1.4.21}$$

的解为

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,t)f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t-\tau)g(\boldsymbol{r}',\tau)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\tau \tag{1.4.22}$$

其中 Poisson 核为

$$G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4t}\right) \tag{1.4.23}$$

其中$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k')^2$；$\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}'=\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\cdots\mathrm{d}x_n'$

利用式(1.4.10)还可求半无限区域的热传导问题的解

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0;\qquad x\in(0,\infty),\qquad t>0 \tag{1.4.24}$$

$$u|_{t=0}=f(x);\qquad u(x,t)|_{x=0}=0,\qquad t>0 \tag{1.4.25}$$

为了把上述问题化成式(1.4.1)，根据边界条件，将 f 作奇延拓于负半轴

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x>0\\ -f(-x), & x<0\end{cases} \tag{1.4.26}$$

于是由式(1.4.10)

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(s)G(x-s,t)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{0}G(x-s,t)\bar{f}(s)\mathrm{d}s+\int_{0}^{\infty}G(x-s,t)\bar{f}(s)\mathrm{d}s$$

由奇延拓式(1.4.26)，即得问题的解为

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}f(s)[G(x-s,t)-G(x+s,t)]\mathrm{d}s \tag{1.4.27}$$

如果式(1.4.25)中为第二类边界条件$u_x|_{x=0}=0$,则应对 $f(x)$作偶延拓

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x>0\\ f(-x), & x<0\end{cases} \tag{1.4.28}$$

于是有解

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}f(s)[G(x-s,t)+G(x+s,t)]\mathrm{d}s. \tag{1.4.29}$$

1.4.2　一维热传导方程的混合问题

下面求解有限区间上一维热传导方程的混合问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad x\in(0,l),\qquad t>0 \tag{1.4.30}$$

$$u|_{t=0}=f(x);\qquad u(x,t)|_{x=0}=u(x,t)|_{x=l}=0 \tag{1.4.31}$$

用分离变数法解之，设解 $u(x,t)$有形式

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{1.4.32}$$

代入式(1.4.30)可得 $X(x)$和 $T(t)$满足的方程

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0;\qquad T'(t)+\lambda^2T(t)=0 \tag{1.4.33}$$

其中 λ 为分离变数常数，为使 $u(x,t)$满足边界条件，要求 $X(x)$满足

$$X(x)|_{x=0}=X(x)|_{x=l}=0 \tag{1.4.34}$$

(1.4.33)第一式和式(1.4.34)构成本征值问题，有非零解的条件是 λ 只能取分离值λ_n，相应的非零解为 $X_n(x)$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}; \qquad X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (n = 1,2,\cdots) \tag{1.4.35}$$

称 $X_n(x)$为**本征函数**，而相应的 λ_n 为**本征值**(本征值问题的详细讨论见第二章).(1.4.33)第二式的解为

$$T_n(t) = C_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \tag{1.4.36}$$

因式(1.4.30)和(1.4.31)是线性问题，故满足叠加原理，通解应为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \tag{1.4.37}$$

利用初始条件可求得

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x')\sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right)\mathrm{d}x'$$

于是定解问题具有形式解

$$u(x,t) = \int_0^l g(x,x',t)f(x')\mathrm{d}x' \tag{1.4.38}$$

其中 $g(x,x',t)$定义为

$$g(x,x',t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \tag{1.4.39}$$

由于级数中存在指数因子，容易证明在区域$[0<x<l;t>0]$中，对 $u(x,t)$求导与求和可以变换次序，从而式(1.4.38)确实满足式(1.4.30)和(1.4.31). 此外，为了保证式(1.4.38)是问题的古典解，$f(x)$还必须满足：(1) 相容性条件$f(0)=f(l)=0$. (2) $f(x)$具有连续的一阶导数，即 $f(x)\in C^1$.

$g(x,x',t)$的另一种常用形式为

$$g(x,x',t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}[G(x-x'-2kl,t) - G(x+x'-2kl,t)] \tag{1.4.40}$$

其中 $G(x,t)$为

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \tag{1.4.41}$$

为了证明式(1.4.40)，只要把该式右边看作 x 的函数，作 Fourier 展开即可. 事实上，函数 $\theta(x,t)$

$$\theta(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(x-2kl,t) \tag{1.4.42}$$

是 x 的周期函数且周期为l

$$\theta(x+l,t) = \theta(x,t) \tag{1.4.43}$$

显然

$$[\theta(x-x',t)-\theta(x+x',t)]]|_{x=0}=0 \tag{1.4.44}$$

故 $g(x,x',t)$可展成 Fourier 级数，即式(1.4.39)，具体证明过程略. $g(x,x',t)$称为混合问题式(1.4.30)和(1.4.31)的含时 Green 函数(见第三章详细讨论)，具有性质

$$\lim_{t\to 0}g(x,x',t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right)=\delta(x-x') \tag{1.4.45}$$

当边界条件为第二类边界条件$u_x|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0$ 时 Green 函数为

$$g_1(x,x',t)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x'}{l}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \tag{1.4.46}$$

与式(1.4.40)对应

$$g_1(x,x',t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[G(x-x'-2kl,t)+G(x+x'-2kl,t)] \tag{1.4.47}$$

而相应定解问题的解为

$$u(x,t)=\int_0^l g_1(x,x',t)f(x')\mathrm{d}x' \tag{1.4.48}$$

如果边界条件是$u|_{x=0}=0$ 和$u_x|_{x=l}=0$，可定义 Green 函数 $g_2(x,x',t)$

$$g_2(x,x',t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left[\frac{(n+1/2)\pi x}{l}\right]\cos\left[\frac{(n+1/2)\pi x'}{l}\right]\exp\left[-\frac{(n+1/2)^2\pi^2 t}{l^2}\right]$$

而相应定解问题的解为

$$u(x,t)=\int_0^l g_2(x,x',t)f(x')\mathrm{d}x'. \tag{1.4.49}$$

1.4.3　混合问题的适定性

设热传导方程的混合问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=g(x,t),\qquad x\in(a,b),\qquad t>0 \tag{1.4.50}$$

$$u(x,t)|_{t=0}=f(x),\qquad x\in[a,b] \tag{1.4.51}$$

$$u(x,t)|_{x=a}=\varphi(t);\qquad u(x,t)|_{x=b}=\psi(t) \tag{1.4.52}$$

解存在，现在证明其惟一性及关于 $f(x)$、$\varphi(t)$和 $\psi(t)$的稳定性. 为此首先介绍热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1.4.53}$$

的**极值原理**：设 $u(x,t)$在矩形 $R:[a\leqslant x\leqslant b;0\leqslant t\leqslant T]$上连续，并且在 R 内部满足式(1.4.53)，则它在矩形的两个侧面($x=a,b;0\leqslant t\leqslant T$)及底边($t=0,a\leqslant x\leqslant b$)上取得最大值和最小值，如图 1.4.1. 换言之，$u(x,t)$ 的最大值或最小值

在初始时刻 $t=0$ 或者边界上得到. 因式(1.4.53)是齐次方程, 如果 $u(x,t)$的最大值为 M, 则最小值一定是$(-M)$. 于是, 极值原理可表示成

$$\max_{R} |u(x,t)| = \max_{t=0\text{或}x=a,b} |u(x,t)| \tag{1.4.54}$$

用反证法来证明上述结果, 设 $u(x,t)$在点(x_0,t_0)得到其最大值: $a<x_0<b; 0<t_0\leqslant T$, 则应有

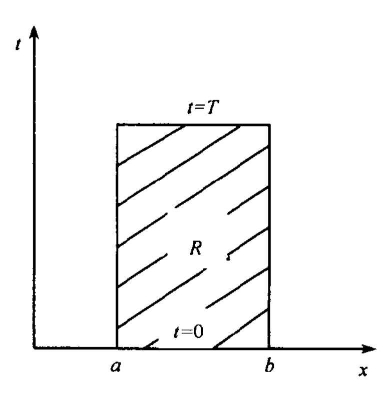


图 1.4.1 极值原理

$$\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x^2}\leqslant 0; \qquad \frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t}\geqslant 0 \tag{1.4.55}$$

如果 $t_0<T$ 则 $u_t(x_0,t_0)=0$,但有可能最大值在 $t_0=T$ 发生, 故一般只有 $u_t(x_0,t_0)\geqslant 0$. 为了引出矛盾, 考虑辅助函数

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2 \tag{1.4.56}$$

其中 $\varepsilon>0$ 为常数, 因 $w(x,t)$在区域 $R:[a\leqslant x\leqslant b; 0\leqslant t\leqslant T]$连续, 因此在某一点$(x_1,t_1)$, $w(x,t)$达到最大值. 设 $a<x_1<b; 0<t_1\leqslant T$,则同样应有

$$\frac{\partial^2 w(x_1,t_1)}{\partial x^2}\leqslant 0$$

$$\frac{\partial w(x_1,t_1)}{\partial t}\geqslant 0 \tag{1.4.57}$$

但直接计算可得

$$w_t - w_{xx} = u_t - u_{xx} - 2\varepsilon = -2\varepsilon < 0 \tag{1.4.58}$$

式(1.4.57)和(1.4.58)是矛盾的, 因为由式(1.4.57)

$$\frac{\partial w(x_1,t_1)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(x_1,t_1)}{\partial x^2}\geqslant 0 \tag{1.4.59}$$

上式右边非负, 而式(1.4.58)右边严格为负, 于是 $w(x,t)$只可能在 $t=0$ 或者 $x=a$和b 上取得其最大值, 设 M 是$u(x,t)$在初值 $t=0$ 或者边界 $x=a$ 和 b 上的最大值, 下面来证明在整个 R 上

$$u(x,t)\leqslant M \tag{1.4.60}$$

因我们已证明 $w(x,t)$的最大值在 $t=0$ 或者 $x=a$ 和 b 上得到, 故在 R 内

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2 \leqslant M + \varepsilon b^2 \tag{1.4.61}$$

因此

$$u(x,t) = w - \varepsilon x^2 \leqslant w \leqslant M + \varepsilon b^2 \tag{1.4.62}$$

式中令 $\varepsilon\to 0$, 则在整个 R 区域上均有式(1.4.60)成立. 而由假定, M 是$u(x,t)$

在初值 $t=0$ 或边界 $x=a$ 和 b 上的最大值，故极值原理得证．

利用极值原理，容易证明混合问题式(1.4.50)～(1.4.52)解的惟一性和稳定性．

(1) 惟一性：设存在两个解 u_1 和 u_2，则 $u=u_1-u_2$ 满足齐次问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0;\qquad u\big|_{t=0}=0;\qquad u\big|_{x=a}=u\big|_{x=b}=0 \tag{1.4.63}$$

由极值原理

$$\max_R |u(x,t)|=\max_{t=0\text{或}x=a,b}|u(x,t)|=0$$

故在整个 R 上有 $u\equiv 0$，于是 $u_1\equiv u_2$，惟一性得证；

(2) 稳定性：设初值或边值偏差 $|u_1-u_2|<\varepsilon$，由极值原理，在 R 内都有 $|u_1-u_2|<\varepsilon$，于是稳定性得证．

下面介绍另一种方法证明热传导方程混合问题解的惟一性和稳定性，这种方法不仅对第一类边界条件适用，而且对第二、三类边界条件也成立．考虑混合问题

$$u_t-\nabla^2 u=g(\boldsymbol{r},t),\qquad \boldsymbol{r}\in G,\qquad t>0 \tag{1.4.64}$$

$$u\big|_{t=0}=f(\boldsymbol{r});\qquad \left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=b(\boldsymbol{r},t),\qquad \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{1.4.65}$$

为证明解的惟一性，只需证明齐次问题

$$w_t-\nabla^2 w=0,\qquad \boldsymbol{r}\in G,\quad t>0 \tag{1.4.66}$$

$$w\big|_{t=0}=0;\qquad \left(\alpha w+\beta\frac{\partial w}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0 \tag{1.4.67}$$

只有零解即可．为此作积分

$$I(t)=\int_G w^2\mathrm{d}\tau \tag{1.4.68}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=2\int_G w\frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}\tau=2\int_G w\nabla^2 w\mathrm{d}\tau \tag{1.4.69}$$

利用 Green 公式

$$\int_G w\nabla^2 w\mathrm{d}\tau=-\int_G(\nabla w)^2\mathrm{d}\tau+\iint_{\partial G}w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.4.70}$$

式(1.4.69)变成

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-2\int_G(\nabla w)^2\mathrm{d}\tau+2\iint_{\partial G}w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.4.71}$$

利用(1.4.67)第二式边界条件，上式第二项

$$\iint_{\partial G} w \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}S = \begin{cases} -\iint_{\partial G} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 \mathrm{d}S, & \alpha \neq 0 \\ -\iint_{\partial G} \frac{\alpha}{\beta} w^2 \mathrm{d}S, & \beta \neq 0 \end{cases}$$

于是，当 $\alpha/\beta \geqslant 0$ 或者 $\beta/\alpha \geqslant 0$ 时总有 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t \leqslant 0$，因此 $I(t)$ 是单调下降函数，又根据初始条件：$I(0)=0$，故 $I(t) \leqslant 0$，但根据定义式(1.4.68)：$I(t) \geqslant 0$，故只有 $I(t)=0$，因此 $w=0$，惟一性即证.

下面来证明式(1.4.64)和(1.4.65)对初值 $f(\boldsymbol{r})$ 的均方渐近稳定性，为此设 $g(\boldsymbol{r},t)=0$ 和 $b(\boldsymbol{r},t)=0$，对积分

$$I(t) = \int_G u^2 \mathrm{d}\tau \tag{1.4.72}$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 2\int_G u \nabla^2 u \mathrm{d}\tau = -2\left[\int_G (\nabla u)^2 \mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G} u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S\right] \tag{1.4.73}$$

利用不等式

$$0 \leqslant \lambda_1^2 \leqslant \frac{\int_G (\nabla u)^2 \mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G} u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S}{\int_G u^2 \mathrm{d}\tau} \tag{1.4.74}$$

(式(1.4.74)的证明将在第四章中给出)其中 λ_1^2 是本征值问题

$$\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0, \quad \boldsymbol{r} \in G; \quad \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G} = 0 \tag{1.4.75}$$

的最小本征值，式(1.4.74)代入式(1.4.73)应有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \leqslant -2\lambda_1^2 I(t) \tag{1.4.76}$$

即有

$$I(t) \leqslant I(0)\exp(-2\lambda_1^2 t) \tag{1.4.77}$$

因此，对混合问题

$$u_t - \nabla^2 u = 0, \quad \boldsymbol{r} \in G, \quad t > 0 \tag{1.4.78}$$

$$u\big|_{t=0} = f(\boldsymbol{r}); \quad \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G} = 0 \tag{1.4.79}$$

不管初值 $f(\boldsymbol{r})$ 相差多少，解 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的均方偏差当 t 足够大时可任意地小，故混合问题对初值 $f(\boldsymbol{r})$ 是均方渐近稳定的.

1.4.4 三类典型方程定解问题提法比较

由前面各节的讨论可以看出，我们对 Laplace 方程提边值问题，而对波动方程和热传导方程则提混合问题或 Cauchy 问题. 特别是热传导方程，总是给定 $t=$

0 的初始值，求 $t>0$ 方程的解，这些定解问题来源于实际的物理问题，它们是适定的. 那么为什么对 Laplace 方程不提 Cauchy 问题，对波动方程不提边值问题呢？如果给定 $t=0$ 的值，求 $t<0$ 时热传导方程的解，将给出什么样的结果呢？下面的讨论指出，这些定解问题都是不适定的，我们用简单的例子来说明之.

例 1.4.1　二维 Laplace 方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad y>0,\qquad x\in(-\infty,\infty)\tag{1.4.80}$$

$$u\big|_{y=0}=\varphi(x);\qquad u_y\big|_{y=0}=\psi(x),\qquad x\in(-\infty,\infty)\tag{1.4.81}$$

如果作变换 $t=\mathrm{i}y$，则上述定解问题变成波动方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\qquad x\in(-\infty,\infty)\tag{1.4.82}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x);\qquad u_t\big|_{t=0}=-\mathrm{i}\psi(x),\qquad x\in(-\infty,\infty)\tag{1.4.83}$$

由式(1.1.14)，上述问题的解为

$$u=\frac{1}{2}[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)]-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(s)\mathrm{d}s\tag{1.4.84}$$

于是式(1.4.80)和(1.4.81)的解为

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{2}[\varphi(x+\mathrm{i}y)+\varphi(x-\mathrm{i}y)]-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{x-\mathrm{i}y}^{x+\mathrm{i}y}\psi(s)\mathrm{d}s\\&=\mathrm{Re}[\varphi(x+\mathrm{i}y)]-\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\int_{x}^{x+\mathrm{i}y}\psi(s)\mathrm{d}s-\int_{x}^{x-\mathrm{i}y}\psi(s)\mathrm{d}s\right]\\&=\mathrm{Re}[\varphi(x+\mathrm{i}y)]+\frac{1}{2}\left[\int_0^y\psi(x+\mathrm{i}t)\mathrm{d}t+\int_0^y\psi(x-\mathrm{i}t)\mathrm{d}t\right]\\&=\mathrm{Re}\left[\varphi(x+\mathrm{i}y)+\int_0^y\psi(x+\mathrm{i}t)\mathrm{d}t\right]\end{aligned}\tag{1.4.85}$$

根据复变函数理论，上式要求在复平面 $z=x+\mathrm{i}y$ 上，函数 $\varphi(z)$和 $\psi(z)$是解析函数. 因此边值不能任意给定，否则定解问题式(1.4.80)和(1.4.81)无解. 下面考察关于初值的稳定性，对初值 ψ 附加微小变化 $\delta\psi=n^{-k}\sin nx$，其中 k 和 n 都是正整数，当 n 充分大时，$\delta\psi$ 及$(k-1)$阶以下导数的绝对值都可任意小. 但解的变化

$$\delta u=\frac{1}{n^{k-1}}\sinh ny\sin nx=\frac{1}{2n^{k-1}}[\exp(ny)-\exp(-ny)]\sin nx\tag{1.4.86}$$

由此可见，尽管 $\delta\psi$ 可任意小，但 δu 却可任意大，因此二维 Laplace 方程的 Cauchy 问题是不稳定的.

例 1.4.2　波动方程的边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x,y),\qquad (x,y)\in G\tag{1.4.87}$$

$$u|_{\partial G} = f(x,y), \qquad (x,y) \in \partial G \tag{1.4.88}$$

其中 G 为$(l_x \times l_y)$的矩形,∂G 为其四条边. 下面来证明上述定解问题的解不惟一, 为此只要证明相应的齐次问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in G; \qquad u|_{\partial G} = 0 \tag{1.4.89}$$

存在非零解. 令 $u(x,y)$有分离变数形式

$$u(x,y) = \varphi(x)\psi(y) \tag{1.4.90}$$

代入式(1.4.89)

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} \tag{1.4.91}$$

两边恒等的条件是等于同一常数(设为 $-k^2$), 于是可得

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0; \qquad \psi'' + k^2\psi = 0 \tag{1.4.92}$$

上式的通解是

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A\sin kx + B\cos kx \\ \psi(x) &= C\sin ky + D\cos ky \end{aligned} \tag{1.4.93}$$

由(1.4.89)第二式,$B = D = 0$,而

$$k = \frac{n\pi}{l_x}; \qquad k = \frac{m\pi}{l_y} \qquad (n, m = 1,2,\cdots) \tag{1.4.94}$$

因此齐次问题有非零解

$$u(x,y) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{l_y}\right) \tag{1.4.95}$$

其中 n 和 m 还必须满足自洽条件

$$\frac{l_y}{l_x} = \frac{m}{n}, \qquad (n, m = 1,2,\cdots) \tag{1.4.96}$$

上式意味着当 l_y/l_x 为有理数时, 定解问题式(1.4.87)和(1.4.88)的解不惟一, 并且存在无穷多解; 当 l_y/l_x 为无理数时, 解惟一.

例 1.4.3 热传导方程对负时间的不稳定性, 考虑定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in (0,l), \qquad t < 0 \tag{1.4.97}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0; \qquad u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{1.4.98}$$

用分离变数不难求得上述问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (t < 0) \\ A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.4.99}$$

若初值条件有扰动

$$\delta\varphi = \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

(k 为正整数)，则解的变化为

$$\delta u = \frac{1}{k^2}\exp\left(-\frac{k^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{1.4.100}$$

显然，由于 $t<0$，当 k 充分大时 $\delta\varphi$ 可任意小，但 δu 却可任意大. 因此热传导问题对负时间是不稳定的. 物理上，热传导方程描述不可逆过程，不可能根据 $t=0$ 时刻的状态反推 $t<0$ 的状态. 从方程本身的形式来看，由于热传导方程仅出现 t 的一阶偏导，故对时间反演不具有不变性. 波动方程则出现 t 的二阶偏导，对时间反演具有不变性，可从 $t=0$ 的波动状态反推知 $t<0$ 的波动状态，但是如果波动方程包含不可逆的阻尼或耗散项，同样不具有时间反演不变性.

习　题　一

1.1　求方程

$$(l+x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的双曲型、椭圆型和抛物型区域,并研究它们与参数 l 的相关性.

1.2　求下列方程的标准形式

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$(注意与上题比较，说明一阶项对方程的影响);

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

(d) $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;　　$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

(e) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;　　$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.3　证明两个自变数的二阶常系数椭圆型或双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu = f$$

经过函数变换

$$u(x,y) = \exp(ax+by)v(x,y)$$

能化成简单形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cv = g$$

并求 a 和 b.

1.4　证明方程

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在单位圆 $x^2+y^2=1$ 的附近是混合型的.

1.5 证明函数

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}$$

在锥面 $x^2+y^2=t^2$ 内部满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

1.6 证明球面波问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(r);\qquad u_t\big|_{t=0}=\psi(r)$$

的解为

$$u(r,t)=\frac{1}{2r}\{(r-at)\varphi(r-at)+(r+at)\varphi(r+at)\}+\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\rho\psi(\rho)\mathrm{d}\rho$$

提示:可利用 Poisson 公式或直接在球坐标中求解. 利用该公式求当

$$\varphi(r)=\begin{cases}u_0, & r<R\\ 0, & r>R\end{cases};\qquad \psi(r)=0$$

时的解.

1.7 以下列问题为例,说明双曲型方程的极值原理不成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\qquad x\in(0,\pi),\qquad t>0$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\sin x;\qquad u_t(x,t)\big|_{t=0}=\sin x$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u(x,t)\big|_{x=\pi}=0.$$

1.8 考虑方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+cu=0,\qquad (c>0)$$

及正方形区域

$$\Omega: x,y\in\left[-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{c}},\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{c}}\right]$$

证明函数

$$u(x,y)=\cos\sqrt{\frac{c}{2}}x\cos\sqrt{\frac{c}{2}}y$$

满足上述方程,由此说明对上述方程极值原理不成立.

1.9 求解 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\qquad t>0$$

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z)$$

提示: 作变换 $x=\sqrt{a}x'$; $y=\sqrt{b}y'$; $z=\sqrt{c}z'$.

1.10　若方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu, \qquad (c > 0)$$

的解 u 的绝对值在矩形 $R:(\alpha \leqslant x \leqslant \beta; 0 \leqslant t \leqslant T)$ 的侧边 $x = \alpha$ 和 $x = \beta$ 上不超过 B，而在底面 $t = 0$ 上不超过 M，证明解在 R 内满足不等式

$$|u(x,t)| \leqslant \max(Me^{ct}, B)$$

由此证明混合问题的惟一性和稳定性．提示：作变换 $u(x,t) = e^{ct}v(x,t)$，对 $v(x,t)$ 利用极值原理．

第二章　本征值问题和分离变数法

分离变数法是解定解问题的基本方法，其关键是一定函数类按某一正交函数系展开，以及求解本征值问题. 本章 2.1 节介绍 Hilbert 空间(主要是 $L^2[a,b]$ 空间)及完备的正交归一函数系概念. 介绍若干完备的正交归一系，如定义在$[-1,1]$区间上的 Legendre 多项式集和定义在单位球面上的球谐函数集，其方法直接利用著名的 Weierstrass 定理,然后再回到它们满足的特殊微分方程. 2.2 节介绍 Hermite 算子及其本征值问题,讨论 Sturm-Liouville 系统,是本章的核心. 2.3 节介绍分离变数法求有限区域内定解问题，是 2.2 节内容的直接应用,所举例子基本上限于直角坐标系. 2.4 节则是 2.2 节和 2.3 节的进一步展开，介绍正交曲线坐标系中 Laplace 方程和本征方程的分离变数. 最后在 2.5 节介绍无穷区域(或半无穷区域)定解问题的分离变数，由于此时本征值构成连续谱，正交函数展开中级数求和变成积分，故必须运用积分变换技术 .

2.1　Hilbert 空间及完备的正交函数集

利用 Hilbert 空间的概念来处理数学物理中出现的“特殊函数”，如 Legendre 多项式和球谐函数,将是十分方便的. 因此本节首先介绍 Hilbert 空间的概念，特别是元素为区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上平方可积函数组成的 Hilbert 空间 $L^2[a,b]$，然后讨论一定的函数类如何按完备的正交归一函数集合展开问题.

2.1.1　Hilbert 空间和函数空间 $L^2[a,b]$

根据泛函分析理论，完备的内积空间称为**Hilbert 空间**. 所谓**内积空间**是指定义在数域 F 上的向量空间L,对它的每一对向量 u 和 v 可以定义内积(u,v)满足下述公理:

(1) **正定性**: $(u,u)\geqslant 0$ 当且仅当 $u=0$ 时等号成立;

(2) **共轭对称性**:$(u,v)=(v,u)^*$;

(3) **线性**:$(au+bv,w)=a(u,w)+b(v,w)$.

内积的引进使我们可以定义向量之间的“角度”，从而可讨论向量之间的正交性. 所谓“完备”则指 L 中的每一 Cauchy 序列都收敛于 L 中的一个元素. 不完备性的一个例子是有理数集，序列

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}$$

是有理数集，但收敛到无理数 e. 现在我们特别感兴趣的是由元素为 $[a,b]$ 上的平方可积复值函数组成的函数空间，称为 $L^2[a,b]$. 下面来证明这个函数空间是一个完备的内积空间，因此是一个Hilbert空间，证明分三步：

(1) 首先，证明 $L^2[a,b]$ 是一个向量空间：在函数空间中，两向量 f_1 和 f_2 的加法按自然规律定义为逐点相加

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

而与复标量 a 乘法定义为

$$af \equiv af(x)$$

可以证明两个平方可积的函数之和仍是平方可积的. 事实上，因为

$$|f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 + 2\mathrm{Re}(f_1 \cdot f_2) \leqslant |f_1|^2 + |f_2|^2 + 2|f_1 \cdot f_2|$$
$$\leqslant |f_1|^2 + |f_2|^2 + 2|f_1| \cdot |f_2| \leqslant 2(|f_1|^2 + |f_2|^2)$$

两边积分表明，平方可积函数 f_1 和 f_2 之和仍是平方可积的，因此函数空间 $L^2[a,b]$ 是一个向量空间.

(2) 其次，定义函数空间 $L^2[a,b]$ 上 f_1 和 f_2 的内积

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x \tag{2.1.1}$$

由上式定义的内积显然满足公理(1)～(3)，因此 $L^2[a,b]$ 是一个内积空间.

(3) 最后，必须证明 $L^2[a,b]$ 的完备性，根据 Risez-Fisher 定理，设 $f_1(x)$，$f_2(x)$，… 是 $L^2[a,b]$ 中的元素，若

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \| f_n - f_m \|^2 \equiv \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^2 \mathrm{d}x \to 0 \tag{2.1.2}$$

则存在一平方可积函数 $f(x)$，而序列 $f_n(x)$“平均”收敛于它，即存在 $f(x) \in L^2[a,b]$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 \mathrm{d}x = 0 \tag{2.1.3}$$

综上所述，函数空间 $L^2[a,b]$ 是完备的内积空间，因此它是一个 Hilbert 空间，以后将直接称这个函数空间为 Hilbert 空间. 根据内积的定义式(2.1.1)可以定义函数系 $\{f_i\}$ 的正交性和归一性，若 f_i 和 f_j 满足

$$(f_i, f_j) \equiv \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) \mathrm{d}x = \delta_{ij} \tag{2.1.4}$$

则称函数系 $\{f_i\}$ 是正交归一的. 另一种常用的正交归一性定义为上式的推广

$$(f_i, f_j) \equiv \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) \rho(x) \mathrm{d}x = \delta_{ij} \tag{2.1.5}$$

其中权函数 $\rho(x)>0$，这时称$\{f_i\}$带权 $\rho(x)$正交归一.

我们的问题是：(1) 什么样的函数集在 Hilbert 空间中起基函数作用？(2) 对任一函数 $f(x)$，如何用基函数精确地逼近它？

2.1.2　完备的正交归一函数集

假如有一 Hilbert 空间中的正交归一函数集$\{f_i\}$，问题是$\{f_i\}$能否作为 Hilbert 空间中的基函数？即 Hilbert 空间中的任一元素 $f(x)$能否表示成$\{f_i\}$的线性组合

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x) \tag{2.1.6}$$

且上式右边的无穷级数在$[a,b]$中每一点 x 上收敛于$f(x)$，称这种收敛为**逐点收敛**. 如果式(2.1.6)成立，称正交归一集$\{f_i\}$是完备的正交归一函数集，且当式(2.1.6)右边一致收敛于 $f_{(x)}$时称 c_i 为**广义 Fourier 系数**，或展开系数. 这时 c_i 很容易求得

$$(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (f_n, f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{ni} = c_n \tag{2.1.7}$$

但是要求式(2.1.6)一致收敛于 $f(x)$过于苛刻了. 事实上，有可能找不到满足上述完备性要求的正交归一集，因为式(2.1.6)必须对 $L^2[a,b]$中所有 $f(x)$都成立，这一点可以从 Fourier 级数展开理论中得到简单的说明，定义三种收敛性概念，即：**逐点收敛、一致收敛**和**平均收敛**. 假如 $f(x)$是以 2π 为周期的函数，则可以得到下列定理：

(1) 如果 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上分段光滑，则有**逐点收敛定理**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] \tag{2.1.8}$$

上式对具有第一类间断点的 $f(x)$意义很明显，如图 2.1.1(a)；

(2) 如果 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续，$f'(x)$ 分段连续并且 $f(-\pi)=f(\pi)$，则有**一致收敛定理**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} = f(x) \tag{2.1.9}$$

显然，要求左式一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$连第一类间断点都不允许，如图 2.1.1(b)；

(3) 如果 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上分段连续，则平均收敛定义为

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}\right|^2 dx = 0 \tag{2.1.10}$$

上三式中展开系数为

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

三种收敛性的定义可由图 2.1.1 简单说明之. 可见平均收敛对 $f(x)$要求要宽得多，特点是允许 $f(x)$具有图 2.1.1(c)所示的奇性(测度为零，对积分不贡献).

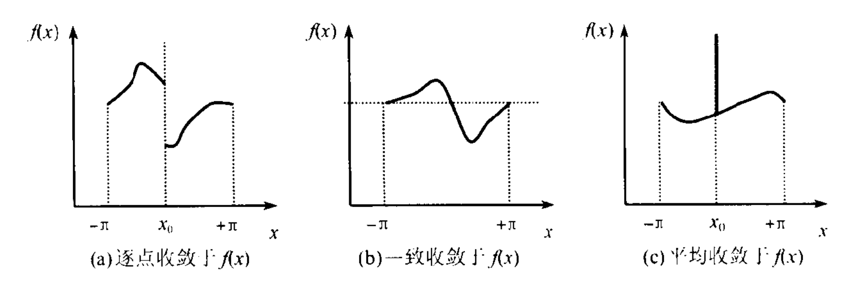


图 2.1.1　三种不同的收敛特性

由此重新定义 $L^2[a,b]$中正交归一集的完备性:若对任一 $f(x)\in L^2[a,b]$都可有正交归一函数集在平均收敛的意义上逼近

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^n a_if_i\right|^2\mathrm{d}x=0 \tag{2.1.11}$$

则称$\{f_i\}$是定义在 $L^2[a,b]$上的**完备函数集**. 下面求式(2.1.11)意义下展开系数 a_i: 记非负量 M_n

$$M_n=\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^n a_if_i\right|^2\mathrm{d}x\geqslant 0 \tag{2.1.12}$$

其中$\{f_i\}$是一个正交归一集合，且 $f\in L^2[a,b]$. 我们要求 a_i 使 M_n 极小

$$\begin{aligned}M_n&=\int_a^b\left(f\cdot f^*-\sum_{i=1}^n a_if^*\cdot f_i-\sum_{i=1}^n a_i^*f\cdot f_i^*+\sum_{i,j=1}^n a_i^*a_jf_i^*\cdot f_j\right)\mathrm{d}x\\&=(f,f)-\sum_{i=1}^n a_ic_i^*-\sum_{i=1}^n a_i^*c_i+\sum_{i,j=1}^n a_i^*a_j\delta_{ij}\end{aligned}$$

其中 $c_i\equiv(f,f_i)$，上式加上和减去 $\sum c_i^*c_i$，则有

$$M_n=(f,f)+\sum_{i=1}^n|a_i-c_i|^2-\sum_{i=1}^n|c_i|^2\geqslant 0 \tag{2.1.13}$$

显然 M_n 极小的条件是

$$a_i=c_i=\int_a^b f(x)f_i^*(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.14}$$

这时有

$$M_n=\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^n a_if_i(x)\right|^2\mathrm{d}x=(f,f)-\sum_{i=1}^n|c_i|^2\geqslant 0 \tag{2.1.15}$$

亦即

$$(f,f) \geqslant \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \tag{2.1.16}$$

上式称为 **Bessel 不等式**. 当 f_i 是完备系时，根据式(2.1.12), $\lim M_n = 0(n \to \infty)$，因此有

$$\int_a^b |f|^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \tag{2.1.17}$$

上式称为 **Parseval 等式或完备关系式**. 因此在平均收敛意义下有展开关系

$$f(x) \cong \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x);\ a_i = \int_a^b f(x) \cdot f_i^*(x) \mathrm{d}x \tag{2.1.18}$$

当第一式右边一致收敛时等号成立. 下面作几点说明：

(1) 对带权 $\rho(x) > 0$ 正交归一集，平均收敛定义为

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right|^2 \rho(x) \mathrm{d}x = 0; \tag{2.1.19}$$

(2) 完备关系式(2.1.17)可用另一关系式表示，由式(2.1.18)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^b f(x') f_i^*(x') \mathrm{d}x' \right] f_i(x) \\ &= \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{\infty} f_i^*(x') f_i(x) \right] f(x') \mathrm{d}x' \end{aligned}$$

成立条件为

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^*(x') f_i(x) = \delta(x' - x) \tag{2.1.20}$$

称作**封闭关系式**. 有关右边 δ 函数的详细讨论见第三章.

上述我们假定已存在一个正交归一的函数系，接着的问题是在任何区间 $[a,b]$ 上是否确实存在一个完备的正交归一集？如果存在，如何找到它的表达式？著名的 Weierstrass 定理告诉我们，可以建立 x 的幂次多项式序列，使它一致收敛于有限闭区间 $[a,b]$ 上连续的任意函数，由此我们可以解决刚才提出的问题.

Weierstrass 定理：若 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上**连续**，则存在一个多项式序列 $P_n(x)$，在 $[a,b]$ 上一致地

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \varphi(x) \tag{2.1.21}$$

Weierstrass 定理表明，幂次函数系 $[1, x, \cdots, x^n, \cdots]$ 构成 $[a,b]$ 上连续函数类，即 $C[a,b]$ 函数在一致收敛意义下的完备系. 但是 $L^2[a,b]$ 中的元素只要求在 $[a,b]$ 上平方可积，不一定连续. 因此，在一致收敛的意义上 $[1, x, \cdots, x^n, \cdots]$ 并不构成 $L^2[a,b]$ 上的完备系. 但我们来说明，在平均收敛意义下，$[1, x, \cdots, x^n, \cdots]$ 构成 $L^2[a,b]$ 中的完备系. 首先指出(证明略) $L^2[a,b]$ 中任一函数 $f(x)$，可用连续

函数以任意精度平均逼近，即给定任意小 ε 总存在 $\varphi \in C[a,b]$

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon$$

又 $f(x) - P_n(x) = (f - \varphi) + [\varphi - P_n(x)]$，因此

$$\int_a^b |f - P_n(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_a^b |(f - \varphi) + (\varphi - P_n)|^2 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_a^b |f - \varphi|^2 \mathrm{d}x + \int_a^b |\varphi - P_n|^2 \mathrm{d}x$$

由式(2.1.21)即得

$$\int_a^b |f - P_n|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon$$

亦即 $L^2[a,b]$上任意函数 $f(x)$总可以用多项式序列 $P_n(x)$来平均逼近．因此，在平均收敛意义下$[1,x,\cdots,x^n,\cdots]$构成 $L^2[a,b]$的完备系(但不正交和归一)．

我们不详细证明 Weierstrass 定理，仅给一粗略的说明．首先定义函数序列

$$\delta_n(x) = \begin{cases} C_n(1 - x^2)^n, & 0 \leqslant |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \tag{2.1.22}$$

其中 C_n 由归一化条件决定

$$\int_{-1}^{+1} \delta_n(x) \mathrm{d}x = 1$$

可以证明当 $n \to \infty$ 时 $C_n \sim n$．事实上，令积分

$$I(n) = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \mathrm{d}x$$

通过分部积分，可得到递推关系

$$I(n) = x(1 - x^2)^n \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (-2x) n (1 - x^2)^{n-1} x \mathrm{d}x$$

$$= -2n \int_{-1}^{+1} (1 - x^2 - 1)(1 - x^2)^{n-1} x \mathrm{d}x = -2n[I(n) - I(n-1)]$$

因此

$$I(n) = \frac{2n}{2n+1} I(n-1)$$

当 $n = 0$ 时，$I(0) = 2$

$$I(n) = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} \cdot \cdots \cdot 2 = \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

当 n 很大时，利用 Stirling 公式 $\ln n! \approx n \ln n - n$，可得到

$$\ln I(n) \approx \ln(2n)! - \ln(2n+1)!$$

即

$$I(n) \approx \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}$$

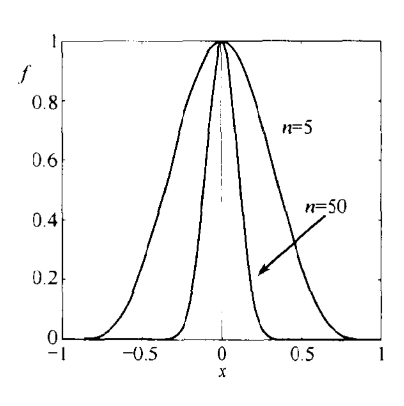


图 2.1.2 不同 n 函数形状

函数 $f(x)=(1-x^2)^n$ 随 n 变化的形式如图 2.1.2. 因此可望 $\delta_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时具有 $\delta(x)$(见第二章讨论)函数特性,事实上可证明

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\delta_n(x) \tag{2.1.23}$$

不失一般性设$[a,b]$为$[0,1]$, 这总可通过变换 $z=(x-a)/(b-a)$来实现. 设

$$P_n(x)=\int_{-1}^{+1}f(x+t)\delta_n(t)\mathrm{d}t \tag{2.1.24}$$

显然由 $\delta_n(x)$的 δ 函数特性

$$\lim_{n\to\infty}P_n=f(x) \tag{2.1.25}$$

另一方面, 对式(2.1.24)右边作积分变换 $t'=t+x$ 则

$$P_n(x)=\int_{x-1}^{x+1}f(t)\delta_n(t-x)\mathrm{d}t$$

因 $f(x)$定义在$[0,1]$上, 当 x 位于区域$[0,1]$以外可以定义 $f(x)\equiv 0$, 故上式为

$$P_n(x)=\int_0^1 f(t)\delta_n(t-x)\mathrm{d}t=C_n\int_0^1 f(t)[1-(t-x)^2]^n\mathrm{d}t \tag{2.1.26}$$

显然,$P_n(x)$是 x 的多项式, 因此 $f(x)$确可用多项式序列 $P_n(x)$来平均逼近. 严格的证明则要求 $f(x)$是$[0,1]$上的连续函数, 这时 $P_n(x)$一致收敛于 $f(x)$.

最后,指出 Weierstrass 定理可推广到多变量函数: 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对于在$[a_i,b_i]$($i=1,2,\cdots,n$)中每一个变量均连续, 则 f 可用多项式来逼近

$$P_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\delta_n(t_1-x_1)\delta_n(t_2-x_2)\cdots$$
$$\delta_n(t_n-x_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n$$

利用上述结果, 容易证明三角函数集

$$T_n(x)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\mathrm{i}nx),n=0,\pm 1,\cdots\right\} \tag{2.1.27}$$

是完备的正交归一集. 事实上, 正交性和归一性是显然的, 至于完备性可由二维 Weierstrass 定理推出: 有限区间内连续函数 $g(x,y)$可用函数序列 $g_N(x,y)$

$$g_N(x,y)=\sum_{n,m=0}^{N}a_{nm}(N)x^n y^m \tag{2.1.28}$$

来一致逼近, 即对 x 和 y 一致地

$$\lim_{N\to\infty}g_N(x,y)=g(x,y) \tag{2.1.29}$$

注意：$a_{nm}(N)$是 N 的函数，因此式(2.1.28)不是幂级数展开. 作坐标变换

$$x = r\cos\theta; \qquad y = r\sin\theta \tag{2.1.30}$$

从式(2.1.28)和(2.1.29)

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) \equiv \varphi(r,\theta) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n,m=0}^{N} a_{nm}(N) r^{n+m}\cos^n\theta\sin^m\theta$$

如果把(x,y)的定义域限定在单位圆上，令 $r=1$

$$g(\cos\theta,\sin\theta) \equiv \varphi(\theta) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n,m=0}^{N} a_{nm}(N)\cos^n\theta\sin^m\theta \tag{2.1.31}$$

显然上式要求 $\varphi(\theta)$只能是周期为 2π 的周期函数. 利用 Euler 公式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}); \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

代入式(2.1.31)

$$\varphi(\theta) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n,m=0}^{N} a_{nm}(N)\frac{1}{2^{n+m}i^m}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^m \tag{2.1.32}$$

求和指数可合并，改写成

$$\varphi(\theta) = \lim_{M\to\infty}\varphi_M(\theta) \equiv \lim_{M\to\infty}\sum_{n=-M}^{M}\frac{c_n^M}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta} \tag{2.1.33}$$

上式表明，任意连续函数 $\varphi(\theta)$，只要满足

$$\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$$

则总可用三角函数系式(2.1.27)来一致逼近. 对 $L^2[a,b]$中平方可积函数 $f(x)$，设定义在闭区间$[a,a+2\pi]$，且不一定满足 $f(a)=f(a+2\pi)$，由前面的讨论知，总存在连续函数 $\varphi(x)$使 $\varphi(a)=\varphi(a+2\pi)$并且

$$\int_a^{a+2\pi}|f(x) - \varphi(x)|^2 dx < \varepsilon$$

因此，在$[a,a+2\pi]$上一致收敛于 $\varphi(x)$的序列 $\varphi_n(x)$平均收敛于 $f(x)$，于是三角函数系式(2.1.27)是 $L^2[0,2\pi]$上完备的正交归一集. 在平均逼近意义下存在 Fourier 级数展开

$$f(x) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \tag{2.1.34}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \tag{2.1.35}$$

2.1.3 有限区间上的完备系：Legendre 多项式

根据 Weierstrass 定理$[1,x,\cdots,x^n,\cdots]$构成 $L^2[a,b]$上的一个完备系. 下面我们考虑在区间$[-1,1]$上的完备正交归一多项式集，对区间为$[a,b]$的一般情

况，只要通过适当的变换即可化成区间[-1,1]. 用 Gram-Schmidt 方法来构成正交归一系. 记正交归一集中第 n 个元素为 p_n，且 p_n 是多项式，取 p_0 为常数，即 $p_0=1/2$. 根据 Gram-Schmidt 法取

$$p_1(x) = \frac{1}{\| p_1 \|}[x - a_0 p_0(x)] \tag{2.1.36}$$

其中 a_0 由正交性决定

$$\int_{-1}^{1} p_1(x) \cdot p_0(x) \mathrm{d}x = 0; \qquad a_0 = \int_{-1}^{1} x p_0(x) \mathrm{d}x = 0$$

故 $p_1(x)=\sqrt{3/2}x$，同理取

$$p_2(x) = \frac{1}{\| p_2 \|}[x^2 - a_0 p_0(x) - a_1 p_1(x)] \tag{2.1.37}$$

从正交化条件

$$\int_{-1}^{1} p_0(x) \cdot p_2(x) \mathrm{d}x = 0; \qquad \int_{-1}^{1} p_1(x) \cdot p_2(x) \mathrm{d}x = 0$$

求 a_0 和 a_1 得到

$$p_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1).$$

一般，如果求得前 m 个 $p_0, p_1, p_2, \cdots, p_m$，则可令

$$p_{m+1} = \frac{1}{\| p_{m+1} \|}[x^{m+1} - (a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_m p_m(x)] \tag{2.1.38}$$

由正交化条件

$$\int_{-1}^{1} p_{m+1}(x) \cdot p_i(x) \mathrm{d}x = 0, \qquad (i = 0,1,2,\cdots,m)$$

可求得

$$a_i = \int_{-1}^{1} x^{m+1} p_i(x) \mathrm{d}x \tag{2.1.39}$$

最后可以求得[-1,1]上完备的正交归一多项式集

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{2.1.40}$$

其中 P_n 称为 **Legendre 多项式**，可有 Rodrigue 公式计算

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n. \tag{2.1.41}$$

下面证明 p_n 确是[-1,1]上完备的正交归一系. 首先，完备性由 Weierstrass 定理保证，只要证明式(2.1.40)的正交归一性即可，为此计算

$$\int_{-1}^{1} p_m(x) p_n(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \sqrt{\frac{(2n+1)(2m+1)}{4}} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n$$

$$\cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\frac{(2n+1)(2m+1)}{4}}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m \mathrm{d}x\right]$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n = (\text{一个多项式}) \times (x^2-1)$$

故上下限代入为零，因此

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)\mathrm{d}x = \frac{-1}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\frac{(2n+1)(2m+1)}{4}}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\sqrt{\frac{(2n+1)(2m+1)}{4}}\int_{-1}^{1}(-1)^n(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^m \mathrm{d}x$$

当 $n \neq m$ 时，n 和 m 对称出现，可设 $n > m$，故 $m+n > 2m$

$$\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^{2m} \equiv 0$$

于是当 $m \neq n$ 时，有

$$\int_{-1}^{1} p_m(x) \cdot p_n(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad (m \neq n) \tag{2.1.42}$$

当 $n = m$ 时

$$\int_{-1}^{1}(p_n)^2\mathrm{d}x = \frac{(2n+1)(-1)^n}{2^{2n+1}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n \mathrm{d}x$$

因 $(x^2-1)^n$ 为 $2n$ 次多项式，故

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n \mathrm{d}x = (2n)!$$

代入上式

$$\int_{-1}^{1}(p_n)^2\mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!(-1)^n}{2^{2n+1}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$$

令 $x = \sin\theta$

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x = 2(-1)^n\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta\mathrm{d}\theta = (-1)^n\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

故

$$\int_{-1}^{1}(p_n)^2\mathrm{d}x = 1 \tag{2.1.43}$$

结合式(2.1.42)和(2.1.43)得正交归一性方程

$$\int_{-1}^{1}p_n(x)\cdot p_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm} \tag{2.1.44}$$

进一步可以证明 $p_n(x)$是下列方程的一个解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+n(n+1)y = 0 \tag{2.1.45}$$

由于上式是二阶方程，故存在两个独立解，另一个解称为第二类 Legendre 函数 $Q_n(x)$

$$Q_n(x) = p_n(x)\int_x^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)[p_n(x)]^2} \tag{2.1.46}$$

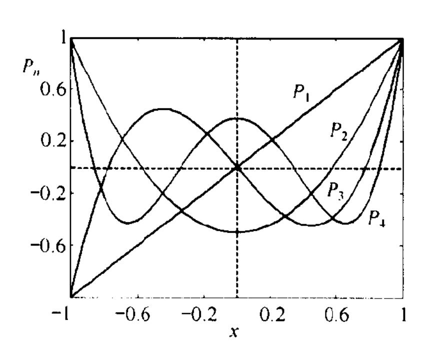


图 2.1.3 前五个 Legendre 多项式

由于 $Q_n(x)$在 $x=\pm1$ 点发散，因此当物理问题包含点 $x=\pm1$ 时，$Q_n(x)$应抛弃，反之，则要考虑. 式(2.1.45)称为 **Legendre 方程**，它可由 Laplace 算子在球坐标下分离变数而得，因此，在求解 Laplace 方程的边值问题中有十分重要的应用，我们将在 2.4 节中详细讨论.

由前面的讨论知，任一 $f(x)\in L^2[-1,1]$，在平均收敛意义下，可展成$\{p_n(x)\}$的广义级数

$$f(x)\cong\sum_{n=0}^{\infty}c_np_n(x) \tag{2.1.47}$$

其中

$$c_n = \int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.48}$$

前五个 Legendre 多项式为

$$P_0(x) = 1;\qquad P_1(x) = x;\qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3-3x);\qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

随 x 的变化见图 2.1.3.

从$\{x^n\}$得到$\{p_n(x)\}$，我们利用了正交归一性定义式(2.1.4). 如果引进权重因子 $\rho(x)\geqslant0$，可得新的多项式集. 例如，若取

$$\rho(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

则多项式集 $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \tag{2.1.49}$$

带权 $\rho(x)$构成 $L^2[-1,1]$上完备的正交系,故对$f(x)$，只要满足

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \rho(x)\mathrm{d}x < \infty \tag{2.1.50}$$

即可展成 $T_n(x)$的广义 Fourier 级数

$$f(x) \cong \sum_{n=0}^{\infty} c_n \bar{T}_n(x) \tag{2.1.51}$$

其中

$$c_n = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\bar{T}_n(x)}{1 - x^2}\mathrm{d}x \tag{2.1.52}$$

$\bar{T}(x)$为完备的正交归一化系

$$\bar{T}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2T_n(x)}{\pi}, & n \neq 0 \\ \dfrac{T_0(x)}{\pi}, & n = 0 \end{cases} \tag{2.1.53}$$

$T_n(x)$称为 Chebyshev(切比雪夫)多项式,前五个表达式为

$$T_0(x) = 1; \qquad T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1; \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

随 x 的变化见图 2.1.4.

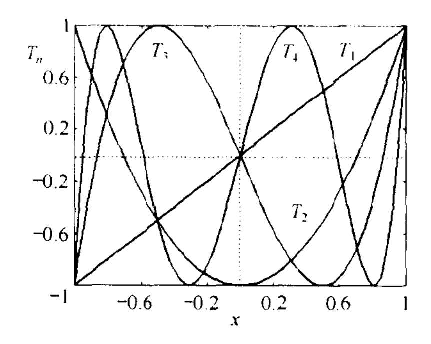


图 2.1.4　前五个 Chebyshev 多项式

2.1.4　单位球面上的完备系：球谐函数

考虑三个变量的 Weierstrass 定理,并限制在单位球面上,可以推出完备的正交归一球谐函数系$\{Y_{lm}(\theta,\varphi)\}$. 根据 Weierstrass 定理,三元函数空间中函数系

$$\{x^t y^u z^v\}, \qquad (t,u,v = 0,1,2,\cdots) \tag{2.1.54}$$

是有限闭空间中的完备系,作线性变换

$$z_3 = z; \qquad z_2 = x - \mathrm{i}y; \qquad z_1 = x + \mathrm{i}y \tag{2.1.55}$$

显然$\{z_1^t z_2^u z_3^v\}$也是完备系，引进球坐标

$$z_3 = r\cos\theta; \qquad z_2 = r\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}; \qquad z_1 = r\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{2.1.56}$$

其中 $\theta\in[0,\pi]$, $r\in[0,\infty]$和 $\varphi\in[0,2\pi]$，由完备系$\{z_1^t z_2^u z_3^v\}$可推出完备系

$$r^{t+u+v}\cos^v\theta\sin^{t+u}\theta e^{i(t-u)\varphi} \tag{2.1.57}$$

如果把变量限定在单位球面上 $r=1$，则有完备系

$$\cos^v\theta\sin^{t+u}\theta e^{i(t-u)\varphi} \tag{2.1.58}$$

引进新的变量 $m=|t-u|$，有关系

$$t>u: m=t-u\rightarrow t+u=m+2u$$

$$t<u: m=u-t\rightarrow t+u=m+2t$$

即

$$t+u=m+\min\begin{Bmatrix}2u\\2t\end{Bmatrix}=m+2k;\qquad t-u=\pm m$$

故有

$$\sin^{t+u}\theta=\sin^m\theta\sin^{2k}\theta=\sin^m\theta(1-\cos^2\theta)^k$$

因此完备系式(2.1.58)可变成完备系

$$\{\cos^v\theta(1-\cos^2\theta)^k\sin^m\theta e^{\pm im\varphi}\} \tag{2.1.59}$$

归并 $\cos^v\theta(1-\cos^2\theta)^k$ 中同次幂，可推出完备系

$$\{\cos^n\theta\sin^m\theta e^{\pm im\varphi}\} \tag{2.1.60}$$

其中 m 和 n 为正整数. 对求和指标作一说明：由上推导知 $\cos^n\theta$ 的最高次为

$$v+2k=v+\min\begin{pmatrix}2u\\2t\end{pmatrix}=(v+t+u)-m$$

令 $l=v+t+u$ 则 $n=v+2k=l-m>0$，因此 $m\leqslant l$，于是从式(2.1.60)可推得完备系

$$\{\cos^{l-m}\theta\sin^m\theta e^{\pm im\varphi};\qquad (m\leqslant l)\} \tag{2.1.61}$$

但是式(2.1.61)并不正交归一，可用 Gram-Schmidt 正交化方法来求得. 记这个完备的正交归一系为 $Y_{l\pm m}(\theta,\varphi)$，显然 $Y_{00}=1/\sqrt{4\pi}$. 取 $l=1$ 则 $m=0$ 和 1，令

$$Y_{10}=a_1\cos\theta+a_2;\qquad Y_{11}=a_3e^{i\varphi}\sin\theta;\qquad Y_{1-1}=a_4e^{-i\varphi}\sin\theta$$

其中 a_1、a_2、a_3 和 a_4 由正交归一条件决定

$$\iint_\Omega Y_{00}Y_{1\pm m}d\Omega=0;\qquad \iint_\Omega|Y_{1\pm m}|^2d\Omega=1,\qquad (m=0,1)$$

最后可得前几个 $Y_{l\pm m}(\theta,\varphi)$的表达式

$$Y_{00}=\sqrt{\frac{1}{4\pi}};\qquad Y_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta \tag{2.1.62}$$

$$Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta;\qquad Y_{1-1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\varphi}\sin\theta \tag{2.1.63}$$

函数 $Y_{l\pm m}(\theta,\varphi)$称为**归一化球谐函数**. 改变表达式 $e^{\pm im\varphi}(m\leqslant l)\rightarrow e^{im\varphi}$($m$ 可正可负且$|m|\leqslant l$)，球谐函数可表达为

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \qquad (2.1.64)$$

其中$|m|\leqslant l$. $P_l^{|m|}(x)$称为**连带 Legendre 函数**

$$P_l^{|m|}(x)=(1-x^2)^{|m|/2}\frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}x^{|m|}}P_l(x)$$

容易证明式(2.1.64)确是正交归一的函数集

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad (2.1.65)$$

其中$|m|\leqslant l$和$|m'|\leqslant l'$. 因此，球面上任一平方可积的函数$f(\theta,\varphi)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|f(\theta,\varphi)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi<\infty$$

都可用$Y_{lm}(\theta,\varphi)$来作展开

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi);\qquad a_{lm}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{lm}^*(\theta,\varphi)f(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \qquad (2.1.66)$$

从式(2.1.20)可得完备性关系

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta',\varphi')=\frac{1}{\sin\theta'}\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi') \qquad (2.1.67)$$

注意：$P_l^{|m|}(x)$对同一个m而不同的l组成的函数集也构成完备系且正交归一

$$f(x)=\sum_{l\geqslant|m|}^{\infty}f_lP_l^{|m|}(x);\qquad f_l=\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int_{-1}^{1}f(x)P_l^{|m|}(x)\mathrm{d}x \qquad (2.1.68)$$

最后指出，连带 Legendre 函数满足连带 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \qquad (2.1.69)$$

在求解 Laplace 方程的边值问题中有十分重要的应用，我们将在 2.4 节中详细讨论.

2.2　本征值问题和 Sturm-Liouville 系统

本征值问题是分离变数法求解数学物理方程的核心，因而也是本章的主要内容. 本节首先介绍 Hermite 算子(主要讨论微分算子)和正算子的概念，以及 Hermite 算子的本征值特性. 然后讨论一类十分重要的本征值问题，即 Sturm-Liouville 系统，特别是 Sturm-Liouville 多项式系统.

2.2.1　Hermite 算子及本征值问题

Hilbert 空间中的线性算子 **H**(包括微分算子和积分算子，后者在第五章讨论)

的共轭算子 $\mathbf{H}^+$ 定义为

$$(\mathbf{H}\psi_1,\psi_2) = (\psi_1,\mathbf{H}^+\psi_2) \tag{2.2.1}$$

其中 ψ 为 Hilbert 空间中任一矢量. 对 $L^2[a,b]$空间，上式可写成

$$\int_G (\mathbf{H}\psi_1)^* \psi_2 \mathrm{d}\tau = \int_G \psi_1^* \mathbf{H}^+ \psi_2 \mathrm{d}\tau \tag{2.2.2}$$

如果 $\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}$ 则称 $\mathbf{H}$ 为**自厄算子**或者 **Hermite 算子**，有关系式

$$\int_G (\mathbf{H}\psi_1)^* \psi_2 \mathrm{d}\tau = \int_G \psi_1^* \mathbf{H}\psi_2 \mathrm{d}\tau \tag{2.2.3}$$

或者

$$(\mathbf{H}\psi_1,\psi_2) = (\psi_1,\mathbf{H}\psi_2) \tag{2.2.4}$$

下面主要讨论 Hermite 算子. 算子 $\mathbf{H}$ 的本征值问题即是求下列方程的非零解

$$\mathbf{H}\psi = \lambda\psi \tag{2.2.5}$$

上式称为**本征方程**. $\psi=0$ 总是一个解，这个解称为平凡解，而我们感兴趣的是式(2.2.5)的非平凡解. 并不是对一切 λ，非平凡解总存在. 一般，λ 只能取某些特定的值 λ_n，式(2.2.5)才有相应的非零解 ψ_n，λ_n 称为算子 $\mathbf{H}$ 的**本征值**. 与 λ_n 相对应的非零解 ψ_n 称为本征值 λ_n 相对应的**本征函数**. 如果给定一个 λ_n，只有一个 ψ_n 与之对应，则称 λ_n 是**非简并的**，反之，如果给定一个 λ_n 有 l 个线性独立的解 $\psi_n^i(i=1,2,\cdots,l)$同时满足式(2.2.5)则称 λ_n 是 l 度简并的. λ_n 的全体$\{\lambda_n\}$称为**本征谱**. 如果 λ_n 是可数的，称$\{\lambda_n\}$为**分立谱**，否则称为**连续谱**.

下面我们来讨论 $\mathbf{H}$ 的本征值及本征函数的两个重要性质：

(1) Hermite 算子 $\mathbf{H}$ 的本征值 λ_n 都是实数；

(2) 对应不同本征值之本征函数彼此正交.

证明是容易的：设与本征值 λ_n 与 λ_m 相应的本征函数分别为 ψ_n 和 ψ_m，即有

$$\mathbf{H}\psi_m = \lambda_m\psi_m; \qquad \mathbf{H}\psi_n = \lambda_n\psi_n \tag{2.2.6}$$

首先，我们总可以使 ψ_m 和 ψ_n 归一化

$$\int_G \psi_m^*\psi_m \mathrm{d}\tau = \int_G \psi_n^*\psi_n \mathrm{d}\tau = 1 \tag{2.2.7}$$

(2.2.6)第一式两边取内积

$$\lambda_m = (\psi_m,\mathbf{H}\psi_m) \tag{2.2.8}$$

取复共轭，由内积的性质得

$$\lambda_m^* = (\mathbf{H}\psi_m,\psi_m) \tag{2.2.9}$$

而 $\mathbf{H}$ 是 Hermite 算子，故由定义式(2.2.4)得

$$\lambda_m = \lambda_m^* \tag{2.2.10}$$

因此 λ_m 为实数. 下面证明正交性：以 ψ_n 和 ψ_m 分别取式(2.2.6)第一和二式两边的内积

$$\lambda_m(\psi_n,\psi_m) = (\psi_n,\mathbf{H}\psi_m);\qquad \lambda_n(\psi_m,\psi_n) = (\psi_m,\mathbf{H}\psi_n) \tag{2.2.11}$$

第二式两边取复共轭，并利用 $\lambda_n=\lambda_n^*$

$$\lambda_n(\psi_n,\psi_m) = (\mathbf{H}\psi_n,\psi_m) \tag{2.2.12}$$

利用 **H** 的 Hermite 性，上式减去(2.2.11)第一式应有

$$(\lambda_n-\lambda_m)(\psi_n,\psi_m) = 0 \tag{2.2.13}$$

因 $\lambda_n\neq\lambda_m$，故 $(\psi_n,\psi_m)=0$，即 ψ_n 与 ψ_m 正交.

一类十分重要的算子是所谓**正算子**，定义如下：如果对一切 **H** 作用的函数(称为允许函数类) ψ 均有

$$\frac{(\psi,\mathbf{H}\psi)}{\|\psi\|^2} > 0 \tag{2.2.14}$$

则算子 **H** 称为**正算子**. 由式(2.2.5)两边以 ψ 取内积得到

$$\lambda = \frac{(\psi,\mathbf{H}\psi)}{\|\psi\|^2}$$

因此，正算子意味着算子 **H** 的本征值都大于零. 如果 **H** 是 Hermite 算子，式(2.2.14)可写成

$$\frac{(\mathbf{H}\psi,\psi)}{\|\psi\|^2} > 0 \tag{2.2.15}$$

正算子的意义可在处理热传导方程时看出(见 2.3 节). 下面列举几个 Hermite 算子的例子.

(1) 动量算子

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\qquad x\in(-\infty,\infty);\qquad \varphi\in L^2(-\infty,\infty) \tag{2.2.16}$$

显然

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^*\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\varphi_1^*\varphi_2\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}x}\right)^*\mathrm{d}x \tag{2.2.17}$$

对平方可积函数：φ_1 和 $\varphi_2\to0$(当 $x\to\pm\infty$)，于是有 $(\mathbf{H}\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_1,\mathbf{H}\varphi_2)$，故 **H** 在 $(-\infty,+\infty)$ 区间上，对平方可积函数类是 Hermite 算子.

本征方程为

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \lambda\psi,\qquad x\in(-\infty,\infty)$$

故得本征函数

$$\psi_\lambda = A_\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \tag{2.2.18}$$

λ 可取任意值，因此 **H** 的本征值构成连续谱. 对连续谱，归一化条件式(2.2.7)已不再适用，而应归一化到 δ 函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\lambda\psi_{\lambda'}^*\mathrm{d}x = \delta(\lambda-\lambda')$$

因此取 $A_\lambda = 1/\sqrt{2\pi}$. 注意:本例中 $\mathbf{H}$ 的本征函数不是平方可积的.

(2) 一维动能算子

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \varphi \in L^2(0,l) \text{ 且满足 } \varphi(0) = \varphi(l) = 0$$

显然

$$(\varphi_1, \mathbf{H}\varphi_2) = -\int_0^l \varphi_1^* \frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = -\int_0^l \varphi_2 \frac{\mathrm{d}^2\varphi_1^*}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = (\mathbf{H}\varphi_1, \varphi_2)$$

因此 $\mathbf{H}$ 在函数类 $\varphi \in L^2(0,l)$ 且 $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ 中是 Hermite 的. 本征方程为

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = \lambda\varphi; \qquad \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \tag{2.2.19}$$

求得本征函数和相应的本征值为

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right); \qquad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \qquad (n = 1,2,\cdots) \tag{2.2.20}$$

由于

$$(\mathbf{H}\varphi, \varphi) = -\int_0^l \varphi \frac{\mathrm{d}^2\varphi^*}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = \int_0^l \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|^2 \mathrm{d}x > 0$$

故 $\mathbf{H}$ 是正算子. 事实上，由式(2.2.20)，本征值 $\lambda_n > 0$ 恒成立.

(3) Laplace 算子 $\mathbf{H} = -\nabla^2$，函数类 φ 满足

$$\left(\alpha\varphi + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0 \tag{2.2.21}$$

$\mathbf{H}$ 定义在有限闭空间 G 内,G 的边界为∂G. 进一步要求在 G 内 $\varphi \in C^2$,而在∂G 上 $\varphi \in C^1$，于是有 Green 公式

$$\int_G (\varphi_1^* \nabla^2\varphi_2 - \varphi_2 \nabla^2\varphi_1^*)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G}\left(\varphi_1^* \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varphi_2\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{2.2.22}$$

由式(2.2.21)

$$\left(\alpha\varphi_1^* + \beta\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0; \qquad \left(\alpha\varphi_2 + \beta\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0 \tag{2.2.23}$$

因 α 与 β 不同时为零，故

$$\left(\varphi_1^* \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varphi_2\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0$$

因此

$$(\varphi_1, \mathbf{H}\varphi_2) = -\int_G \varphi_1^* \nabla^2\varphi_2\mathrm{d}\tau = -\int_G \varphi_2 \nabla^2\varphi_1^*\mathrm{d}\tau = (\mathbf{H}\varphi_1, \varphi_2)$$

故在边界条件式(2.2.21)下,$\mathbf{H}$ 是 Hermite 的. 进一步

$$(\varphi, \mathbf{H}\varphi) = -\int_G \varphi^* \nabla^2\varphi\mathrm{d}\tau = \int_G |\nabla\varphi|^2\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G}\varphi^* \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

利用式(2.2.21)得到

$$(\varphi,\mathbf{H}\varphi)=\int_G|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}\tau+\begin{cases}\iint_{\partial G}\dfrac{\alpha}{\beta}|\varphi|^2\mathrm{d}S,\beta\neq 0\\\iint_{\partial G}\dfrac{\beta}{\alpha}\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^2\mathrm{d}S,\alpha\neq 0\end{cases}$$

如果 $\beta/\alpha\geqslant 0$ 或 $\alpha/\beta\geqslant 0$，则有

$$(\varphi,\mathbf{H}\varphi)>0$$

故在条件 $\beta/\alpha\geqslant 0$ 或 $\alpha/\beta\geqslant 0$ 下，$\mathbf{H}=-\nabla^2$是正算子．

(4) Legendre 算子

$$\mathbf{H}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right],\qquad x\in[-1,1]$$

是正的 Hermite 算子．事实上

$$(\varphi_1,\mathbf{H}\varphi_2)=\int_{-1}^1\varphi_1^*\mathbf{H}\varphi_2\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1\varphi_1^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^1(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_1^*}{\mathrm{d}x}\tag{2.2.24}$$

当 $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$ 时

$$(\varphi,\mathbf{H}\varphi)=\int_{-1}^1(1-x^2)\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|^2\mathrm{d}x>0$$

故 $\mathbf{H}$ 是正算子．另一方面

$$\int_{-1}^1\varphi_2^*\mathbf{H}\varphi_1\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\varphi_2^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}x}=\left[\int_{-1}^1(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_1^*}{\mathrm{d}x}\right]^*$$

两边取复共轭并利用式(2.2.24)

$$\int_{-1}^1(\mathbf{H}\varphi_1)^*\varphi_2\mathrm{d}x=(\varphi_1,\mathbf{H}\varphi_2)$$

即

$$(\mathbf{H}\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_1,\mathbf{H}\varphi_2)$$

因此，Legendre 算子是 Hermite 的，其本征方程即为 Legendre 方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x)\right]=n(n+1)P_n(x)\tag{2.2.25}$$

本征值为 $\lambda_n=n(n+1)$，显然$\{\lambda_n\}$构成可数集．注意：本例中本征值是由所谓的**自然边界条件**决定的，即要求 Legendre 方程的解在端点 $x=\pm 1$ 有限，因为端点 $x=\pm 1$ 是 $\mathbf{H}$ 的奇点．

(5) 最后，考虑较为一般的算子

$$\mathbf{H}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})\tag{2.2.26}$$

其中 $p>0,q\geqslant 0,\varphi(\boldsymbol{r})$满足边界条件

$$\left(\alpha\varphi + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\Bigg|_{\partial G} = 0 \tag{2.2.27}$$

且 $\alpha/\beta \geqslant 0$ 或 $\beta/\alpha \geqslant 0$. 可以证明 $\mathbf{H}$ 满足 Green 公式

$$\int_G (\varphi_1^* \mathbf{H}\varphi_2 - \varphi_2\mathbf{H}\varphi_1^*)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})\left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial n} - \varphi_1^*\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

事实上，有矢量恒等式

$$\varphi_1^* \nabla\cdot(p\nabla_\varphi 2) = \nabla\cdot(p\varphi_1^*\nabla\varphi_2) - p(\nabla\varphi_1^*)\cdot(\nabla\varphi) \tag{2.2.28}$$

交换 φ_1^* 与 φ_2 的位置可得类似的公式，两式相减

$$\varphi_1^* \nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla\varphi_2] - \varphi_2\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla\varphi_1^*] = \nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})(\varphi_1^*\nabla\varphi_2 - \varphi_2\nabla\varphi_1^*)]$$

利用 Gauss 公式最后有

$$\begin{aligned}\int_G (\varphi_1^* \mathbf{H}\varphi_2 - \varphi_2\mathbf{H}\varphi_1^*)\mathrm{d}\tau &= -\int_G \nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})(\varphi_1^*\nabla\varphi_2 - \varphi_2\nabla\varphi_1^*)]\mathrm{d}\tau \\ &= -\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})(\varphi_1^*\nabla\varphi_2 - \varphi_2\nabla\varphi_1^*)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \\ &= \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})\left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial n} - \varphi_1^*\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

利用边界条件式(2.2.27)和假定 $p(\boldsymbol{r})>0$，即得 $(\varphi_1, \mathbf{H}\varphi_2) = (\mathbf{H}\varphi_1, \varphi_2)$. 因此，$\mathbf{H}$ 是 Hermite 算子. 进一步由式(2.2.28)

$$\begin{aligned}\int_G (\varphi^*\mathbf{H}\varphi)\mathrm{d}\tau &= \int_G \varphi^*[-\nabla\cdot(p\nabla\varphi) + q\varphi]\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_G [\nabla\cdot(p\varphi^*\nabla\varphi) - p|\nabla\varphi|^2]\,\mathrm{d}\tau + \int_G q|\varphi|^2\mathrm{d}\tau \\ &= \int_G (p|\nabla\varphi|^2 + q|\varphi|^2)\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G} p\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S \\ &= \int_G (p|\nabla\varphi|^2 + q|\varphi|^2)\mathrm{d}\tau + \begin{cases}\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\alpha}{\beta}p|\varphi|^2\mathrm{d}S, & \beta\neq 0 \\ \displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\beta}{\alpha}p\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^2\mathrm{d}S, & \alpha\neq 0\end{cases}\end{aligned}$$

显然当 $p(\boldsymbol{r})>0, q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$ 时，有

$$\int_G (\varphi^*\mathbf{H}\varphi)\mathrm{d}\tau = (\varphi, \mathbf{H}\varphi) > 0$$

故 $\mathbf{H}$ 是正的 Hermite 算子. 如果定义本征方程为

$$\mathbf{H}\varphi = \lambda\rho(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{2.2.29}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{r})>0$，则 φ_i 与 φ_j 正交意味着带权 $\rho(\boldsymbol{r})$ 正交

$$(\varphi_i, \varphi_j) \equiv \int_G \rho(\boldsymbol{r})\varphi_i^*(\boldsymbol{r})\varphi_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = \delta_{ij} \tag{2.2.30}$$

2.2.2 Sturm-Liouville 系统

考虑算子式(2.2.26)和边界条件式(2.2.27)的一维情形

$$\mathbf{L}v \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)v(x) \tag{2.2.31}$$

其中 $x \in (0,l)$，$v(x)$满足边界条件

$$\left[\alpha_1 v(x) - \beta_1 \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\right]\bigg|_{x=0} = 0; \qquad \left[\alpha_2 v(x) + \beta_2 \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\right]\bigg|_{x=l} = 0 \tag{2.2.32}$$

本征值问题为求下列方程的非零解及 λ 的可允许值

$$\mathbf{L}[v(x)] = \lambda\rho(x)v(x), \qquad x \in (0,l) \tag{2.2.33}$$

式(2.2.32)和(2.2.33)称为 **Sturm-Liouville 本征值问题**. 它在分离变数法求解定解问题中经常出现，故我们专门讨论.

如果，(1) $p(x)>0$ 和 $\rho(x)>0$ 以及 $q(x)\geqslant 0$；(2) $p(x)$、$p'(x)$、$\rho(x)$和 $q(x)$在闭区域 $x\in[0,l]$内连续；(3) α_i 与 β_i 不同时为零，则我们称式(2.2.32)和(2.2.33)为**正则** Sturm-Liouville 本征值问题. 反之，如果上述有一个或者几个不满足，如 $p(0)=p(l)=0$，则称式(2.2.32)和(2.2.33)为**奇异** Sturm-Liouville 本征值问题. 式(2.2.25)定义的本征值问题即是一个奇异的 Sturm-Liouville 本征值问题. 奇异 Sturm-Liouville 本征值问题往往在奇异处构成自然边界条件，如要求本征函数有界，则本征值只能取若干值. 我们将结合具体问题讨论这种情况.

显然，这时内积的定义应取

$$(\varphi_1,\varphi_2) = \int_0^l \rho(x)\varphi_1^*(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.34}$$

在开区间 $x\in(0,l)$，$\rho(x)>0$. 下面我们来讨论 Sturm-Liouville 问题本征值及本征函数的普遍特性.

性质 1：对应不同本征值的本征函数相互正交. 证明如下：设(λ_i,λ_j)是两个不同的本征值，分别对应的本征函数是(φ_i,φ_j)则

$$\begin{aligned}\int_0^l(\varphi_i^*\mathbf{L}\varphi_j - \varphi_j\mathbf{L}\varphi_i^*)\mathrm{d}x &= \int_0^l\left[\varphi_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\varphi_i^*}{\mathrm{d}x}\right) - \varphi_i^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x\\ &= \int_0^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\left(\varphi_j\frac{\mathrm{d}\varphi_i^*}{\mathrm{d}x} - \varphi_i^*\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x \qquad (2.2.35)\\ &= p(x)\left(\varphi_j\frac{\mathrm{d}\varphi_i^*}{\mathrm{d}x} - \varphi_i^*\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_0^l = 0\end{aligned}$$

事实上，利用边界条件式(2.2.32)

$$\alpha_1\varphi_i^*(0) - \beta_1\frac{\mathrm{d}\varphi_i^*(0)}{\mathrm{d}x} = 0; \qquad \alpha_1\varphi_j(0) - \beta_1\frac{\mathrm{d}\varphi_j(0)}{\mathrm{d}x} = 0$$

即

$$\varphi_j(0)\frac{\mathrm{d}\varphi_i^*(0)}{\mathrm{d}x} - \varphi_i^*(0)\frac{\mathrm{d}\varphi_j(0)}{\mathrm{d}x} = 0$$

同理

$$\varphi_j(l)\frac{\mathrm{d}\varphi_i^*(l)}{\mathrm{d}x}-\varphi_i^*(l)\frac{\mathrm{d}\varphi_j(l)}{\mathrm{d}x}=0$$

因此 **L** 在边界条件式(2.2.32)是 Hermite 算子，故(φ_i,φ_j)正交. 直接利用式(2.2.33)

$$\int_0^l(\varphi_i^*\mathbf{L}\varphi_j-\varphi_j\mathbf{L}\varphi_i^*)\mathrm{d}x=(\lambda_j-\lambda_i)\int_0^l\rho\varphi_i^*\varphi_j\mathrm{d}x=(\lambda_j-\lambda_i)(\varphi_i,\varphi_j)$$

而 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 故$(\varphi_i,\varphi_j)=0$.

性质 2：本征值 λ 为实数，且非负($\lambda\geqslant0$)，本征函数可选择为实值函数. 事实上，因 **L** 是 Hermite 算子，故 λ 为实数. 因为式(2.2.33)中 p、q、λ 和 ρ 都是实值函数，故式(2.2.33)任一解的实部和虚部都是式(2.2.33)的解. 下面证明 $\lambda\geqslant0$：设 φ 是本征函数，由于式(2.2.33)

$$\lambda=\frac{1}{\int_0^l\rho|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x}\int_0^l\varphi(x)\mathbf{L}\varphi\mathrm{d}x=\frac{1}{\|\varphi\|^2}\left[-\int_0^l\varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\int_0^lq\varphi^2\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\left(p\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_0^l+\int_0^lp\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x+\int_0^lq\varphi^2\mathrm{d}x \tag{2.2.36}$$

利用边界条件式(2.2.32)

$$-p(l)\varphi(l)\frac{\mathrm{d}\varphi(l)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}p(l)\varphi^2(l)\geqslant0, & \beta_2\neq0\\ 0, & \beta_2=0\end{cases}$$

$$p(0)\varphi(0)\frac{\mathrm{d}\varphi(0)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}p(0)\varphi^2(0)\geqslant0, & \beta_1\neq0\\ 0, & \beta_1=0\end{cases}$$

又因 $p(x)$和 $q(x)>0$，故 $\lambda\geqslant0$. 从式(2.2.36)显然可看出：如果在闭区域 $x\in[0,l]$内 $q(x)>0$，则 $\lambda\neq0$，即零不是本征值；如果 $q(x)=0$，则当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时，$\lambda=0$ 是式(2.2.32)和(2.2.33)的本征值.

性质 3：Sturm-Liouville 问题的本征值是非简并的，即对应一个 λ 只可能有一个本征函数. 一般对二阶常微分方程，总有两个线性独立的解，但对 Sturm-Liouville 系统，每一个本征值只能有一个独立的本征函数. 用反证法：设对应的两个线性无关本征函数为 $\varphi_1(x,\lambda)$和 $\varphi_2(x,\lambda)$，则可取 $\varphi_1(x,\lambda)$和 $\varphi_2(x,\lambda)$为方程(2.2.33)的基本解，于是满足任意初值条件

$$\varphi(x)|_{x=l}=a;\qquad \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=l}=b$$

的解 $\varphi(x)$可以表示成

$$\varphi(x)=c_1\varphi_1(x,\lambda)+c_2\varphi_2(x,\lambda)$$

因 φ_1 和 φ_2 是本征函数，满足齐次边界条件式(2.2.32)，故 $\varphi(x)$ 也满足式(2.2.32)，这说明 $\varphi(l)$ 与 $\varphi'(l)$ 之间存在一个线性关系，故 a 和 b 不能任意选取，矛盾！因此，φ_1 和 φ_2 不可能线性独立．

性质 4：本征值是分立的，即 $\{\lambda_n\}$ 形成可数集，并且有

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \cdots \leqslant \lambda_n \cdots \quad (n \to \infty, \lambda_n \to \infty) \tag{2.2.37}$$

下面仅证明 $\{\lambda_n\}$ 是可数集，式(2.2.37)的证明则略去．事实上，设式(2.2.33)的任意两个线性独立解为 $\varphi_1(x,\lambda)$ 和 $\varphi_2(x,\lambda)$，则式(2.2.33)的通解为

$$\varphi(x,\lambda) = c_1\varphi_1(x,\lambda) + c_2\varphi_2(x,\lambda) \tag{2.2.38}$$

当 λ 为本征值时应满足式(2.2.32)，于是有决定系数 c_1 和 c_2 的方程

$$\left[\alpha_1\varphi_1(0,\lambda) - \beta_1\frac{\mathrm{d}\varphi_1(0,\lambda)}{\mathrm{d}x}\right]c_1 + \left[\alpha_1\varphi_2(0,\lambda) - \beta_1\frac{\mathrm{d}\varphi_2(0,\lambda)}{\mathrm{d}x}\right]c_2 = 0$$

$$\left[\alpha_2\varphi_1(l,\lambda) + \beta_2\frac{\mathrm{d}\varphi_1(l,\lambda)}{\mathrm{d}x}\right]c_1 + \left[\alpha_2\varphi_2(l,\lambda) + \beta_2\frac{\mathrm{d}\varphi_2(l,\lambda)}{\mathrm{d}x}\right]c_2 = 0$$

存在非零解的条件是系数行列式 $\Delta(\lambda)$ 等于零

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1\varphi_1(0,\lambda) - \beta_1\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1(0,\lambda)}{\mathrm{d}x} & \alpha_1\varphi_2(0,\lambda) - \beta_1\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2(0,\lambda)}{\mathrm{d}x} \\ \alpha_2\varphi_1(l,\lambda) + \beta_2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1(l,\lambda)}{\mathrm{d}x} & \alpha_2\varphi_2(l,\lambda) + \beta_2\dfrac{\mathrm{d}\varphi_2(l,\lambda)}{\mathrm{d}x} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2.39}$$

上式是确定本征值 λ 的方程，即本征值是函数 $\Delta(\lambda)=0$ 在 λ 复平面上的零点．因此，问题是 $\Delta(\lambda)=0$ 的零点如何分布？由微分方程的理论知，对于固定的 x 值，$\varphi_1(x,\lambda)$ 和 $\varphi_2(x,\lambda)$ 是 λ 的整函数，即在整个 λ 复平面上解析的函数．因此，$\Delta(\lambda)=0$ 也是 λ 的整函数．根据性质 2，本征值只能是实数，故 $\Delta(\lambda)=0$ 的零点都在实轴上．因 $\Delta(\lambda)$ 在全平面上不恒为零，在有限处 $\Delta(\lambda)=0$ 只能有有限个零点（否则 $\Delta(\lambda)\equiv 0$ 恒为零），即本征值是分立的．

性质 5：对 $L^2[0,l]$ 上的平方可积函数

$$\int_0^l \rho(x)\,|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x < \infty$$

本征函数 $\{\varphi_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$ 形成一个完备函数系．因此，如果 $\varphi \in L^2[0,l]$ 且带权 $\rho(x)$ 平方可积，则可作广义 Fourier 展开

$$\varphi(x) \cong \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k,\varphi)\varphi_k(x) \tag{2.2.40}$$

上式右边平均收敛于 $\varphi(x)$．如果 $\varphi(x)$ 在区间 $x\in[0,l]$ 内连续，且有分段连续的一阶导数，又满足边界条件式(2.2.32)，则上式右边一致且绝对收敛于左边；如果 $\varphi(x)$ 在 x_0 点有第一类间断点，则上式右边在 x_0 点收敛于平均值

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k,\varphi)\varphi_k(x_0)\cong\frac{1}{2}[\varphi(x_0^+)+\varphi(x_0^-)] \tag{2.2.41}$$

性质 6：对应于本征值 λ_n 的本征函数 $\varphi_n(x)$，在$[0,l]$区间内恰好有 n 个零点.

性质 5 将在第四章给出证明，性质 6 证明较为复杂，故略去. 下面列举几例来验证上述性质.

例 2.2.1　取 $p(x)=\rho(x)=1,q(x)=0,\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_1=\beta_2=0$,本征值问题为

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\lambda\varphi;\qquad \varphi|_{x=0}=\varphi|_{x=l}=0 \tag{2.2.42}$$

这是我们熟知的，显然

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right);\qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,n=1,2,3,\cdots \tag{2.2.43}$$

显然具有性质 1～6. 如果取边界条件

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=l}=0 \tag{2.2.44}$$

则

$$\begin{gathered}\varphi_0(x)=\sqrt{\frac{1}{l}};\qquad \varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\\ \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\quad(n=0,1,2,\cdots)\end{gathered} \tag{2.2.45}$$

这时零是本征值,对照性质 2 的条件，这是显然的.

例 2.2.2　考虑一个非 Sturm-Liouville 本征值问题

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\lambda\varphi;\qquad x\in(-l,l) \tag{2.2.46}$$

且有周期性边界条件

$$\varphi(-l)=\varphi(l);\qquad \frac{d\varphi(-l)}{dx}=\frac{d\varphi(l)}{dx} \tag{2.2.47}$$

可得对 $\lambda_0=0$ 本征函数为 $\varphi_0(x)=1/\sqrt{2l}$. 当 $\lambda_n\neq0$，则有

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{l}}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)\\ \sqrt{\dfrac{1}{l}}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)\end{cases};\qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,n=1,2,\cdots$$

因此，对应于本征值 $\lambda_n\neq0$，有二个线性独立的本征函数，故是双重简并的，性质 3 不成立. 事实上，Sturm-Liouville 系统的边界条件式(2.2.32)是一点之间的关系，而式(2.2.47)是两点之间的关系 .

例 2.2.3　Bessel 函数展开，考虑奇异的 Sturm-Liouville 问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{n^2}{x}\varphi=\lambda x\varphi,\qquad x\in(0,l)\tag{2.2.48}$$

上式为 n 阶 Bessel 方程，其中 $p(x)=x$ 和 $\rho(x)=x$，$q(x)=n^2/x>0$，$x\in(0,l)$，并且 $p(0)=\rho(0)=0$；$q(x)$在 $x=0$ 处有奇性. 根据常微分方程理论，$x=0$ 是 Bessel 方程的正则奇点，故存在有界的解（因为方程的奇点一般也是解的奇点，但当奇点是正则奇点时，可得到无奇性的解）. 考虑边界条件

$$\varphi(x)\big|_{x=0}<\infty;\qquad \left(\alpha\varphi+\beta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=l}=0\tag{2.2.49}$$

第一式为自然边界条件. 一般如果 x_0 是式(2.2.33)的奇点，自然边界条件可写成($x_0=0$ 或 l)

$$\lim_{x\to x_0}p(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=0\tag{2.2.50}$$

上式不仅使 φ 在奇点x_0处有界，而且使不同本征值的本征函数彼此正交. 事实上，由

$$(\lambda_j-\lambda_i)(\varphi_i,\varphi_j)=p\left(\varphi_j\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}-\varphi_i\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_0^l\tag{2.2.51}$$

为了使 φ_i 与 φ_j 正交，不仅要求 φ_i 和 φ_j 在 $x=0$ 或 $x=l$ 有界，而且要求

$$p(x)\frac{\mathrm{d}\varphi_i(x)}{\mathrm{d}x}=0;\qquad p(x)\frac{\mathrm{d}\varphi_j(x)}{\mathrm{d}x}=0,\qquad (x\to x_0)$$

方程(2.2.48)在 $x=0$ 处有界的解为 n 阶 Bessel 函数 $J_n(\sqrt{\lambda}x)$（详细的讨论将在 2.4 节给出）. $J_n(x)$ 在 $x=0$ 处的渐近特性为

$$J_0(x)=1+O(x^2);\qquad J_n(x)=O(x^n)\tag{2.2.52}$$

显然条件式(2.2.50)是满足的. 本征值 λ 由式(2.2.49)决定

$$\left[\alpha J_n(\sqrt{\lambda}x)+\beta\frac{\mathrm{d}J_n(\sqrt{\lambda}x)}{\mathrm{d}x}\right]\bigg|_{x=l}=0\tag{2.2.53}$$

令 $\alpha_k^n(k=1,2,\cdots)$是方程

$$\left[\alpha J_n(x)+\beta\frac{\mathrm{d}J_n(x)}{\mathrm{d}x}\right]\bigg|_{x=l}=0\tag{2.2.54}$$

的第 k 个根，则本征值 $\lambda_k^n=(\alpha_k^n)^2/l^2$. 如取边界条件式(2.2.49)中 $\beta=0$，则 α_k^n 是 n 阶 Bessel 函数的正零点 $J_n(\alpha_k^n)=0$. 根据 Bessel 函数的性质，式(2.2.54)存在无限多个可数的正根，因此 α_k^n 总是存在的. 于是当 $\beta=0$ 时，本征函数系为 $\varphi_k^n=J_n(\sqrt{\lambda_k^n}x)$，而 φ_k^n 的模

$$\|\varphi_k^n\|^2=\int_0^l xJ_n{}^2(\sqrt{\lambda_k^n}x)\mathrm{d}x=\frac{l^2}{2}J_{n+1}^2(\sqrt{\lambda_k^n}l)$$

故正交归一的本征函数为

$$\varphi_k^n(x) = \frac{\sqrt{2}}{l} \cdot \frac{J_n(\sqrt{\lambda_k^n}x)}{J_{n+1}(\sqrt{\lambda_k^n}l)}, \qquad k = 1,2,\cdots \tag{2.2.55}$$

对每一个 n，函数系 $\{\varphi_k^n\}$ 是一个正交归一的完备系，故对任一函数 $\varphi(x) \in L^2[0, l]$，且带权 $\rho(x) = x$ 平方可积

$$\int_0^l x\varphi^2(x)\mathrm{d}x < \infty \tag{2.2.56}$$

总可展成 Bessel 级数

$$\varphi(x) \cong \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^n, \varphi)\varphi_k^n(x) \tag{2.2.57}$$

注意：上式对每一个 n 都成立.

例 2.2.4 Legendre 方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right] = \lambda\varphi, \qquad x \in (-1,1) \tag{2.2.58}$$

当 $x \in (-1,1)$ 时，$p(x) = 1 - x^2 > 0$，但 $p(-1) = p(1) = 0$，故上式是奇异的 Sturm-Liouville 问题，$x = \pm 1$ 是正则奇点，存在自然边界条件

$$\lim_{x \to \pm 1} \varphi(x) < \infty \tag{2.2.59}$$

用级数法求解式(2.2.58)可知，Legendre 方程在区间 $x \in [-1,1]$ 存在有界解的条件是 λ 只能取分列值

$$\lambda_n = n(n+1), \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{2.2.60}$$

与 λ_n 相应的本征函数为 Legendre 多项式，而归一化的本征函数为

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \tag{2.2.61}$$

在 2.1 节我们已详细讨论了 $P_n(x)$.

2.2.3 Sturm-Liouville 多项式系统

考虑一般形式的二阶方程

$$\alpha(x)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \beta(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + [\gamma(x) + \lambda]\varphi(x) = 0 \tag{2.2.62}$$

显然，作变换

$$p(x) = \exp\left[\int \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\mathrm{d}x\right]; \qquad q(x) = -\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}p(x); \qquad \rho(x) = \frac{p(x)}{\alpha(x)}$$

可化成 Sturm-Liouville 型. 为了 $\varphi(x)$ 具有多项式解 $Q_n(x)$（其中 n 为多项式的阶数），显然要求方程的系数 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 及 $\gamma(x)$ 满足：$\alpha(x)$ 是二阶多项式，$\beta(x)$ 为一阶多项式，而 $\gamma(x)$ 为常数

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 \\ \beta(x) &= \beta_0 x + \beta_1; \qquad \gamma(x) = \gamma_0 \end{aligned} \tag{2.2.63}$$

注意:由于 γ_0 为常数，相当于本征值作平移，而不增加新的内容，故可令 $\gamma_0=0$.
下面分三种情况讨论具有多项式解的 Sturm-Liouville 系统:

(1) $\alpha(x)$是二阶多项式

$$p(x)=\exp\left(\int\frac{\beta_0x+\beta_1}{\alpha_0x^2+\alpha_1x+\alpha_2}\mathrm{d}x\right) \tag{2.2.64}$$

如果取 $\alpha_0=-1$, 并且 $\alpha(x)=0$ 的根在 $x=\pm1$ 处，令 $\beta_1=q-p;\beta_0=-(p+q+2)$,
则

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\frac{-(p+q+2)x+q-p}{1-x^2}=\frac{q+1}{1+x}-\frac{p+1}{1-x} \tag{2.2.65}$$

$$p(x)=(1+x)^{q+1}(1-x)^{p+1};\qquad q(x)=-\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}p(x)=0 \tag{2.2.66}$$

$$\rho(x)=\frac{p(x)}{\alpha(x)}=\frac{(1+x)^{q+1}(1-x)^{p+1}}{1-x^2}=(1-x)^q(1-x)^p \tag{2.2.67}$$

这时的多项式解 $Q_n(x)$称为定义在区域$[-1,1]$且指标为(p,q)的 Jacobi 多项式.
特别是当 $p=q=-1/2,\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$, 记 $Q_n(x)=T_n(x)$, 正交关系式为

$$(T_n,T_m)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n^*(x)T_m(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x=0\quad(n\neq m)$$

若令 $x=\cos\theta$ 则

$$(T_n,T_m)=\int_{-\pi}^{\pi}T_n^*(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\mathrm{d}\theta=0 \tag{2.2.68}$$

在$[-\pi,\pi]$上满足上述关系惟一的 $\cos\theta$ 多项式集是 $T_n(\cos\theta)\sim\cos n\theta$,即

$$T_n(x)\sim\cos(n\arccos x) \tag{2.2.69}$$

$T_n(x)$就是我们已讨论的 Chebyshev 多项式集. 如果取 $p=q=0,\rho(x)=1$ 和 $\rho(x)=(1-x^2)$, 这时的多项式集即为 Legendre 多项式.

(2) $\alpha(x)$是一个线性函数:因总可通过平移坐标使 $\alpha(x)=x$, 故

$$p(x)=\exp\left(\int\frac{\beta_0x+\beta_1}{x}\mathrm{d}x\right)=x^{\beta_1}\mathrm{e}^{\beta_0x};\qquad\rho(x)=\frac{1}{\alpha(x)}p(x)=x^{(\beta_1-1)}\mathrm{e}^{\beta_0x} \tag{2.2.70}$$

如果 $\beta_1>1,\rho(0)=0$. 因此可以定义当 $x\leqslant0$ 时 $\rho(x)=0$, 令 $\beta_1-1=s;\beta_0=-1$,
可得

$$\rho(x)=x^s\mathrm{e}^{-x};\qquad p(x)=x^{s+1}\mathrm{e}^{-x} \tag{2.2.71}$$

具有这种权重的正交多项式 $Q_n(x)$称为**连带 Laguerre 多项式**, 记为 $L_n^s(x)$, 且
有正交关系

$$\int_0^{\infty}L_n^s(x)L_m^s(x)x^s\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(1+s+n)}{n!}\delta_{nm} \tag{2.2.72}$$

其中 $\Gamma(1+s+n)$是 Γ 函数, 可见 L_n^s 定义在区间$x\in(0,\infty)$. 若 $s=0$,则 $L_n^0(x)$

$=L_n$ 称为 **Laguerre 多项式**，关于 Laguerre 多项式的详细讨论见 2.2.4 小节.

(3) $\alpha(x)=$常数，可选择 $\alpha=1$，于是

$$p(x)=\exp\int(\beta_0 x+\beta_1)\mathrm{d}x=\exp\left(\beta_0\frac{x^2}{2}+\beta_1 x\right)=c'\exp\left[\frac{\beta_0}{2}(x+\beta_1/\beta_0)^2\right]$$

如果选择 $\beta_0<0$，那么 $|x|\to\infty$ 时，$p(x)$ 指数衰减，取 $\beta_0=-2,\beta_1=0$，则

$$\rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2};\qquad p(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\tag{2.2.73}$$

具有这种权函数且定义在 $(-\infty,\infty)$ 区域上的正交多项式称为 **Hermite 多项式**，关于 Hermite 多项式的详细讨论见 2.2.4 小节. 可以证明，除了上述所讲的多项式外，不存在更多的多项式，它们是二阶微分方程的解.

把 $Q_n(x)$ 代入式(2.2.62)并利用式(2.2.63)可得本征值分布为

$$\lambda_n=-n(\alpha_0 n+\beta_0-\alpha_0)\tag{2.2.74}$$

Legendre 多项式：　$\alpha_0=-1$，　$\beta_0=-2$，　$\lambda_n=n(n+1)$；

Hermite 多项式：　$\alpha_0=0$，　$\beta_0=-2$，　$\lambda_n=2n$；

Laguerre 多项式：　$\alpha_0=0$，　$\beta_0=-1$，　$\lambda_n=n$；

Chebyshev 多项式：　$\alpha_0=-1$，　$\beta_0=-1$，　$\lambda_n=n^2$.

显然均有 $\lambda_n\geqslant 0$，并且满足性质 4. 最后指出 Sturm-Liouville 多项式系统的本征函数集 $\{Q_n\}$ 完备性定理：在 Hilbert 空间中正交归一的 Sturm-Liouville 多项式 $\{Q_n\}$ 是完备的(证明见第四章).

2.2.4 Hermite 多项式与 Laguerre 多项式

由于 Hermite 多项式与 Laguerre 多项式分别是整个实轴 $(-\infty,\infty)$ 和半实轴 $(0,\infty)$ 上的完备多项式集，故我们特别讨论之.

记 Hermite 多项式为 $H_n(x)$，有微分公式

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}\tag{2.2.75}$$

下面来证明由上式定义的 H_n 确是正交多项式集，即证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_nH_m\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\|H_n\|^2\delta_{nm}\tag{2.2.76}$$

用比较简单的方法证明上式，为此介绍 H_n 的母函数 $\psi(x,t)$

$$\psi(x,t)=\exp(-t^2+2tx)\tag{2.2.77}$$

把 ψ 看成 t 的函数作幂级数展开

$$\psi(x,t)=\exp(-t^2+2tx)=\exp(x^2)\cdot\mathrm{e}^{-(t-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x)}{n!}t^n\tag{2.2.78}$$

显然有

$$a_n(x) = \frac{\partial^n \psi(x,t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=0} = e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(t-x)^2}\right]\bigg|_{t=0}$$

$$= e^{x^2}\left(\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2}\right)\bigg|_{y=-x} = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

因此 $a_n(x) = H_n(x)$. 由于 $H_n(x)$是 $\psi(x,t)$的幂级数展开系数，故称 $\psi(x,t)$为 $H_n(x)$的**母函数**. 考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2tx} \cdot e^{-s^2+2sx} \cdot e^{-x^2}dx = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{t^n s^n}{n!m!}\int_{-\infty}^{\infty}H_n H_m e^{-x^2}dx$$

上式左边积分

$$I = e^{-(t^2+s^2)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+2(s+t)x}dx = e^{-(t^2+s^2)}\sqrt{\pi}e^{(s+t)^2} = \sqrt{\pi}e^{2st} = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2st)^n}{n!}$$

比较同次幂得

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{nm} \tag{2.2.79}$$

故 $\| H_n \|^2 = \sqrt{\pi}2^n n!$. 函数系

$$\{\varphi_n(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}}H_n(x); \qquad \rho(x) = e^{-x^2}\right\} \tag{2.2.80}$$

构成 Hilbert 空间 $L^2(-\infty,\infty)$上完备正交归一系. 故对任一 $\varphi(x)\in L^2(-\infty,\infty)$带权 $\exp(-x^2)$平方可积函数

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\,|\varphi(x)|^2dx < \infty \tag{2.2.81}$$

可展成广义 Fourier 级数

$$\varphi(x) \cong \sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_n,\varphi)\varphi_n(x) \tag{2.2.82}$$

显然由于式(2.2.81)中积分带权 $\rho(x) = \exp(-x^2)$，故对 $\varphi(x)$的条件相当宽，例如 $\varphi(x) = x^k (k<\infty)$尽管 $x\to\infty$时，$\varphi(x)\to\infty$，但仍满足式(2.2.81)，也能展成级数式(2.2.82).

由式(2.2.78)，两边对 x 微分则有

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2t\psi(x,t)$$

故有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H'_n(x)t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_n(x)t^{n+1}}{n!}$$

比较 t 的同次幂得到H_n 的导数递推关系式

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1) \tag{2.2.83}$$

同样从

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - 2(t - x)\psi = 0$$

可得 H_n 的函数递推关系式

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1} = 0, \quad (n \geqslant 1) \tag{2.2.84}$$

由式(2.2.83)和(2.2.84)可推出 $H_n(x)$满足 Hermite 方程

$$H''_n(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad (n \geqslant 1)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\frac{\mathrm{d}H_n}{\mathrm{d}x}\right) + \lambda_n \mathrm{e}^{-x^2} H_n = 0 \tag{2.2.85}$$

其中 $\lambda_n = 2n$. 上式的另一个解在 $x \to \pm\infty$发散，故不讨论之. 前四个 Hermite 多项式

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2; \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

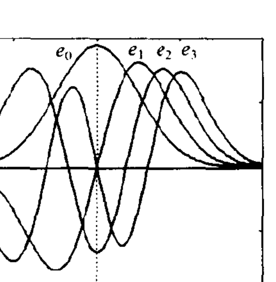


图 2.2.1 前四个 Hermite 多项式

的图象见图 2.2.1，注意,图 2.2.1 中的曲线为函数

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x).$$

记 Laguerre 多项式为 $L_n(x)$，它的微分形式为

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \mathrm{e}^{-x}) \tag{2.2.86}$$

$L_n(x)$的母函数为

$$\psi(x,t) = \frac{1}{1-t}\exp\left(-x\frac{t}{1-t}\right) \tag{2.2.87}$$

把 ψ 看成 t 的函数作幂级数展开

$$\frac{1}{1-t}\exp\left(-x\frac{t}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x)}{n!}t^n$$

而

$$a_n(x) = \left.\frac{\partial^n \psi(x,t)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \mathrm{e}^x\left.\left\{\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{x}{1-t}\right)\right]\right\}\right|_{t=0}$$

可推得

$$a_n(x) = \mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \mathrm{e}^{-x}) = n!L_n(x)$$

同样可以证明 Laguerre 多项式的正交性关系

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \delta_{nm} \tag{2.2.88}$$

函数系

$$\{\varphi_n(x)\} = \{L_n(x);\rho(x) = \mathrm{e}^{-x}\} \tag{2.2.89}$$

构成 Hilbert 空间 $L^2(0,\infty)$上完备的正交归一系，故对任一 $\varphi(x)\in L^2(0,\infty)$带权 e^{-x}平方可积函数

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x < \infty \tag{2.2.90}$$

可展成广义 Fourier 级数

$$\varphi(x) \cong \sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_n,\varphi)\varphi_n(x). \tag{2.2.91}$$

Laguerre 多项式的导数和函数递推关系式分别为

$$xL'_n(x) = n[L_n(x) - L_{n-1}(x)] \tag{2.2.92}$$

$$nL_n(x) = (2n-1-x)L_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x) \tag{2.2.93}$$

前四个 Laguerre 多项式

$$L_0(x) = 1; \qquad L_1(x) = 1 - x$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2; \qquad L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

的图象见图 2.2.2，注意：图 2.2.2 中的曲线为函数

$$e_n(x) = \mathrm{e}^{-x/2}L_n(x).$$

最后，值得指出的是三类多项式系统，即 Legendre 多项式、Laguerre 多项式和 Hermite 多项式，分别是**有限区域**、**半无限区域**和**无限区域**中的正交多项式系统，但他们各自的权函数不同.

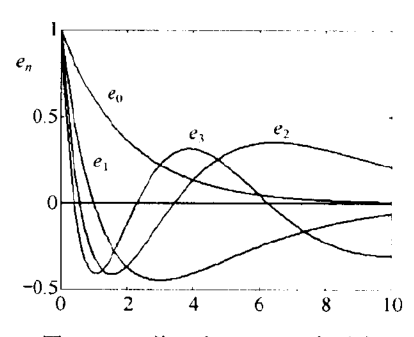


图 2.2.2 前四个 Laguerre 多项式

2.3 有界区域内定解问题的分离变数法

利用前面各节的内容，现在讨论三种基本方程，即波动方程、热传导方程和 Laplace 方程，在有界区域内定解问题的分离变数法. 考虑较为一般的方程 (1.1.70)～(1.1.72)，三个方程分别代表非均匀介质的波动、热传导和热平衡. 下面分别讨论这三个方程在有界区域的混合问题.

2.3.1 波动方程的齐次混合问题

考虑方程(1.1.70)的齐次混合问题

$$\begin{gathered}\rho(\boldsymbol{r})u_{tt}+\mathbf{L}u=0,\qquad \boldsymbol{r}\in G,\qquad t>0\\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=f(\boldsymbol{r});\qquad u_t|_{t=0}=g(\boldsymbol{r});\boldsymbol{r}\in\partial G+G\\ \left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{2.3.1}$$

其中 $\alpha/\beta\geqslant0$ 或者 $\beta/\alpha\geqslant0$(但 α 与 β 不同时为零). 用分离变数法求解上述问题,首先作空间变数和时间变数之间的分离

$$u(\boldsymbol{r},t)=\varphi(\boldsymbol{r})T(t)\tag{2.3.2}$$

代入(2.3.1)的第一式

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\frac{\mathbf{L}[\varphi(\boldsymbol{r})]}{\rho(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})}=-\lambda\tag{2.3.3}$$

其中 λ 为分离变量引进的常数,于是有

$$\mathbf{L}\varphi(\boldsymbol{r})=\lambda\rho(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r});\qquad\left(\alpha\varphi+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G}=0\tag{2.3.4}$$

$$T''(t)+\lambda T(t)=0\tag{2.3.5}$$

显然式(2.3.4)构成本征值问题. 由 2.1 节的讨论知,$\mathbf{L}$ 在齐次边界条件下是 Hermite 算子. 特别在一维情形,式(2.3.4)变成为

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)+q\varphi=\lambda\rho(x)\varphi(x),\qquad x\in(0,l)\\ \left(\alpha_1\varphi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=0}=0;\qquad\left(\alpha_2\varphi+\beta_2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=l}=0\end{gathered}\tag{2.3.6}$$

上式为 Sturm-Liouville 本征值问题,对不同的本征值 λ_n,本征函数 φ_n 两两正交,并且$\{\varphi_n\}$构成完备系.

假定由式(2.3.4)求得的本征函数系$\{\varphi_n\}$构成正交归一的完备系(将在第五章讨论其完备性),于是式(2.3.1)的解可写成以下形式

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\boldsymbol{r})T_n(t)\tag{2.3.7}$$

由式(2.3.5),$T_n(t)$为

$$T_n(t)=a_n\cos(\sqrt{\lambda_n}t)+b_n\sin(\sqrt{\lambda_n}t)\tag{2.3.8}$$

a_n 和 b_n 由初始条件决定

$$u|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r});\qquad u_t|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}b_n\varphi_n(\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r})\tag{2.3.9}$$

由于$\{\varphi_n\}$构成完备系，故二式右边能展成广义 Fourier 级数

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(\boldsymbol{r}),f(\boldsymbol{r})]\cdot\varphi_n(\boldsymbol{r});\qquad g(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(\boldsymbol{r}),g(\boldsymbol{r})]\varphi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.3.10}$$

其中内积带权 $\rho(\boldsymbol{r})$，如

$$[\varphi_n(\boldsymbol{r}),f(\boldsymbol{r})] = \int_G[\varphi_n^*(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r})]\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{2.3.11}$$

于是

$$a_n = [\varphi_n(\boldsymbol{r}),f(\boldsymbol{r})];\qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}[\varphi_n(\boldsymbol{r}),g(\boldsymbol{r})] \tag{2.3.12}$$

因此，我们求得混合问题式(2.3.1)的级数解为

$$u(\boldsymbol{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + b_n\sin(\sqrt{\lambda_n}t)]\varphi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.3.13}$$

当 **L** 是正算子，$\lambda_n\neq0$ 且 $\lambda_n>0$；但当 $\lambda_0=0$ 是 **L** 的本征值时，上式不成立. 从式(2.3.9)可知，当 $\lambda_n\neq0$ 时，式(2.3.12)成立，而 b_0 的方程则为

$$\sqrt{\lambda_0}b_0 = [\varphi_0(\boldsymbol{r}),g(\boldsymbol{r})] = 0 \tag{2.3.14}$$

故存在相容性条件

$$[\varphi_0(\boldsymbol{r}),g(\boldsymbol{r})] = 0 \tag{2.3.15}$$

否则问题无解，上式意味着 $g(\boldsymbol{r})$必须与 $\varphi_0(\boldsymbol{r})$正交. 当上式满足时，$b_0$ 可取任意常数. 整个混合问题的解为

$$u(\boldsymbol{r},t) = c\varphi_0(\boldsymbol{r}) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + b_n\sin(\sqrt{\lambda_n}t)]\varphi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.3.16}$$

不难验证上式确是当 $\lambda_0=0$ 时，齐次混合问题式(2.3.1)的解.

例 2.3.1　考虑边界固定圆膜的横振动，设圆膜半径为 l，圆心在坐标原点(可设想鼓之振动)，振动方程为

$$\begin{gathered} u_{tt} - a^2\nabla_2^2 u = 0,\qquad r<l,\qquad t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y);\qquad u_t|_{t=0} = \psi(x,y),\qquad r\leqslant l \\ u|_{r=l} = 0,\qquad t\geqslant0 \end{gathered} \tag{2.3.17}$$

采用平面极坐标

$$\mathbf{L} = -\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$$

由分离变数可得(因 $\lambda>0$，故令 $\lambda=k^2$)

$$\begin{gathered} \nabla_2^2\varphi(r,\theta) + k^2\varphi(r,\theta) = 0,\qquad r\in(0,l),\qquad \theta\in[0,2\pi] \\ \varphi(r,\theta)|_{r=l} = 0,\qquad \theta\in[0,2\pi] \\ T''(t) + a^2k^2T(t) = 0,\qquad t>0 \end{gathered} \tag{2.3.18}$$

由第三式得 $T(t)$

$$T(t) = A\cos akt + B\sin akt \tag{2.3.19}$$

(2.3.18)第一式进一步分离变数，令 $\varphi(r,\theta)=\psi(\theta)R(r)$于是有

$$\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = -\frac{r^2R''(r) + rR'(r) + k^2r^2R(r)}{R(r)} \equiv -\mu^2 \tag{2.3.20}$$

故得 $\psi(\theta)$和 $R(r)$满足的方程

$$\psi''(\theta) + \mu^2\psi(\theta) = 0 \tag{2.3.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left(k^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right)R = 0 \tag{2.3.22}$$

由(2.3.18)第二式得 $R(r)$满足的边界条件

$$R(r)\big|_{r=l} = 0 \tag{2.3.23}$$

于是式(2.3.22)和(2.3.23)构成本征值问题. 式(2.3.21)存在**自然边界条件**：因为 θ 是方向角，根据物理意义，角度转过 2π 后，振动状态并不改变，故有周期性边界条件

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi) \tag{2.3.24}$$

于是式(2.3.21)和(2.3.24)构成本征值问题，本征值及相应的本征函数为

$$\psi_m(\theta) = C_m\cos m\theta + D_m\sin m\theta;\quad \mu_m = m \qquad (m = 0,1,2,\cdots)$$

式(2.3.22)可写成

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{m^2}{r}R = k^2rR \tag{2.3.25}$$

显然上式是 m 阶 Bessel 方程，故在 $r=0$ 有限的解为 Bessel 函数

$$R(r) = J_m(kr) \tag{2.3.26}$$

由式(2.3.23)得到决定本征值 k 的方程$J_m(kl)=0$. 设方程 $J_m(\mu)=0$ 的正根为 $\{\mu_1^m,\mu_2^m,\cdots,\mu_n^m,\cdots\}$则本征值 $k_n^m=\mu_n^m/l(n=1,2,\cdots)$. 根据 2.2 节的讨论，本征函数系$\{J_m(k_n^mr)\}$是带权 $\rho(r)=r$ 的完备正交系，于是一般解为

$$u(r,\theta,t) = \sum_{m,n=0}^{\infty}(A_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}\sin\omega_{mn}t)\begin{Bmatrix}\sin m\theta\\ \cos m\theta\end{Bmatrix}J_m(k_n^mr) \tag{2.3.27}$$

其中 $\omega_{mn}=ak_n^m$，或写成指数形式

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(a_{mn}\cos\omega_{mn}t + b_{mn}\sin\omega_{mn}t)J_{|m|}(k_n^mr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \tag{2.3.28}$$

利用函数系$\{J_{|m|}(k_n^mr);\rho(r)=r\}$及$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\}$的完备性，可求得系数 a_{mn}及b_{mn}

$$u(r,\theta,t)\big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{mn}J_{|m|}(k_n^mr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$u_t(r,\theta,t)\big|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\omega_{mn}b_{mn}J_{|m|}(k_n^m r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}=\psi(r\cos\theta,r\sin\theta)\quad(2.3.29)$$

即

$$a_{mn}=\frac{1}{\pi l^2J_{|m|+1}^2(k_n^m l)}\int_0^l\int_0^{2\pi}\varphi(r\cos\theta,r\sin\theta)rJ_{|m|}(k_n^m r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

(2.3.30)

$$b_{mn}=\frac{1}{\pi l^2J_{|m|+1}^2(k_n^m l)\omega_{mn}}\int_0^l\int_0^{2\pi}\psi(r\cos\theta,r\sin\theta)rJ_{|m|}(k_n^m r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

令$\{\varphi_{mn}\}=\{J_{|m|}(k_n^m r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta},\rho(r)=r\}$，则$\{\varphi_{mn}\}$构成$r\in[0,l],\theta\in[0,2\pi]$上的正交完备系.

2.3.2 热传导方程的齐次混合问题

考虑式(1.1.71)的齐次混合问题

$$\begin{aligned}&\rho(\boldsymbol{r})u_t+\mathbf{L}u=0,\qquad \boldsymbol{r}\in G,\qquad t>0\\&u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=f(\boldsymbol{r});\qquad \left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{2.3.31}$$

令

$$u(\boldsymbol{r},t)=\varphi(\boldsymbol{r})T(t)$$

对$\varphi(\boldsymbol{r})$同样可得本征值问题式(2.3.4). 对$T(t)$得到一阶方程

$$T'(t)+\lambda T(t)=0\tag{2.3.32}$$

因此

$$T(t)=a\exp(-\lambda t)\tag{2.3.33}$$

于是混合问题的一般解为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n t)\tag{2.3.34}$$

利用式(2.3.31)中的初始条件有

$$u(\boldsymbol{r},0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})\tag{2.3.35}$$

因此

$$a_n=\frac{[\varphi_n(\boldsymbol{r}),f(\boldsymbol{r})]}{\|\varphi_n\|^2}\tag{2.3.36}$$

其中内积带权$\rho(\boldsymbol{r})$. 因此混合问题的形式解为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\varphi_n(\boldsymbol{r}),f(\boldsymbol{r})]}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n t)\tag{2.3.37}$$

由2.2节,L是正算子，故$\lambda_n>0$，上式总随t指数衰减，又$\lambda_n\to\infty$(当$n\to\infty$)，可期望级数有较好的收敛性.

例 2.3.2 考虑热传导问题

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in (0,l), \qquad t > 0 \\
&u(x,t)|_{t=0} = g(x), \qquad x \in [0,l] \\
&u|_{x=0} = 0; \qquad \left(hu + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=l} = 0
\end{aligned}
\tag{2.3.38}
$$

使用分离变数法可知本征值问题为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = \lambda\varphi, \qquad x \in (0,l) \\
&\varphi|_{x=0} = 0; \qquad \left(h\varphi + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=l} = 0
\end{aligned}
\tag{2.3.39}
$$

上式的通解为

$$\varphi(x) = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

由式(2.3.38)中的边界条件，$c_1=0$ 及

$$c_2(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l) = 0$$

故本征值 λ 满足的方程为

$$-\sqrt{\lambda} = h\tan(l\sqrt{\lambda}) \tag{2.3.40}$$

由图解法可求得上式的根，令 $v = l\sqrt{\lambda}$，上式成为

$$-v = hl\tan(v) \tag{2.3.41}$$

于是上式的解为 $f-v$ 平面上曲线 $f=\tan v$ 和直线 $f=-v/lh$ 的交点. 由图 2.3.1 可知，方程(2.3.41)存在无限多个解($v_1, v_2, \cdots$)并且有

$$\lim_{n\to\infty}|v_n| = \infty$$

图 2.3.1 图解法解方程

容易验证式(2.3.41)的零根 $\lambda=0$ 对应的本征函数 $\varphi_0=0$. 事实上，当 $\lambda=0$ 时，由(2.3.39)第一式 $\varphi_0=c_0+c_1x$，而由边界条件 $c_0=c_1\equiv 0$，故 $\varphi_0\equiv 0$. 因此，零不是式(2.3.39)的本征值. 由于式(2.3.39)是 Sturm-Liouville 型的，故函数系$\{\varphi_n(x)\}$形成完备的正交系，于是混合问题的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\sqrt{\lambda_n}x\exp(-a^2\lambda_n t) \tag{2.3.42}$$

由初始条件

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \sqrt{\lambda_n} x = g(x)$$

故

$$a_n = \frac{1}{\| \varphi_n \|^2} \int_0^l g(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x \, dx$$

其中 $\| \varphi_n \|^2$ 为

$$\| \varphi_n \|^2 = \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x \, dx$$

注意：因 $v = l\sqrt{\lambda} > 0$，故式(2.3.41)的负根应弃去.

2.3.3 椭圆方程的边值问题

考虑下列形式的方程

$$\rho(\boldsymbol{r}) \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r}, y)}{\partial y^2} - \mathbf{L}u = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in G, \qquad y \in (0, l_y) \tag{2.3.43}$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而 y 为单一标量，$\mathbf{L} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$ 仅作用于变量 $\boldsymbol{r}$. 由于 $p(\boldsymbol{r}) > 0$，故对变量 $(\boldsymbol{r}, y)$，式(2.3.43)是椭圆型的. 对区域 G，有边界条件

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \bigg|_{\partial G} = 0,$$

而对 y 有边界条件

$$u(\boldsymbol{r}, y)\big|_{y=0} = f(\boldsymbol{r}); \qquad u(\boldsymbol{r}, y)\big|_{y=l_y} = g(\boldsymbol{r}) \tag{2.3.44}$$

令分离变数解为 $u(\boldsymbol{r}, y) = \varphi(\boldsymbol{r}) T(y)$，可得 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 满足的本征方程

$$\begin{gathered} \mathbf{L}[\varphi(\boldsymbol{r})] = \lambda \rho(\boldsymbol{r}) \varphi(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in G \\ \left(\alpha \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \bigg|_{\partial G} = 0 \end{gathered} \tag{2.3.45}$$

而 $T(y)$ 满足

$$T''(y) - \lambda T(y) = 0, \qquad y \in (0, l_y) \tag{2.3.46}$$

可得 $T(y)$

$$T(y) = a_k \exp(\sqrt{\lambda_n} y) + b_k \exp(-\sqrt{\lambda_n} y) \tag{2.3.47}$$

于是一般解为

$$u(\boldsymbol{r}, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \exp(\sqrt{\lambda_n} y) + b_k \exp(-\sqrt{\lambda_k} y) \right] \varphi_k(\boldsymbol{r})$$

由边界条件式(2.3.44)得决定 a_k 与 b_k 的方程

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \varphi_k(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\exp(\sqrt{\lambda_k}l_y)+b_k\exp(-\sqrt{\lambda_k}l_y)\right]\varphi_k(\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r})$$

因$\{\varphi_k\}$是完备的正交系(假定已归一化),故

$$\begin{aligned}&a_k+b_k=[\varphi_k(\boldsymbol{r}),f(\boldsymbol{r})]\\&a_k\exp(\sqrt{\lambda_k}l_y)+b_k\exp(-\sqrt{\lambda_k}l_y)=[\varphi_k(\boldsymbol{r}),g(\boldsymbol{r})]\end{aligned}\tag{2.3.48}$$

从上二式可求得 a_k 和 b_k.

例 2.3.3 考虑矩形区域上 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x\in(0,l_x),\quad y\in(0,l_y)\\&u(x,y)|_{x=0}=u(x,y)|_{x=l_x}=0\\&u(x,y)|_{y=0}=f(x);\quad u(x,y)|_{y=l_y}=g(x)\end{aligned}\tag{2.3.49}$$

式(2.3.45)简化为

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2}=\lambda\varphi(x);\quad \varphi(x)|_{x=0}=\varphi(x)|_{x=l_x}=0\tag{2.3.50}$$

相应的本征函数和本征值为

$$\varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right);\quad \lambda=\left(\frac{k\pi}{l_x}\right)^2\tag{2.3.51}$$

而式(2.3.47)为

$$T_k(y)=a'_k\exp\left(\frac{k\pi y}{l_x}\right)+b'_k\exp\left(-\frac{k\pi y}{l_x}\right)\tag{2.3.52}$$

或者写成

$$T_k(y)=a_k\sinh\left(\frac{k\pi y}{l_x}\right)+b_k\sinh\left[\frac{k\pi(y-l_y)}{l_x}\right]\tag{2.3.53}$$

a_k 与 b_k 由式(2.3.49)中边界条件决定

$$\begin{aligned}&u(x,y)|_{y=0}=-\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sinh\left(\frac{k\pi l_y}{l_x}\right)\varphi_k(x)=f(x)\\&u(x,y)|_{y=l_y}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sinh\left(\frac{k\pi l_y}{l_x}\right)\varphi_k(x)=g(x)\end{aligned}\tag{2.3.54}$$

于是

$$a_k=\frac{1}{\sinh(k\pi l_y/l_x)}[\varphi_k(x),g(x)];\quad b_k=\frac{-1}{\sinh(k\pi l_y/l_x)}[\varphi_k(x),f(x)]\tag{2.3.55}$$

假定 $f(x)$和 $g(x)$可积

$$\int_0^{l_x}|f|\,\mathrm{d}x<m;\quad \int_0^{l_x}|g|\,\mathrm{d}x<m\tag{2.3.56}$$

则对足够大的 k

$$\left|b_k\sinh\left[\frac{k\pi(y-l_y)}{l_x}\right]\right|\leqslant\frac{\sqrt{2/l_x}\cdot m\exp[k\pi(l_y-y)/l_x]}{\exp(k\pi l_y/l_x)[1-\exp(-2k\pi l_y/l_x)]}$$

$$=\frac{\sqrt{2/l_x}\cdot m\exp(-k\pi y/l_x)}{1-\exp(-2k\pi l_y/l_x)}$$

对$|a_k\sinh[(k\pi/l_x)y]|$有类似的不等式．因此对 $y\in(0,l_y)$，级数中的每项对足够大的 k 指数衰减(在端点 $y=0$ 及 l_y 则不然)，于是

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(y)\varphi_k(x)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,y)\qquad(2.3.57)$$

中各项在区域 $y\in(0,l_y)$可逐项微分．因 $u_k(x,y)$满足 Laplace 方程，故 $u(x,y)$ 也满足 Laplace 方程．为了在端点 $y=0$ 和 l 级数也一致收敛到$f(x)$和 $g(x)$，要求满足相容性条件：

(1) $f(0)=f(l_x)=g(0)=g(l_x)=0$;

(2) $f(x)$与 $g(x)\in C$;

(3) $f'(x)$与 $g'(x)$分段连续．

由以上讨论可见，为了 $u(x,y)$在矩形内满足 Laplace 方程，只要求 $f(x)$与 $g(x)$满足可积条件式(2.3.56)，这时在矩形内 $u(x,y)$无限可微．边界上 $u(x,y)$的不连续性并不影响区域内解的无限可微性．比较波动方程，边界上的不连续性将沿特征线传播到区域内部，这是由于波动方程存在实的特征线，而 Laplace 方程无实特征线，边界的不连续性只能限制在边界，内部仍是光滑的．

2.3.4 非齐次问题的本征函数展开

把式(1.1.70)～(1.1.72)写成统一的形式

$$\rho\mathbf{K}u+\mathbf{L}u=\rho F(\boldsymbol{r},t)\qquad(2.3.58)$$

其中算子 $\mathbf{L}$ 由式(2.2.26)定义，$\mathbf{K}$ 是相应的时间作用算子，分别为 $\mathbf{K}=\partial/\partial t$、$\mathbf{K}=\partial^2/\partial t^2$ 和 $\mathbf{K}=-\partial^2/\partial y^2$．考虑上式的非齐次边界条件

$$\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=B(\boldsymbol{r},t)\qquad(2.3.59)$$

设$\{\varphi_n\}$是本征值问题

$$\mathbf{L}\varphi_n=\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\varphi_n,\quad \boldsymbol{r}\in G$$

$$\left(\alpha\varphi_n+\beta\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0\qquad(2.3.60)$$

的本征函数系（注意，φ_n 满足齐次边界条件!)，并假定$\{\varphi_n\}$是完备的正交系，则在平均收敛的意义下 $u(\boldsymbol{r},t)$可展成广义 Fourier 级数

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)\varphi_k(\boldsymbol{r})\qquad(2.3.61)$$

只要 $u(\boldsymbol{r},t)$带权 $\rho(r)$平方可积，其中 $a_k(t)$为

$$a_k(t) = [\varphi_k(\boldsymbol{r}), u(\boldsymbol{r},t)] \tag{2.3.62}$$

由于 $u(\boldsymbol{r},t)$是未知函数，我们不能断定级数式(2.3.61)可逐项微分，故不能直接把式(2.3.61)代入式(2.3.58)而得到 $a_k(t)$的方程. 但用下法求决定 $a_k(t)$的方程是可行的. 在式(2.3.58)两边乘 $\varphi_k^*(r)$，并在 G 上作积分

$$左边 = \int_G \rho\varphi_k^*(\boldsymbol{r})\mathbf{K}u\mathrm{d}\tau = \mathbf{K}\int_G \rho\varphi_k^*(\boldsymbol{r})u\mathrm{d}\tau \equiv \mathbf{K}[\varphi_k(\boldsymbol{r}), u(\boldsymbol{r},t)] \tag{2.3.63}$$

得到上式，是因为 $\mathbf{K}$ 只对 t 作用，而

$$右边 = -\int_G \varphi_k^* \mathbf{L}u\mathrm{d}\tau + \int_G \rho\varphi_k^* F\mathrm{d}\tau \tag{2.3.64}$$

利用 Green 公式

$$\begin{aligned} -\int_G \varphi_k^* \mathbf{L}u\mathrm{d}\tau &= -\int_G u\mathbf{L}\varphi_k^*\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})\left(\varphi_k^* \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \\ &= -\lambda_k(\varphi_k, u) + \iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r})\left(\varphi_k^* \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{2.3.65}$$

上式已利用 $\mathbf{L}$ 的 Hermite 性即 $\lambda_k = \lambda_k^*$. 对面积分进行讨论：由于 φ_k 满足齐次边界条件，而 $u(\boldsymbol{r},t)$满足非齐次边界条件式(2.3.59)，故可求得关系

$$\left(\varphi_k^* \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = \begin{cases} -\dfrac{B}{\alpha}\dfrac{\partial \varphi_k^*}{\partial n}\bigg|_{\partial G}, & \alpha \neq 0 \\ \dfrac{B}{\alpha}\varphi_k^*\bigg|_{\partial G}, & \beta \neq 0 \end{cases}$$

代入式(2.3.65)应有

$$-\int_G \varphi_k^* \mathbf{L}u\mathrm{d}\tau = -\lambda_k(\varphi_k, u) + \begin{cases} \displaystyle\iint_{\partial G} \frac{B}{\beta}p(\boldsymbol{r})\varphi_k^*\mathrm{d}S, & \beta \neq 0 \\ \displaystyle -\iint_{\partial G} \frac{B}{\alpha}p(\boldsymbol{r})\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial n}\mathrm{d}S, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

令最后一项为 $b_k(t)$

$$b_k(t) = \begin{cases} \displaystyle\iint_{\partial G} \frac{B}{\beta}p(\boldsymbol{r})\varphi_k^*\mathrm{d}S, & \beta \neq 0 \\ \displaystyle -\iint_{\partial G} \frac{B}{\alpha}p(\boldsymbol{r})\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial n}\mathrm{d}S, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

于是，由式(2.3.63)和(2.3.64)得

$$\mathbf{K}a_k + \lambda_k a_k = f_k + b_k \tag{2.3.66}$$

其中

$$f_k = \int_G \rho\varphi_k^* F\mathrm{d}\tau = (\varphi_k, F).$$

(1) 如果 $\mathbf{K}=0$，式(2.3.66)变成代数方程，容易求得

$$a_k = \frac{1}{\lambda_k}(f_k + b_k); \qquad \lambda_k \neq 0$$

因 $\mathbf{L}$ 是正算子，故总有 $\lambda_k>0$，当 $\lambda_0=0$ 是本征值时，应有相容性条件

$$f_0 + b_0 = 0$$

否则问题无解，下面假定零不是本征值.

(2) 当 $\mathbf{K}=-\partial^2/\partial y^2$ 时，式(2.3.66)还必须附以 y 方向的边界条件，由式(2.3.44)和(2.3.62)，边界条件是

$$\begin{aligned} a_k\big|_{y=0} &= (\varphi_k, u\big|_{y=0}) = (\varphi_k, f) \\ a_k\big|_{y=l} &= (\varphi_k, u\big|_{y=l}) = (\varphi_k, g) \end{aligned} \tag{2.3.67}$$

(3) 当 $\mathbf{K}=\partial/\partial t$，则 $a_k(t)$的方程及初始条件为

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}a_k(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda_k a_k(t) = f_k(t) + b_k(t) \\ &a_k(t)\big|_{t=0} = (\varphi_k, u\big|_{t=0}) = [\varphi_k, f(\boldsymbol{r})] \end{aligned} \tag{2.3.68}$$

解为

$$\begin{aligned} a_k(t) &= (\varphi_k, f)\exp(-\lambda_k t) \\ &\quad + \int_0^t [f_k(\tau) + b_k(\tau)]\exp[-\lambda_k(t-\tau)]\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{2.3.69}$$

(4) 当 $\mathbf{K}=\partial^2/\partial t^2$，$a_k(t)$的方程及初始条件为

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 a_k(t)}{\mathrm{d}t^2} + \lambda_k a_k(t) = f_k(t) + b_k(t) \\ &a_k\big|_{t=0} = (\varphi_k, f); \qquad \frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = (\varphi_k, g) \end{aligned} \tag{2.3.70}$$

解为

$$\begin{aligned} a_k(t) &= (\varphi_k, f)\cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(\varphi_k, g)\sin(\sqrt{\lambda_k}t) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^t [f_k(\tau) + b_k(\tau)]\sin[\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{2.3.71}$$

分析广义 Fourier 展开式(2.3.61)可知，由于 $\varphi_k(\boldsymbol{r})$满足齐次边界条件，而 $u(\boldsymbol{r},t)$要求满足非齐次边界条件式(2.3.59)，故式(2.3.61)不可能是式(2.3.58)和(2.3.59)的古典解. 在边界∂G上，式(2.3.61)收敛到边界条件式(2.3.59)只能是广义上的收敛，如均方收敛，而非齐次边界条件的影响则反映在式(2.3.66)中的 $b_k(t)$上.

例 2.3.4　考虑波动方程的共振现象

$$\rho(\boldsymbol{r})u_{tt} + \mathbf{L}u = \rho(\boldsymbol{r})\varphi_m(\boldsymbol{r})\sin\omega t \tag{2.3.72}$$

假定 $f(\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r})=B(\boldsymbol{r},t)=0$,于是

$$f_k(t)=(\varphi_k,F)=(\varphi_k,\varphi_m)\sin\omega t=\delta_{mk}\sin\omega t;\qquad b_k=0$$

由式(2.3.71), 当 $k=m$ 时

$$a_m(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\int_0^t\sin\omega\tau\sin\left[\sqrt{\lambda_m}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\omega^2-\lambda_m}\sin\sqrt{\lambda_m}t-\sin\omega t \tag{2.3.73}$$

而当 $k\neq m$ 时,$a_k=0$, 故级数式(2.3.61)只有一项

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\omega^2-\lambda_m}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\lambda_m}}\sin(\sqrt{\lambda_m}t)-\sin\omega t\right)\varphi_m(\boldsymbol{r}) \tag{2.3.74}$$

当 $\omega=\sqrt{\lambda_m}$时, 取上式的极限

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}}\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda_m}\,t}{\sqrt{\lambda_m}}-t\cos\sqrt{\lambda_m}\,t\right]\varphi_m(\boldsymbol{r}) \tag{2.3.75}$$

可见,当外加强迫振动频率 ω 等于本征值时发生共振现象, $u(\boldsymbol{r},t)$随 t 线性增加, 当时间足够长, 共振项很大, 这时必须引进阻尼或非线性项, 来克服这种非物理的增加.

注意到当 $B(\boldsymbol{r},t)=0$ 时, 只要级数满足一定收敛性条件, 式(2.3.61)严格满足边界条件式(2.3.59). 因此一般总是把边界条件进行齐次化处理. 首先找到一个函数 $v(\boldsymbol{r},t)$, 在∂G 上满足式(2.3.59),于是令 $w=u-v$, 在∂G 上 w 满足齐次边界条件, 而方程则为

$$\rho\mathbf{K}w+\mathbf{L}w=\rho F-(\rho\mathbf{K}+\mathbf{L})v$$

尽管 w 满足的方程复杂了, 但边界齐次化了! 但是对比较复杂的边界,寻找这样的函数是困难的. 我们将在 3.5 节介绍解非齐次问题的另一种方法, 即 Green 函数方法.

2.4 正交曲线坐标系中本征值问题的分离变数

由 2.3 节讨论, 求解有限区域内的定解问题之关键在于求解本征值问题

$$\mathbf{L}\psi_n(\boldsymbol{r})=\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}\in G$$

$$\left.\left(\alpha\psi_n+\beta\frac{\partial\psi_n}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0 \tag{2.4.1}$$

本节专门讨论正交曲线坐标系中本征方程的分离变数, 特别是球坐标系和柱坐标系, 而 $\mathbf{L}$ 则基本上考虑最简单的形式 $\mathbf{L}=-\nabla^2$.

2.4.1 球坐标系中的本征方程

在球坐标下 Laplace 算子为

$$\mathbf{L} = -\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{2.4.2}$$

其中 $r\in(0,\infty)$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$.

首先考虑 Laplace 方程的分离变数解

$$\mathrm{L}\psi = 0 \tag{2.4.3}$$

令

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \tag{2.4.4}$$

代入式(2.4.2)和(2.4.3)

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}$$

上式成立条件是左边和右边恒等于某一常数，记为 $l(l+1)$，于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R = 0 \tag{2.4.5}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y = 0 \tag{2.4.6}$$

式(2.4.5)为 Euler 型方程，具有解

$$R(r) = Cr^l + Dr^{-(l+1)} \tag{2.4.7}$$

式(2.4.6)称为**球函数方程**，仍可进一步分离变数

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{2.4.8}$$

代入式(2.4.6)可得

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi) = 0 \tag{2.4.9}$$

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+[l(l+1)\sin^2\theta-\lambda]\Theta = 0 \tag{2.4.10}$$

其中 λ 为分离变数中出现的常数. 对式(2.4.9)应用周期性边界条件有

$$\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi) \tag{2.4.11}$$

式(2.4.9)和(2.4.11)构成本征值问题，可求得 λ 为

$$\lambda_m = m^2,\qquad m = 0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{2.4.12}$$

相应的归一化本征函数为

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.4.13}$$

式(2.4.10)中令 $x=\cos\theta$, $x\in[-1,1]$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0 \tag{2.4.14}$$

上式是 l 阶**连带 Legendre 方程**, $x=\pm1$ 是其奇点，故存在自然边界条件

$$\Theta|_{x=\pm1} < \infty \tag{2.4.15}$$

根据 2.1 节讨论，$Y(\theta,\varphi)$即为球谐函数

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \qquad |m| \leqslant l \tag{2.4.16}$$

$\{Y_{lm}(\theta,\varphi)\}$构成单位球面上的完备正交系，但没有归一化，注意与式(2.1.64)的区别，于是在球坐标下 Laplace 方程有一般形式的解

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(C_{lm}r^l + D_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{2.4.17}$$

C_{lm}和D_{lm}可有边界条件决定.

例 2.4.1 求球内($r<R$)或球外($r>R$)的势分布且给定球面上的第一类边界条件

$$\psi(r,\theta,\varphi)|_{r=R} = f(\theta,\varphi) \tag{2.4.18}$$

对球内($r<R$)问题，原点 $r=0$ 在区域内，故必须取 $D_{lm}=0$，而 C_{lm}满足

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{lm}R^lY_{lm}(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \tag{2.4.19}$$

于是求得

$$C_{lm} = \frac{1}{\|Y_{lm}\|^2R^l}\iint_{r=R}f(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta,\varphi)d\Omega \tag{2.4.20}$$

其中 $d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$. 对球外($r>R$)问题，要求当 $r\to\infty$，ψ 有限，故必须取 $C_{lm}=0$，而 D_{lm}满足

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}D_{lm}R^{-(l+1)}Y_{lm}(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \tag{2.4.21}$$

于是求得

$$D_{lm} = \frac{R^{l+1}}{\|Y_{lm}\|^2}\iint_{r=R}f(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta,\varphi)d\Omega$$

下面考虑 Laplace 算子的本征值问题

$$\mathbf{L}\psi = \lambda\psi \tag{2.4.22}$$

其中取权函数 $\rho(\mathbf{r})=1$. 令 $\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，采取同上的步骤，可得

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + [\lambda r^2 - l(l+1)]R = 0 \tag{2.4.23}$$

上式称为**球 Bessel 方程**，如作变换

$$x = \sqrt{\lambda}r; \qquad R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x) \tag{2.4.24}$$

则 $y(x)$满足的方程为

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{x}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2y(x) = xy(x) \tag{2.4.25}$$

而 $Y(\theta,\varphi)$同样满足式(2.4.6). 比较式(2.3.25)，上式是$(l+1/2)$阶 Bessel 方程，二个线性独立解为$(l+1/2)$阶 Bessel 函数和 Neumann 函数

$$y(x) = AJ_{l+1/2}(x) + BN_{l+1/2}(x) \tag{2.4.26}$$

定义球 **Bessel 函数**和球 **Neumann 函数**，分别用 $j_l(x)$和 $n_l(x)$表示

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x); \qquad n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x) \tag{2.4.27}$$

因此式(2.4.23)的通解可写成

$$R(r) = A j_l(\sqrt{\lambda} r) + B n_l(\sqrt{\lambda} r). \tag{2.4.28}$$

球 Bessel 方程(2.4.23)可表示为 Sturm-Liouville 型

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + l(l+1)R = \lambda r^2 R \tag{2.4.29}$$

权函数 $\rho(r) = r^2$，而 $p(r) = r^2$. 注意到 $p(0) = 0$，所以 $r = 0$ 是奇点，存在自然边界条件，对球内问题，因 $n_l(x) \to \infty (x \to 0)$，故必须令 $B \equiv 0$.

本征值 λ 由式(2.4.1)中边界条件决定，考虑球内问题 $r \leqslant R$，则径向边界条件变为

$$\left[\alpha R(r) + \beta \frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]\bigg|_{r=R} = 0 \tag{2.4.30}$$

于是 λ 满足方程

$$\alpha j_l(\sqrt{\lambda} R) + \beta \frac{\mathrm{d}j_l(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=\sqrt{\lambda}R} \cdot \sqrt{\lambda} = 0 \tag{2.4.31}$$

设上式第 k 个根为 $\lambda_k^l (k = 1, 2, \cdots)$，根据 2.2 节的讨论

$$\left\{ j_l\left(\sqrt{\lambda_k^l} r\right); \rho = r^2, k = 1, 2, \cdots \right\}$$

构成 $r \in (0, R)$上完备的正交系. 于是，如果 $f(r)$满足

$$\int_0^R r^2 \mid f(r) \mid^2 < \infty$$

可展成广义 Fourier 级数

$$f(r) \cong \sum_{n=1}^{\infty} a_n^l j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l} r\right) \tag{2.4.32}$$

其中广义 Fourier 系数为

$$a_n^l = \frac{1}{\int_0^R \left[j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l} r\right)\right]^2 r^2 \mathrm{d}r} \int_0^R f(r) j_l\left(\sqrt{\lambda_n^l} r\right) r^2 \mathrm{d}r. \tag{2.4.33}$$

因此，球坐标中 Laplace 算子的本征函数为

$$\psi_{lmn}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{N_{lmn}} j_l(\sqrt{\lambda_n^l} r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{2.4.34}$$

其中归一化系数满足

$$N_{lmn}^2 = \int_0^R \iint_{\Omega} \mid Y_{lm}(\theta, \varphi) \mid^2 \left[j_l(\sqrt{\lambda_n^l} r)\right]^2 r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\Omega. \tag{2.4.35}$$

2.4.2 柱坐标系中的本征方程

柱坐标系中 Laplace 算子为

$$\mathbf{L} = -\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \tag{2.4.36}$$

其中 $\rho\in(0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $z\in(-\infty,\infty)$. 首先考虑 Laplace 方程的分离变数解

$$\psi(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{2.4.37}$$

代入 Laplace 方程 $\mathbf{L}\psi=0$ 可得

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0; \qquad Z'' - \mu Z = 0 \tag{2.4.38}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(\mu-\frac{\lambda}{\rho^2}\right)R = 0 \tag{2.4.39}$$

对(2.4.38)第一式仍有周期性边界条件，于是式(2.4.11)和(2.4.13)仍然成立. 对(2.4.38)第二式分三种情况讨论之:

(1) $\mu=0, Z(z)=A+Bz$，相应地，由式(2.4.39)得

$$R(\rho) = \begin{cases} C\rho^{|m|}+D\rho^{-|m|}, & m\neq 0 \\ E+F\ln\rho, & m=0 \end{cases}. \tag{2.4.40}$$

(2) $\mu>0, Z(z)=O\exp(\sqrt{\mu}z)+P\exp(-\sqrt{\mu}z)$，而 $R(\rho)$满足

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R = 0 \tag{2.4.41}$$

其中 $x=\sqrt{\mu}\rho$. 上式为 m 阶 Bessel 方程，故

$$R(\sqrt{\mu}\rho) = EJ_m(\sqrt{\mu}\rho)+DN_m(\sqrt{\mu}\rho) \tag{2.4.42}$$

其中 N_m 为 m 阶 Neumann 函数.

(3) $\mu<0$,可令 $-\mu=k_z^2$,于是 $Z(z)=C\cos k_z z+D\sin k_z z$，而 $R(\rho)$满足

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-\left(1+\frac{m^2}{x^2}\right)R = 0 \tag{2.4.43}$$

其中 $x=k_z\rho$，上式可由 Bessel 方程(2.4.41)令 $x\to ix$ 而得，故称为**虚宗量 Bessel 方程**，它的两个线性独立解分别为第一和第二类变形 Bessel 函数 $I_m(k_z\rho)$和 $K_m(k_z\rho)$

$$R(k_z\rho) = EI_m(k_z\rho)+FK_m(k_z\rho) \tag{2.4.44}$$

参数 $\mu>0$ 或 $=0$，还是<0，须根据具体情况而定，如果要求 ψ 在两端 $z=0$ 和 h 满足齐次边界条件，而在柱面 $\rho=a$ 上给定非齐次边界条件，则要求 $\mu<0$; 反之，如果给定柱面 $\rho=a$ 上齐次边界条件，而两端 $z=0$ 和 h 为非齐次边界条件，由于 $I_m(k_z\rho)$和 $K_m(k_z\rho)$无实零点，故不可能 $\mu<0$，只有 $\mu\geqslant0$. 对第二类边界条件，一般需要考虑 μ 是否为零.

根据 Bessel 方程，定义了 Bessel 函数、Neumann 函数、第一和第二类变形 Bessel 函数等特殊函数，这些函数通称为**柱函数**，我们将在 2.4.4 小节专门介绍它们的性质.

例 2.4.2　求解有限圆柱体内 Laplace 方程的定解问题

$$\begin{aligned}&\nabla^2\psi = 0,\quad \rho\in(0,a),\quad z\in(0,h),\quad \varphi\in[0,2\pi]\\&\psi|_{\rho=a} = f_1(z,\varphi);\quad \psi|_{z=0} = f_2(\rho,\varphi);\quad \psi|_{z=h} = f_3(\rho,\varphi)\end{aligned}\tag{2.4.45}$$

式中 G 为高 h，半径为 a 的柱体. 由于边界条件都是非齐次的，因此令 $\psi=\psi_1+\psi_2$，其中 ψ_1 满足上下底面齐次边界条件，但柱面为非齐次边界

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi_1 = 0\\\psi_1|_{\rho=a} = f_1(z,\varphi);\quad \psi_1|_{z=0} = 0;\quad \psi_1|_{z=h} = 0\end{gathered}\tag{2.4.46}$$

其中 f_1 必须满足相容性条件 $f_1(0,\varphi)=f_1(h,\varphi)=0$. ψ_2满足柱面齐次边界条件，而两底面为非齐次边界

$$\begin{gathered}\nabla^2\psi_2 = 0\\\psi_2|_{\rho=a} = 0;\quad \psi_2|_{z=0} = f_2(\rho,\varphi);\quad \psi_2|_{z=h} = f_3(\rho,\varphi)\end{gathered}\tag{2.4.47}$$

相容性条件为 $f_2(a,\varphi)=f_3(a,\varphi)=0$.

于是，对 ψ_1 有 $\mu<0$，而 $Z(z)$满足边界条件$Z(z)|_{z=0}=Z(z)|_{z=h}=0$，因而求得 $Z(z)=D\sin k_z Z$，本征值 $k_z^n=n\pi/h\,(n=1,2,\cdots)$. 当 $\rho\to0$ 时，$K_m(k_z\rho)\to\infty$发散，故令式(2.4.44)中 $F=0$，于是 ψ_1 为

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}E_n^m\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)I_m\left(\frac{n\pi}{h}\rho\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

其中 E_n^m 由 $\rho=a$ 处的边界条件决定

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}E_n^m\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)I_m\left(\frac{n\pi}{h}a\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} = f_1(z,\varphi)\tag{2.4.48}$$

故 E_n^m 为

$$E_n^m = \frac{1}{\pi hI_m(n\pi a/h)}\int_0^h\int_0^{2\pi}f_1(z,\varphi)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi$$

对 ψ_2 有 $\mu\geqslant0$，本征值 μ 由$\rho=a$ 处的边界条件决定，从式(2.4.42)得 μ 满足$J_m(\sqrt{\mu}a)=0$. 设 $J_m(x)=0$ 的第 n 个根为x_n^m 则

$$\mu_n^m = \left(\frac{x_n^m}{a}\right)^2,\qquad (n = 0,1,2,\cdots)\tag{2.4.49}$$

对 $\mu=0$，因 $\rho=0$ 在区域内，从而式(2.4.40)中 $D=F=0$，又由柱面上齐次边界条件知式(2.4.40)中 $C=E=0$，于是

$$\psi_2(\rho,\varphi,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(E_{mn}\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_n^m}z} + F_{mn}\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_n^m}z})J_m(\sqrt{\mu_n^m}\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

系数 E_m 和 F_m 由上下面 $z=0$ 和 h 的边界条件决定

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(E_{mn}+F_{mn})J_m(\sqrt{\mu_n^m}\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=f_2(\rho,\varphi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(E_{mn}\mathrm{e}^{\sqrt{\mu_n^m}h}+F_{mn}\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_n^m}h})J_m(\sqrt{\mu_n^m}\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=f_3(\rho,\varphi)$$

函数系 $\{J_m(\sqrt{\mu_n^m}\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\}$ 构成完备的正交系，不难从上二式求得 E_{mn} 和 F_{mn}.

下面考虑本征方程 $\mathbf{L}\psi=\lambda\psi$，边界 ∂G 为高 h 和半径 a 的圆柱体侧面及上下底，G 为此柱体之内部，于是齐次边界条件为

$$\left(\alpha_1\psi-\beta_1\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=0;\qquad\left(\alpha_2\psi+\beta_2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=h}=0$$
$$\left(\alpha_3\psi+\beta_3\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)\bigg|_{\rho=a}=0\tag{2.4.50}$$

本征方程在柱坐标下的形式为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\lambda\psi=0\tag{2.4.51}$$

令分离变数解

$$\psi=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\tag{2.4.52}$$

得到

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0;\qquad Z''(z)-\mu Z(z)=0\tag{2.4.53}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\lambda+\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0\tag{2.4.54}$$

对(2.4.53)第一式仍有周期性边界条件，于是式(2.4.11)和(2.4.13)仍然成立. 而由式(2.4.50)知 $\mu<0$ 故令 $-\mu=k_z^2$ 则

$$Z(z)=C\cos k_zz+D\sin k_zz\tag{2.4.55}$$

对式(2.4.54)，令 $x=\sqrt{\lambda-k_z^2}\rho$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0\tag{2.4.56}$$

上式为 m 阶 Bessel 函数，由于问题包含原点，故解为

$$R(\sqrt{\lambda-k_z^2}\rho)=J_m(\sqrt{\lambda-k_z^2}\rho).\tag{2.4.57}$$

本征值 k_z 由上、下底面齐次边界条件决定

$$\alpha_1C-\beta_1k_zD=0$$
$$(\alpha_2-\beta_2k_z\tan k_zh)C+(\alpha_2\tan k_zh+\beta_2k_z)D=0\tag{2.4.58}$$

上式系数行列式为零，即得到决定 k_z 的本征方程

$$\Delta(k_z)=0\tag{2.4.59}$$

以及 C 和 D 之间的关系

$$C=\frac{\beta_1 k_z}{\alpha_1}D \tag{2.4.60}$$

本征值 λ 由径向边界条件决定，令 $k=\sqrt{\lambda-k_z^2}$ 则有

$$\left[\alpha_3 J_m(k\rho)+\beta_3\frac{\mathrm{d}J_m(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]\bigg|_{\rho=a}=0 \tag{2.4.61}$$

设式(2.4.59)的第 n 个根为 k_z^n、式(2.4.61)的第 l 个根为 k_l^m（$l=1,2,\cdots$），结合式(2.4.55)和(2.4.57)得本征函数系为

$$\psi_{lmn}(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{N_{lmn}}J_m(k_l^m\rho)Z_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.4.62}$$

其中归一化系数 N_{lmn} 和 $Z_n(z)$ 为

$$N_{lmn}^2=2\pi\int_0^h\int_0^a Z_n^2(z)[J_m(k_l^m\rho)]^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}z;\qquad Z_n(z)=\frac{\beta_1 k_z^n}{\alpha_1}\cos k_z^n z+\sin k_z^n z$$

2.4.3　椭圆-双曲柱坐标

作变数变换

$$x=\frac{1}{2}a\cosh\mu\cos\varphi;\quad y=\frac{1}{2}a\sinh\mu\sin\varphi;\quad z=z \tag{2.4.63}$$

其中常数 a 由椭圆柱面的焦点决定．显然 $\mu=$ 常数的曲面为 (x,y,z) 坐标系中共焦点椭圆柱面，而 $\varphi=$ 常数的曲面为双曲柱面（其焦点和椭圆柱面相同）．因此，在椭圆-双曲柱坐标系中，正交曲面为共焦点（在 x 轴的 $\pm a/2$ 处）椭圆柱面和双曲柱面，如图 2.4.1．于是，可以把 μ 理解为新的径向参量（相当于柱坐标中 ρ），$\mu\in(0,\infty)$，而 φ 等同于柱坐标中的方向角．空间一点的坐标可用 (μ,φ,z) 来表示，其中 $\mu=(r_1+r_2)/2a$，r_1 和 r_2 分别为 P 点到焦点 $(-a/2,0)$ 和 $(a/2,0)$ 的距离，φ 为原点到 P 点连线与 x 轴的夹角．

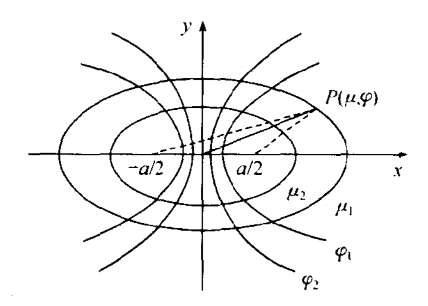


图 2.4.1　椭圆-双曲柱坐标

二维 Laplace 算子为

$$\nabla^2=\frac{4/a^2}{\cosh^2\mu-\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \tag{2.4.64}$$

首先，考虑 Laplace 方程，显然这时 Laplace 方程有十分简单的形式

$$\frac{\partial^2\psi(\mu,\varphi)}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2\psi(\mu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \tag{2.4.65}$$

设分离变数解为 $\psi(\mu,\varphi)=R(\mu)\Phi(\varphi)$代入上式

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi=0;\qquad \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\mu^2}-m^2R=0 \tag{2.4.66}$$

由 Φ 的周期性边界条件知 m 应为整数，相应的本征函数为

$$\Phi_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\quad m=\pm1,\pm2,\cdots \tag{2.4.67}$$

而 R 的解为

$$R(\mu)=\mathrm{e}^{\pm m\mu} \tag{2.4.68}$$

或者 $\sinh m\mu$ 和 $\cosh m\mu$. 因此在椭圆-双曲柱坐标系中，Laplace 方程的一般解为

$$\psi(\mu,\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(A_m\mathrm{e}^{m\mu}+B_m\mathrm{e}^{-m\mu})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.4.69}$$

如把 Φ 写成三角函数形式，$m>0$，于是通解为

$$\psi(\mu,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\mathrm{e}^{m\mu}+B_m\mathrm{e}^{-m\mu})(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi) \tag{2.4.70}$$

取式(2.4.69)还是式(2.4.70)视问题方便而定.

例 2.4.3　考虑椭圆柱面周围的势分布问题，设空间有一椭圆柱面边界，柱面方程为 $\mu=\mu_0$，且椭圆柱面的焦点在 $\pm a/2$ 处. 柱面 $\mu=\mu_0$ 上及无限处的边界条件为

$$\psi(\mu,\varphi)\big|_{\mu=\mu_0}=f(\varphi);\qquad \psi\big|_{\mu\to\infty}=0 \tag{2.4.71}$$

考虑 $\mu>\mu_0$ 或 $\mu<\mu_0$ 两区域的解，可得椭圆柱面外部 $\mu>\mu_0$ 的解

$$\psi(\mu,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\sin m\varphi+B_m\cos m\varphi)\mathrm{e}^{-m\mu},\qquad(\mu>\mu_0) \tag{2.4.72}$$

而椭圆柱面内部 $\mu<\mu_0$ 则有

$$\psi(\mu,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}(C_m\sin m\varphi\sinh m\mu+D_m\cos m\varphi\cosh m\mu),\qquad(\mu<\mu_0) \tag{2.4.73}$$

上式采用双曲函数解，因若仍采用指数解，则 $\psi(\mu,\varphi)$在 $\mu=0$ 处就出现不连续性. 因函数系$\{\cos m\varphi,\sin m\varphi\}$是完备的正交系，式(2.4.72)和(2.4.73)中系数可有边界条件(2.4.71)第一式求得.

下面考虑椭圆-双曲柱面坐标系中的本征值问题，为了简单仍考虑二维(对三维情形不难作修正)

$$\begin{aligned}&-\nabla^2\psi=\lambda\psi,\qquad(\mu,\varphi)\in G\\&\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0\end{aligned} \tag{2.4.74}$$

其中 G 为椭圆 $\mu=\mu_0$ 内部. 由式(2.4.64)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} a^2 \lambda (\cosh^2 \mu - \cos^2 \varphi) \psi = 0 \tag{2.4.75}$$

设分离变数解为

$$\psi(\mu, \varphi) = R(\mu) \Phi(\varphi) \tag{2.4.76}$$

代入式(2.4.75)得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + (b - h^2 \cos^2 \varphi) \Phi = 0 \tag{2.4.77}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\mu^2} + (b - h^2 \cosh^2 \mu) R = 0 \tag{2.4.78}$$

其中 $h = a\sqrt{\lambda}/2$，而 b 为分离变数出现的常数. 上式中令 $\mu = \mathrm{i}\eta$ 则有

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\eta^2} + (b - h^2 \cos^2 \eta) R = 0 \tag{2.4.79}$$

与式(2.4.77)有相同的形式，故只需讨论一个即可. 式(2.4.77)称为 **Mathieu 方程**，而式(2.4.78)称为**虚宗量 Mathieu 方程**.

对式(2.4.77)仍有周期性边界条件

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \tag{2.4.80}$$

因此，我们要求式(2.4.77)的周期解且周期为 2π

$$\Phi(\varphi) = A\,\mathrm{So}_{2m+1}(\varphi) + B\,\mathrm{Se}_{2m+1}(\varphi) \tag{2.4.81}$$

其中 $\mathrm{So}_{2m+1}(\varphi)$关于 $\varphi = 0$ 是奇函数，而 $\mathrm{Se}_{2m+1}(\varphi)$是偶函数. 式(2.4.77)还有一组周期为 π 的解

$$\Phi(\varphi + \pi) = \Phi(\varphi) \tag{2.4.82}$$

记为 $\mathrm{So}_{2m}(\varphi)$和 $\mathrm{Se}_{2m}(\varphi)$. 这些函数称为 **Mathieu 函数**. 实变 Mathieu 函数可用三角函数来展开，而虚变数 Mathieu 函数可用 Bessel 函数来展开.

只有当 b 和 h 满足一定的关系，Mathieu 方程才有周期解，这一关系即为决定本征值 λ 和 b 的方程. 这里不作进一步的讨论.

还有其他曲线坐标系，如椭球坐标系. 根据不同的边界条件，选取合适的坐标系，可使问题大大地简单，这里仅介绍柱、球和椭圆-双曲柱三种形式.

2.4.4 柱函数：Bessel 函数的几种不同形式

2.4.1 小节和 2.4.2 小节中我们经常遇到 Bessel 方程. 因此有必要讨论一下它的解的性质. 考虑任意 v 阶 Bessel 方程

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - v^2) y = 0 \tag{2.4.83}$$

由于 $x = 0$ 是 Bessel 方程的正则奇点，存在 $x = 0$ 处有限的解，即为 Bessel 函数 $J_v(x)$，它具有级数形式

$$J_v(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k} \tag{2.4.84}$$

而 Bessel 方程的另一个解在 $x=0$ 有奇性，它一般取下列形式

$$N_v(x)=\frac{\cos v\pi J_v(x)-J_{-v}(x)}{\sin v\pi} \tag{2.4.85}$$

$J_v(x)$和 $N_v(x)$分别称为 Bessel 函数和 Neumann 函数. 前三个 Bessel 函数和前三个 Neumann 函数如图 2.4.2 和 2.4.3. 显然取 $J_v(x)$和 $N_v(x)$的线性组合也应是 Bessel 方程的解

$$\begin{aligned} H_v^{(1)}(x)&=J_v(x)+\mathrm{i}N_v(x)\\ H_v^{(2)}(x)&=J_v(x)-\mathrm{i}N_v(x)\end{aligned} \tag{2.4.86}$$

称 $H_v^{(1)}(x)$和 $H_v^{(2)}(x)$为第三类 Bessel 函数，或称为第一和第二类 Hankel 函数. 三类 Bessel 函数通称为**柱函数**.

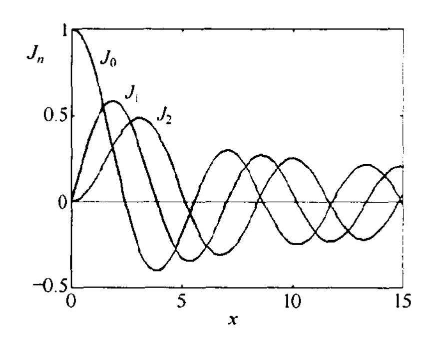


图 2.4.2 前三个 Bessel 函数

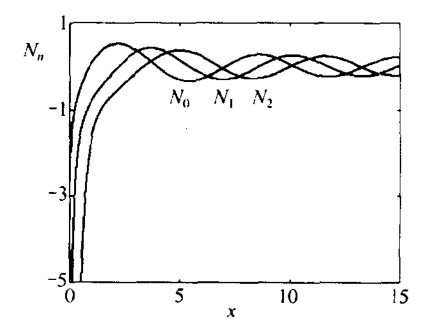


图 2.4.3 前三个 Neumann 函数

考察柱函数当 $x\to\infty$时的渐近式

$$\begin{aligned} J_v(x)&\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-3/2})\\ N_v(x)&\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-3/2})\end{aligned} \tag{2.4.87}$$

$$\begin{aligned} H_v^{(1)}(x)&\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[\mathrm{i}\left(x-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O(x^{-3/2})\\ H_v^{(2)}(x)&\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-\mathrm{i}\left(x-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O(x^{-3/2})\end{aligned} \tag{2.4.88}$$

可见：(1) $J_v(x)$或 $N_v(x)$在无穷远处有振荡特性；(2) $J_v(x)$或 $N_v(x)$在 x 轴上有无穷多个零点；(3) $H_v^{(1)}$ 和 $H_v^{(2)}$ 与 $J_v(x)$和 $N_v(x)$的关系，就像正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 与指数函数 $\exp(\pm\mathrm{i}x)$的关系.

当 $x\to 0$ 时，对整数阶柱函数有渐近关系

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{1}{4}x^2; \quad N_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2} \tag{2.4.89}$$

$$J_m(x) \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m; \quad N_m(x) \approx -\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^m, (m \neq 0) \tag{2.4.90}$$

$$H_0^{(1)}(x) \approx \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}; \quad H_0^{(2)} \approx -\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2} \tag{2.4.91}$$

$$H_m^{(1)}(x) \approx -\mathrm{i}\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}; \quad H_m^{(2)}(x) \approx \mathrm{i}\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}, (m \neq 0) \tag{2.4.92}$$

可见，N_v 和 H_v 在 $x=0$ 处有奇性. 取何种形式的柱函数，由具体的物理问题决定. 例如，如果 $x=0$ 在区域内，只能取 $J_v(x)$. 由于式(2.4.87)表示一种驻波解，而驻波只能在有限空间中反射形成，因此，在有限空间中取 J_v 和 N_v 较方便；反之，式(2.4.88)表示行波解，而行波只有在无穷空间才能实现，因此，考虑波的辐射和散射问题时，取 Hankel 函数较为方便.

取式(2.4.84)中 $x \to \mathrm{i}x$

$$J_v(\mathrm{i}x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{\mathrm{i}x}{2}\right)^{v+2k}$$

当 $v=$ 整数时，上式为

$$J_m(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \tag{2.4.93}$$

令 $I_m(x)=(\mathrm{i})^{-m}J_m(\mathrm{i}x)$，$I_m(x)$称为**第一类变形 Bessel 函数**

$$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \tag{2.4.94}$$

显然 $I_m(x)$满足虚宗量 Bessel 方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - (x^2+v^2)y = 0 \tag{2.4.95}$$

上式的另一个线性独立解定义为 $K_v(x)$

$$K_v(x) = \frac{\pi[I_{-v}(x) - I_v(x)]}{2\sin\pi v} \tag{2.4.96}$$

称为**第二类变形 Bessel 函数**. 前三个第一和第二类变形 Bessel 函数如图 2.4.4 和 2.4.5. 当 $x\to\infty$时有渐近式

$$I_v(x) \approx \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}[1+O(x^{-1})]; \qquad K_v(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{e}^{-x}[1+O(x^{-1})] \tag{2.4.97}$$

因此，$I_v(x)$在无穷远处发散，当处理的问题涉及无穷远处时，应去掉 $I_v(x)$. 当 $x\approx 0$ 时

$$I_0(x) \cong 1 + \frac{1}{4}x^2; \qquad I_m(x) \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m, \qquad (m \neq 0) \tag{2.4.98}$$

而 $K_v(x)$在 $x\approx 0$ 有奇性

$$K_0(x) \sim -\ln\frac{x}{2}; \qquad K_m(x) \sim \frac{(m-1)!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}, \qquad (m \neq 0)$$

故当考虑的物理问题包含原点时应去掉 $K_m(x)$.

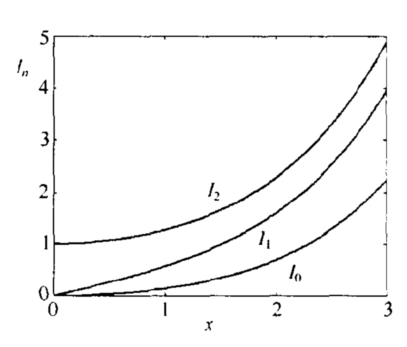


图 2.4.4 第一类变形 Bessel 函数

图 2.4.5 第二类变形 Bessel 函数

在球坐标系中分离 Laplace 算子的本征方程时，得到球 Bessel 方程(2.4.23)，它可化为半整数阶 Bessel 方程(2.4.25). 定义球 Bessel 函数为

$$\begin{aligned} j_v(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{v+1/2}(x); \qquad n_v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{v+1/2}(x) \\ h_v^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{v+1/2}^{(1)}(x); \qquad h_v^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{v+1/2}^{(2)}(x) \end{aligned} \tag{2.4.99}$$

分别称 j_v 和 n_v 为第一、第二类**球 Bessel 函数**. $h_v^{(1)}(x)$和 $h_v^{(2)}(x)$为第一、第二类**球 Hankel 函数**.

各种球函数的物理解释与柱函数是对称的，无需再述. 但球函数可用初等函数来表示，例如

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}; \qquad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

$$h_0^{(1)}(x) = -\frac{i}{x}e^{ix}; \qquad h_0^{(1)}(x) = -\frac{i}{x}e^{ix}$$

2.5 无穷区域混合问题的分离变数法

当物理问题涉及无穷或半无穷区域时，边界条件已不存在. 这时 **L** 的本征谱一般是连续的，因此通解应对本征谱求积分

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t,\lambda)\varphi_\lambda(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\lambda \tag{2.5.1}$$

问题是本征函数 $\varphi_\lambda(\boldsymbol{r})$如何归一化？显然，不能指望 $\varphi_\lambda(\boldsymbol{r})$平方可积，即

$$\int_\infty \rho(\boldsymbol{r})\,|\varphi_\lambda(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = 1$$

不再成立，因区域遍及整个空间，积分可能发散．下面通过具体例子说明本征函数 $\varphi_\lambda(\boldsymbol{r})$的归一化和如何用积分变换方法求解无穷区域或半无穷区域内的定解问题．

2.5.1　波动方程的 Cauchy 问题

首先考虑一维问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x\in(-\infty,\infty), \qquad t>0 \\ &u|_{t=0} = f(x); \qquad u_t|_{t=0} = g(x), \qquad x\in(-\infty,\infty) \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

式 (2.5.2)中 $\mathrm{L} = -\partial^2/\partial x^2$，本征方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_\lambda}{\mathrm{d}x^2} + \lambda^2\varphi_\lambda = 0 \tag{2.5.3}$$

要求 φ_λ在 $x\to\pm\infty$处有界，故本征值应大于零 $\lambda^2>0$，于是上式的解为

$$\varphi_\lambda(x) = A_\lambda \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda x} \tag{2.5.4}$$

显然，不可能要求 φ_λ 正交归一到 $\delta_{\lambda\lambda'}$函数．事实上

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\lambda^*\varphi_{\lambda'}\mathrm{d}x = A_\lambda^* A_{\lambda'}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda\pm\lambda')x}\mathrm{d}x = 2\pi A_\lambda^* A_{\lambda'}\delta(\lambda\pm\lambda')$$

其中 $\delta(\lambda\pm\lambda')$为 Dirac-$\delta$ 函数(见下章讨论)

$$\delta(\lambda\pm\lambda') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda\pm\lambda')x}\mathrm{d}x$$

于是，如果取 $A_\lambda = 1/\sqrt{2\pi}$，则

$$\varphi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \tag{2.5.5}$$

归一化到 δ 函数．式(2.5.2)的通解可写成

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[C(\lambda,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} + D(\lambda,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}]\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \tag{2.5.6}$$

显然上式是 Fourier 积分，有逆变换

$$U(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \tag{2.5.7}$$

$U(\lambda,t)$称为 $u(x,t)$的 Fourier 积分．这是我们熟知的，任一属于 $L^2(-\infty,\infty)$的函数 $f(x)$，它的 Fourier 积分

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \tag{2.5.8}$$

存在. 下面回到定解问题式(2.5.2). 式(2.5.6)代入(2.5.2)中第一式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t^2} + c^2\lambda^2 U(\lambda,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{2.5.9}$$

而由式(2.5.7), $U(\lambda,t)$满足初始条件

$$\begin{aligned} U(\lambda,t)|_{t=0} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \equiv F(\lambda) \\ \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \equiv G(\lambda) \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

$F(\lambda)$和 $G(\lambda)$分别为 $f(x)$和 $g(x)$的 Fourier 积分. 结合式(2.5.9)和(2.5.10)可得

$$U(\lambda,t) = \frac{1}{2}\left[F(\lambda) + \frac{1}{\mathrm{i}\lambda c}G(\lambda)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda ct} + \frac{1}{2}\left[F(\lambda) - \frac{1}{\mathrm{i}\lambda c}G(\lambda)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda ct} \tag{2.5.11}$$

代入式(2.5.6)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}U(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-ct)}F(\lambda)\mathrm{d}\lambda + \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x+ct)}F(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right] \\ &\quad + \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-ct)}\frac{G(\lambda)}{\mathrm{i}\lambda}\mathrm{d}\lambda - \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x+ct)}\frac{G(\lambda)}{\mathrm{i}\lambda}\mathrm{d}\lambda\right] \end{aligned}$$

利用

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}G(\lambda)\mathrm{d}\lambda; \qquad \int^{x} g(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{-\mathrm{i}\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}G(\lambda)\mathrm{d}x \tag{2.5.12}$$

不难推出

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x+ct}^{x-ct} g(s)\mathrm{d}s \tag{2.5.13}$$

上式是熟知的 d′ Alembert 解.

对三维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\nabla^2 u &= 0 \\ u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{r}); &\qquad u_t|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

也可用同样的方法处理. 本征函数

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

归一化到 $\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$, 令

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int U(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{2.5.15}$$

$$U(\boldsymbol{k},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{2.5.16}$$

代入波动方程，得 $U(\boldsymbol{k},t)$的方程

$$U_{tt}+k^2c^2U(k,t)=0 \tag{2.5.17}$$

由初始条件，得 $U(\boldsymbol{k},t)$的初值

$$U\big|_{t=0}=\Phi(\boldsymbol{k});\qquad U_t\big|_{t=0}=\Psi(\boldsymbol{k}) \tag{2.5.18}$$

其中 $\Phi(\boldsymbol{k})$和 $\Psi(\boldsymbol{k})$分别为 $\varphi(\boldsymbol{r})$和 $\psi(\boldsymbol{r})$的三维 Fourier 积分. 于是容易从式(2.5.17)和(2.5.18)得

$$U(\boldsymbol{k},t)=\Phi(\boldsymbol{k})\cos kct+\Psi(\boldsymbol{k})\frac{\sin kct}{kc}$$

上式代入式(2.5.15)得

$$\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left[\Phi(\boldsymbol{k})\cos kct+\Psi(\boldsymbol{k})\frac{\sin kct}{kc}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\\
&=\frac{1}{8\pi^3}\iint\left[\varphi(\boldsymbol{r}')\cos kt+\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\sin kct}{kc}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\
&=\frac{1}{8\pi^3}\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(\boldsymbol{r}')\left[\int\frac{\sin kct}{kc}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\
&\quad+\frac{1}{8\pi^3}\int\psi(\boldsymbol{r}')\left[\int\frac{\sin kct}{kc}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'
\end{aligned}$$

考虑上式中的积分，由于在积分过程中$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$是常量，可取 $\boldsymbol{k}$ 与$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$的夹角为 θ，即 $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta$，于是角度部分可简单积出

$$\begin{aligned}
I&\equiv\int\frac{\sin kct}{kc}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}=\int_0^{2\pi}d\varphi_k\int_0^{\pi}d\theta_k\int_0^{\infty}\frac{\sin kct}{kc}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta_k}k^2\sin\theta_k\mathrm{d}k\\
&=\frac{4\pi}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^{\infty}\sin kct\ \sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\,\mathrm{d}k
\end{aligned}$$

利用积分关系以及 δ 的偶函数性质

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k;\qquad\delta(x)=\delta(-x)$$

不难推出

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\sin kct\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\,\mathrm{d}k&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin kct\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\,\mathrm{d}k\\
&=-\frac{\pi}{2}[\delta(ct+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)-\delta(ct-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)]
\end{aligned}$$

由于 $ct+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|>0$，第一个 δ 函数为零，于是可得到

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\varphi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-ct)\mathrm{d}\tau'$$

$$+\frac{1}{4\pi c}\int\frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-ct)\mathrm{d}\tau' \qquad (2.5.19$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(\boldsymbol{r}')G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau'+\int\psi(\boldsymbol{r}')G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau'$$

其中

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\frac{1}{4\pi c}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-ct) \qquad (2.5.20)$$

称为初值问题式(2.5.14)的 Green 函数(见第三章). 利用 δ 函数的积分性质，不难看出式(2.5.19)与 Poisson 公式(1.2.19)完全一致.

2.5.2 Laplace 方程的边值问题

如图 2.5.1，考虑二维 Laplace 方程上半平面的第一边值问题

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0, \quad x\in(-\infty,\infty), \quad y>0\\&u(x,y)|_{y=0}=f(x), \quad x\in(-\infty,\infty)\end{aligned} \qquad (2.5.21)$$

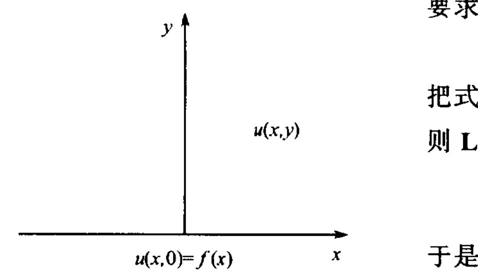


图 2.5.1 上半平面的第一边值问题

要求解在无穷远处

$$\lim_{|x|,y\to\infty}u(x,y)\to 0 \qquad (2.5.22)$$

把式(2.5.21)写成 $u_{yy}-\mathbf{L}u=0$ 的形式，则 $\mathbf{L}=-\partial^2/\partial x^2$ 的本征函数 φ_λ 满足

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_\lambda}{\mathrm{d}x^2}=\lambda^2\varphi_\lambda$$

于是有

$$\varphi_\lambda(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda x}$$

因此可把 u 在 x 方向展成 Fourier 积分

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(y,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \qquad (2.5.23)$$

$$U(y,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \qquad (2.5.24)$$

代入式(2.5.21)第一式得

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y^2}-\lambda^2U=0, \quad 0<y<\infty \qquad (2.5.25)$$

由式(2.5.24)得 y 方向的边界条件

$$U(y,\lambda)|_{y=0}=F(\lambda) \qquad (2.5.26)$$

其中 $F(\lambda)$是 $f(x)$的 Fourier 积分. 由式(2.5.25)和(2.5.26)可得

$$U(y,\lambda)=F(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}$$

(因要求 $y\to\infty$时 $U=0$)，于是

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x-|\lambda|y}F(\lambda)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(x-t)\lambda-|\lambda|y}f(t)d\lambda dt$$

对 λ 可积出

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda(x-t)-|\lambda|y}d\lambda=\int_{-\infty}^{0}e^{\lambda[-i(x-t)+y]}d\lambda+\int_{0}^{\infty}e^{\lambda[-i(x-t)-y]}d\lambda$$

$$=\frac{2y}{(x-t)^2+y^2}$$

于是有

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt. \tag{2.5.27}$$

利用上述结果，可求得第二类边值问题 $u_y|_{y=0}=g(x)$的解. 只要令

$$v(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

显然

$$\nabla^2 v(x,y)=\nabla^2 u_y=\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 u)=0$$

$$v(x,y)|_{y=0}=u_y(x,0)=g(x)$$

于是

$$u(x,y)=\int^{y}v(x,s)ds$$

$$=\frac{1}{\pi}\int^{y}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sg(t)}{(x-t)^2+s^2}dtds=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int^{y}\frac{sds}{(s-t)^2+s^2}\right]g(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[(x-t)^2+y^2]g(t)dt \tag{2.5.28}$$

下面考虑二维 Laplace 方程在带状区域内的第一边值问题，如图 2.5.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.5.29}$$

$$u(0,y)=0,\quad u(x,a)=0$$
$$u(x,0)=f(x) \tag{2.5.30}$$

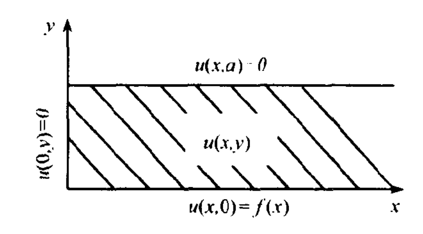


图 2.5.2 带状区域的第一边值问题

并且当 $x\to\infty$, $u(x,y)$关于 y 一致地趋向于零. 本征方程

$$-\frac{d^2\varphi_\lambda}{dx^2}=\lambda^2\varphi_\lambda \tag{2.5.31}$$

的解

$$\varphi_\lambda = A_\lambda \cos\lambda x + B_\lambda \sin\lambda x \tag{2.5.32}$$

如果 $\lambda^2<0$，令 $-\lambda^2=k>0$，则

$$\varphi_k = A_k e^{\sqrt{k}x} + B_k e^{-\sqrt{k}x}, \qquad \varphi_0 = A_0 + B_0 x$$

因 $x\to\infty$时，φ_k有限，故 $A_k\equiv0$．又$\varphi_k|_{x=0}=0$，故 $B_k\equiv0$，因此$\lambda^2>0$．由 $x=0$ 处边界条件 $\varphi_\lambda|_{x=0}=0, A_\lambda\equiv0$，故本征函数为

$$\varphi_\lambda(x) = B_\lambda \sin\lambda x, \qquad 0<x<\infty \tag{2.5.33}$$

本征谱 $\lambda:0<\lambda<\infty$．考察 $\varphi_\lambda(x)$的归一化

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\varphi_{\lambda'}\mathrm{d}x &= B_\lambda B_{\lambda'}\int_0^\infty \sin\lambda' x\sin\lambda x\mathrm{d}x \\
&= B_{\lambda'} B_\lambda\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)^2\int_0^\infty (e^{\mathrm{i}\lambda' x}-e^{-\mathrm{i}\lambda' x})(e^{\mathrm{i}\lambda x}-e^{-\mathrm{i}\lambda x})\mathrm{d}x \\
&= -\frac{B_{\lambda'} B_\lambda}{4}\left\{\int_0^\infty [e^{\mathrm{i}(\lambda'+\lambda)x}+e^{-\mathrm{i}(\lambda+\lambda')x}]\,\mathrm{d}x\right. \\
&\quad \left.+\int_0^\infty[-e^{\mathrm{i}(\lambda'-\lambda)x}-e^{\mathrm{i}(\lambda-\lambda')x}]\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= -\frac{B_{\lambda'} B_\lambda}{4}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{\mathrm{i}(\lambda+\lambda')x}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^\infty e^{\mathrm{i}(\lambda'-\lambda)x}\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{B_{\lambda'} B_\lambda}{4}2\pi[\delta(\lambda+\lambda')-\delta(\lambda'-\lambda)]
\end{aligned}$$

因 $\lambda>0,\lambda'>0,\lambda+\lambda'\neq0$,故

$$\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\varphi_{\lambda'}(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}B_\lambda B_{\lambda'}\delta(\lambda'-\lambda) \tag{2.5.34}$$

取 $B_\lambda=\sqrt{2/\pi}$，则 φ_λ 归一化到 δ 函数，于是

$$\varphi_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\lambda x, \qquad 0<x<\infty, \qquad 0<\lambda<\infty \tag{2.5.35}$$

$$u(x,y) = \int_0^\infty U(\lambda,y)\varphi_\lambda(x)\mathrm{d}\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\lambda,y)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda \tag{2.5.36}$$

上式两边乘 $\varphi_{\lambda'}(x)$并对 x 积分

$$\int_0^\infty u(x,y)\varphi_{\lambda'}(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty U(\lambda,y)\left[\int_0^\infty \varphi_{\lambda'}(x)\varphi_\lambda(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\lambda$$

利用式(2.5.34)即得

$$U(\lambda,y) = \int_0^\infty u(x,y)\varphi_\lambda(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,y)\sin\lambda x\mathrm{d}x \tag{2.5.37}$$

称为 $u(x,y)$的 **Sine-Fourier 积分**，逆变换即为式(2.5.36)，代入式(2.5.29)可得

$$\frac{\mathrm{d}^2U(\lambda,y)}{\mathrm{d}y^2} - \lambda^2U(\lambda,y) = 0 \tag{2.5.38}$$

由式(2.5.37)得边界条件

$$U(\lambda,y)\mid_{y=a}=0;\qquad u(\lambda,y)\mid_{y=0}=F(\lambda)\tag{2.5.39}$$

其中 $F(f)$为 $f(x)$的 Sine-Fourier 积分. 于是由式(2.5.38)和(2.5.39)可得

$$U(\lambda,y)=F(\lambda)\frac{\sinh[\lambda(a-y)]}{\sinh(a\lambda)}\tag{2.5.40}$$

因此所求解为

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\lambda,y)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t)\sin(\lambda t)\sin(\lambda x)\frac{\sinh[\lambda(a-y)]}{\sinh(a\lambda)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda\end{aligned}\tag{2.5.41}$$

当 $a\to\infty$时式(2.5.29)和(2.5.30)变成第一象限内第一边值问题

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad x>0,y>0$$

$$u(x,y)\mid_{x=0}=0,\qquad u(x,y)\mid_{y=0}=f(x),\qquad x>0$$

$$\lim_{x\to\infty}u(x,y)\to 0$$

式(2.5.41)中取 $a\to\infty$

$$\sinh[\lambda(a-y)]/\sinh(a\lambda)\approx \mathrm{e}^{-\lambda y}$$

于是

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t)\sin\lambda t\sin\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda y}\{\cos[\lambda(x-t)]-\cos[\lambda(x+t)]\}\mathrm{d}\lambda\right]f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{y}{y^2+(x-t)^2}-\frac{y}{y^2+(x+t)^2}\right]f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

即

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{y^2+(x-t)^2}-\frac{1}{y^2+(x+t)^2}\right]f(t)\mathrm{d}t.\tag{2.5.42}$$

如果 $x=0$ 处是第二类边界条件 $u_x(0,y)=0$,那么应取式(2.5.32)中 $B_\lambda\equiv0$,通过类似的推导可以得到

$$\varphi_\lambda(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\lambda x,\qquad 0<x<\infty,\qquad 0<\lambda<\infty$$

$$u(x,y)=\int_0^\infty U(\lambda,y)\varphi_\lambda(x)\mathrm{d}\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(\lambda,y)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

$$U(\lambda,y)=\int_0^\infty u(x,y)\varphi_\lambda(x)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,y)\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

称为 $u(x,y)$的 **Cosine-Fourier 积分**.

如果 $x=0$ 处是第三类边界条件$[\alpha u(x,y)-\beta u_x(x,y)]_{x=0}=0$,由式(2.5.32)代入边界条件得 $\alpha A_\lambda=\beta\lambda B_\lambda$, 于是

$$\varphi_\lambda(x) = B_\lambda\left(\sin\lambda x + \frac{\beta}{\alpha}\lambda\cos\lambda x\right)$$

$\varphi_\lambda(x)$的积分

$$\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\varphi_{\lambda'}\mathrm{d}x = B_\lambda B_{\lambda'}\int_0^\infty\left(\sin\lambda x + \frac{\beta}{\alpha}\lambda\cos\lambda x\right)\left(\sin\lambda' x + \frac{\beta}{\alpha}\lambda'\cos\lambda' x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{B_{\lambda'}B_\lambda\pi}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\lambda^2\right)\delta(\lambda' - \lambda)$$

其中已利用 $\lambda + \lambda' > 0$. 因此本征函数为

$$\varphi_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1 + \lambda^2\beta/\alpha)}}\left(\sin\lambda x + \frac{\beta}{\alpha}\lambda\cos\lambda x\right).$$

2.5.3 二维轴对称波动方程

考虑平面极坐标中二维波动方程的 Cauchy 问题，求与 θ 无关的轴对称解 $u = u(r,t)$

$$\begin{gathered} u_{tt} - c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = 0, \qquad r > 0, \qquad t > 0 \\ u\big|_{t=0} = f(r); \qquad u_t\big|_{t=0} = g(r) \end{gathered} \tag{2.5.43}$$

算子 $\mathbf{L}$ 为

$$\mathbf{L} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right),$$

相应的本征方程为

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\varphi_\lambda = \lambda^2\varphi_\lambda(r) \tag{2.5.44}$$

当 $\lambda^2 < 0$ 时，上式的解为虚宗量 Bessel 函数，因 $I_v(x)\to\infty(x\to\infty)$，而 $K_v(x)\to\infty(x\to 0)$，故 $\lambda^2<0$ 应排除；当 $\lambda = 0$ 时，上式有解 $\varphi_0(r) = c_1\ln r + c_2$，而 $r\to 0$ 时 $\ln r\to\infty$，故应有 $c_1 \equiv 0$，因此只有 $\lambda^2 \geqslant 0$. 这时式(2.5.44)为零级 Bessel 方程，故求得本征函数

$$\varphi_\lambda(r) = A_\lambda J_0(\lambda r) \tag{2.5.45}$$

方程(2.5.44)写成 Sturm-Liouville 形式

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi_\lambda}{\mathrm{d}r}\right) = \lambda^2 r\varphi_\lambda(r)$$

显然权函数为 $\rho(r) = r$. 考察归一化积分

$$\int_0^\infty \rho(r)\varphi_\lambda(r)\varphi_{\lambda'}(r)\mathrm{d}r = A_\lambda A_{\lambda'}\int_0^\infty J_0(\lambda r)J_0(\lambda' r)r\mathrm{d}r = A_\lambda A_{\lambda'}\frac{\delta(\lambda - \lambda')}{\lambda}$$

我们不严格证明上式，仅给出近似的估计，注意到当 λ 和 λ' 较大时

$$J_0(\lambda r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}}\cos(\lambda r); \qquad J_0(\lambda' r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda' r}}\cos(\lambda' r)$$

于是

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)J_0(\lambda' r)r\mathrm{d}r \approx \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda\lambda'}}\int_0^\infty \cos(\lambda r)\cos(\lambda' r)\mathrm{d}r = \frac{2}{\pi\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\delta(\lambda-\lambda')$$

因此取 $A_\lambda=\sqrt{\lambda}$. 令

$$u(r,t) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(r)U(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda \tag{2.5.46}$$

为了求逆变换，上式两边乘 $\varphi_{\lambda'}(r)\rho(r)$并积分

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u(r,t)\varphi_{\lambda'}(r)\rho(r)\mathrm{d}r &= \int_0^\infty\left[\int_0^\infty \varphi_\lambda(r)\varphi_{\lambda'}(r)\rho(r)\mathrm{d}r\right]U(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^\infty \delta(\lambda-\lambda')U(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda = U(\lambda',t)\end{aligned}$$

于是

$$U(\lambda,t) = \int_0^\infty u(r,t)\varphi_\lambda(r)\rho(r)\mathrm{d}r = \sqrt{\lambda}\int_0^\infty u(r,t)J_0(\lambda r)r\mathrm{d}r \tag{2.5.47}$$

把式(2.5.46)和(2.5.47)写成对称形式，令

$$\overline{U}(\lambda,t) = \frac{U(\lambda,t)}{\sqrt{\lambda}} \tag{2.5.48}$$

代入式(2.5.46)

$$\begin{aligned}u(r,t) &= \int_0^\infty \varphi_\lambda(r)U(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \sqrt{\lambda}J_0(\lambda r)U(\lambda,r)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^\infty J_0(\lambda r)\overline{U}(\lambda,t)\lambda\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

于是式(2.5.46)和(2.5.47)可改写成对称的变换对

$$\begin{aligned}u(r,t) &= \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r)U(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda \\ U(\lambda,t) &= \int_0^\infty rJ_0(\lambda r)u(r,t)\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{2.5.49}$$

称为零级 Hankel 变换. 代入式(2.5.43)得 U 满足的方程

$$U_{tt}(\lambda,t) + \lambda^2c^2U(\lambda,t) = 0 \tag{2.5.50}$$

由(2.5.49)第二式得 $U(\lambda,t)$的初值

$$\begin{aligned}U(\lambda,0) &= \int_0^\infty rJ_0(\lambda r)f(r)\mathrm{d}r \equiv F(\lambda) \\ U_t(\lambda,t)\big|_{t=0} &= \int_0^\infty rJ_0(\lambda r)g(r)\mathrm{d}r \equiv G(\lambda)\end{aligned} \tag{2.5.51}$$

式(2.5.50)和(2.5.51)的解为

$$U(\lambda,t)=F(\lambda)\cos(\lambda ct)+G(\lambda)\frac{\sin(\lambda ct)}{\lambda c} \tag{2.5.52}$$

于是得解

$$u(r,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty F(\lambda)\frac{\sin(\lambda ct)}{c}J_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda+\int_0^\infty G(\lambda)\frac{\sin(\lambda ct)}{c}J_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda. \tag{2.5.53}$$

2.5.4　应用于平板的光热激发

考虑平板的光热激发问题，如图 2.5.3，平板上表面受轴向对称的激光束照射，由于材料吸收光而导致温度上升，于是平板内的瞬态温度场满足非齐次热扩散方程

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(r,z,t)}{\partial t}-\xi\nabla^2 u(r,z,t)=a_0 f(r,z)\chi(t)\\ 0<r<\infty,\qquad 0<z<h,\qquad t>0\end{gathered} \tag{2.5.54}$$

其中 ξ 为平板材料的热扩散系数，$f(r,z)$和 $\chi(t)$分别为激光脉冲的空间和时间分布，a_0 为常数．平板上下面与外界的热交换满足 Newton 定律，因此边界条件可写成

$$\left(u-\beta\frac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=0;\qquad \left(u+\beta\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h}=0$$

此外温度场满足零初始条件$u(r,z,t)|_{t=0}=0$．对式(2.5.54)两边作 Hankel 变换

$$\begin{gathered}\frac{\partial U(\lambda,z,t)}{\partial t}+\xi\left(\lambda^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U(\lambda,z,t)=a_0F(\lambda,z)\chi(t)\\ 0<z<h,\qquad t>0\end{gathered} \tag{2.5.55}$$

其中

$$\begin{gathered}U(\lambda,z,t)=\int_0^\infty u(r,z,t)rJ_0(\lambda r)\mathrm{d}r\\ F(\lambda,z)=\int_0^\infty f(r,z)rJ_0(\lambda r)\mathrm{d}r\end{gathered} \tag{2.5.56}$$

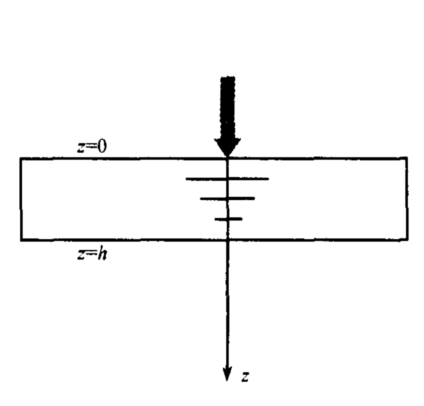


图 2.5.3　平板上表面受激光束照射

对变量 z，考虑本征值问题

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2\phi(z)}{\mathrm{d}z^2}=\mu^2\phi(z)\\ \left(\phi-\beta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}\right)\bigg|_{z=0}=0\\ \left(\phi+\beta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}\right)\bigg|_{z=h}=0\end{gathered} \tag{2.5.57}$$

上式的通解为

$$\phi(z)=A\sin\mu z+B\cos\mu z \tag{2.5.58}$$

代入(2.5.57)得到

$$B-\beta\mu A=0$$

$$A(\beta\mu+\tan\mu h)+B(1-\beta\mu\tan\mu h)=0$$

因此决定本征值的方程为

$$2\beta\mu+(1-\beta^2\mu^2)\tan\mu h=0$$

设上式第 k 个根为 μ_k，本征函数系 $\{\phi_k(z)\}$ 构成完备系

$$\phi_k(z)=A_k(\sin\mu_k z+\beta\mu_k\cos\mu_k z)\quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.5.59}$$

其中 A_k 由归一化条件决定. 令

$$U(\lambda,z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}Z_k(\lambda,t)\phi_k(z) \tag{2.5.60}$$

代入式(2.5.55)得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}Z_k(\lambda,t)}{\mathrm{d}t}+\xi(\lambda^2+\mu_k^2)Z_k(\lambda,t)=a_0G_k(\lambda)\chi(t),\qquad t>0 \tag{2.5.61}$$

其中

$$G_k(\lambda)=\int_0^{\infty}F(\lambda,z)\phi_k(z)\mathrm{d}z$$

式(2.5.61)满足零初始条件的解为

$$Z_k(\lambda,t)=a_0G_k(\lambda)\int_0^t\chi(\tau)\exp[-\xi(\lambda^2+\mu_k^2)(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{2.5.62}$$

因此结合式(2.5.49)、(2.5.60)和上式，得到问题的解为

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\lambda J_0(\lambda r)Z_k(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda\right]\phi_k(z) \tag{2.5.63}$$

其中逆 Hankel 积分可以通过数值计算实现.

积分变换在数学物理中有重要的应用，本节仅作简单介绍. 我们将在第五章进一步讨论之，特别是另一个尚未提及的重要变换，即 Laplace 变换.

习　题　二

2.1　证明

(1) $P_{2n}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$；　(2) $P_{2n+1}(0)=0$；　(3) $P'_{2n}(0)=0$；

(4) $P'_{2n+1}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$；　(5) $P'_n(1)=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

(6) $P'_n(-1)=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.2 对本征方程 $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ $(0 < x < l)$，写出下列各种边界条件下的本征函数和本征值：

(1) $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$；　(2) $\varphi(0) = \varphi'(l) = 0$；

(3) $\varphi'(0) = \varphi(l) = 0$；　(4) $\varphi(0) = 0$；　$\alpha\varphi(l) + \beta\varphi'(l) = 0$；

(5) $\alpha_1\varphi(0) - \beta_1\varphi'(0) = 0$；　$\alpha_2\varphi(l) + \beta_2\varphi'(l) = 0$.

2.3 考虑本征值问题

$$a^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \lambda\varphi = 0, \qquad x \in (0, l)$$

$$\varphi\big|_{x=0} = 0; \qquad \lambda\varphi\big|_{x=l} = c^2\varphi'\big|_{x=l}$$

其中 a 和 c 为实常数. (1)求本征函数 $\varphi_n(x)$ 及相应的本征值 λ_n；(2)求本征函数 $\varphi_n(x)$ 的模；求积分

$$\int_0^l \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x; \qquad \int_0^l \varphi'_n(x)\varphi'_m(x)\mathrm{d}x$$

注意：本题中本征函数 $\varphi_n(x)$ 不正交，上述本征值问题不自厄.

2.4 考虑本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right] + [\lambda\rho(x) - q(x)]\varphi = 0, \qquad x \in (a, b)$$

$$\varphi(b) = a_{11}\varphi(a) + a_{12}\varphi'(a); \qquad \varphi'(b) = a_{21}\varphi(a) + a_{22}\varphi'(a)$$

其中 $p(a) = p(b)$. 证明当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ 时，对应不同本征值的本征函数正交.

2.5 求本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \lambda\varphi = 0, \qquad (0 < x < l_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \lambda(a_1/a_2)\varphi = 0, \qquad (l_1 < x < l_1 + l_2)$$

$$\varphi'(0) = 0; \qquad \varphi'(l_1 + l_2) = 0$$

$$\varphi(l_1 - 0) = \varphi(l_1 + 0); \qquad \alpha\varphi'(l_1 - 0) = \beta\varphi'(l_1 + 0)$$

其中 a_1、a_2、α 和 β 为正的常数. 并且证明

(1) 对应不同本征值的本征函数在区间 $x \in [0, l_1 + l_2]$ 带权正交，权函数为

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha/a_1^2, & 0 \leqslant x < l_1 \\ \beta/a_2^2, & l_1 < x \leqslant l_1 + l_2 \end{cases}$$

(2) 本征值大于或等于零 $\lambda_n \geqslant 0$.

2.6 考虑本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda\rho(x)\varphi(x) = 0, \qquad x \in (0, l)$$

$$\alpha_1\varphi(0) - \beta_1\varphi'(0) = \alpha_2\varphi(l) + \beta_2\varphi'(l) = 0$$

$$\varphi(c - 0) = \varphi(c + 0)$$

$$p(c)[\varphi'(c + 0) - \varphi'(c - 0)] = \lambda M\varphi(c), \qquad (0 < c < l)$$

导出本征函数的正交关系式. 并证明当 $\rho(x) = \rho_0(x) + M\delta(x - c)$ 时，本征函数正交. 提示：c 点为函数 $\varphi(x)$ 的间断点，因此必须分段表示 $\varphi(x)$.

2.7 考虑 4 阶常微分方程的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[q(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-\gamma(x)]\varphi(x)=0$$

$\varphi(x)$在端点 $x=a,b$ 满足

(1) $\varphi(a)=\varphi(b)=0$;　　$\varphi'(a)=\varphi'(b)=0$;

(2) $\varphi(a)=\varphi(b)=0$;　　$\varphi''(a)=\varphi''(b)=0$;

(3) $\varphi'(a)=\varphi'(b)=0$;　　$[p(x)\varphi''(x)]'|_{x=a}=[p(x)\varphi''(x)]'|_{x=b}=0$.

证明在以上三种情况，对应不同本征值的本征函数带权 $\rho(x)$正交.

2.8　求解下列本征值问题

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda\varphi=0$,　　$x\in(0,1)$;　$\varphi(0)=0$;　$\varphi(1)<\infty$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda\varphi=0$,　　$x\in(0,1)$;　$\varphi'(0)=0$;　$\varphi(1)<\infty$

提示：注意题 2.1 结果.

2.9　将函数 $r^{-2}(x^2+2z^2+3xy+4xz)$用球谐函数展开.

2.10　已知在球坐标下两点 $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\varphi)$和 $\boldsymbol{r}'=(r',\theta',\varphi')$且 $r'<r$. 证明

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r'^l}{r^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

提示：① $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\Theta}$;

② $P_l(x)$的生成函数公式;

③ 加法公式 $P_l(\Theta)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

其中 $\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$.

2.11　一半径为 a、高为 h 的导体圆柱体，电导率为 σ. 稳定电流 I 从上底中心垂直流入而从下底中心流出. 求柱内电势分布. 提示：电流密度

$$j_z\big|_{z=\pm h}=\sigma E_z\big|_{z=\pm h}=-\sigma\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=\pm h}=\begin{cases}\dfrac{I}{\pi\varepsilon^2}, & 0\leqslant\rho<\varepsilon\\ 0, & \varepsilon<\rho\leqslant a\end{cases}(\varepsilon\to 0)$$

或者用 δ 函数表示

$$-\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=\pm h}=\frac{I}{2\pi\sigma}\frac{\delta(\rho-\varepsilon)}{\rho},(\varepsilon\to 0).$$

2.12　一无限长匀质圆柱管($R_1\leqslant\rho\leqslant R_2$)，其外壁保持零温度，内壁有均匀分布、强度为 q_0 的恒定热流流入. 设初始温度为零，求此后管内的温度分布. 提示：内壁边界条件为 $u_\rho\big|_{\rho=R_1}=-q_0/\kappa$，为了使内边界条件齐次化并保持外边界条件及方程的齐次，作变换

$$u(\rho,t)=\frac{q_0R_1}{\kappa}\ln\frac{R_2}{\rho}+v(\rho,t)$$

2.13　一半径为 a 的圆柱体由二段匀质圆柱体连接而成，其中一段高为 h_1，导热系数为 κ_1；另一段高为 h_2，导热系数 κ_2. 设圆柱两端保持零度，侧面保持恒温 u_0，求圆柱体内稳定温度分布. 提示：令分离变量解为

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho)Z(z)$$

$R(\rho)$满足零级虚宗量 Bessel 方程. 而 $Z(z)$应分段表示.

第三章 Green 函数方法

本章介绍求解数学物理方程定解问题的 Green 函数法. 主要内容有:3.1 节首先介绍广义函数理论基础,目的是希望更深刻地理解 δ 函数,然后介绍 δ 函数的若干重要性质;3.2 节介绍常微分方程的 Green 函数,重点放在本征值问题上;3.3 节介绍高维边值问题的 Green 函数,主要讨论 Laplace 方程和 Helmholtz 方程;3.4 节介绍热导方程及波动方程的含时 Green 函数;最后,在 3.5 节介绍 Green 函数方法应用于求解一般形式的二阶线性偏微分方程的非齐次问题. 本章特别强调 Green 函数理论的一个重要应用,即把微分方程化成积分方程.

3.1 广义函数及 δ 函数

本节介绍数学物理方程中一个十分重要的函数,即 Dirac-δ 函数. 由于 δ 函数不能用经典函数来描述,故必须推广函数的定义. 因此,本节首先介绍广义函数的概念,而 δ 函数作为一个广义函数,我们将详细讨论之.

3.1.1 广义函数概念和运算法则

根据定义,函数 $f(\boldsymbol{r})$ 表示 R^n 中点集 E 到数域 R^1 的一一对应,即如果对每个 $\boldsymbol{r}\in E$,有惟一确定的数 $f(\boldsymbol{r})\in R^1$ 与之对应,则称 $f(\boldsymbol{r})$ 是定义在 E 上的一个函数. 这样的函数称为**经典函数**. 经典函数反映了现实世界中一个量随另一个量变化而变化的关系,但是经典函数有其明显的缺点. 最典型的例子是如何表达物理上"点源"或"点电荷"的概念. 考虑在坐标原点的单位点电荷,电荷密度分布应如何表达呢? 直观上,可写密度分布函数 $\rho(\boldsymbol{r})$ 如下

$$\rho(\boldsymbol{r})=\begin{cases}0, & \boldsymbol{r}\neq 0\\ \infty, & \boldsymbol{r}=0\end{cases} \tag{3.1.1}$$

上式表明,函数 $\rho(\boldsymbol{r})$ 是一几乎处处为零的函数,按经典函数的积分理论,应有

$$\int_G \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=0 \tag{3.1.2}$$

但上式左边表示总电荷,物理上应有

$$\int_G \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\begin{cases}1, & \boldsymbol{r}=0\in G\\ 0, & \boldsymbol{r}=0\notin G\end{cases} \tag{3.1.3}$$

因此,式(3.1.1)在经典的意义上,不能描述点电荷的分布问题. 此外,经典函数最

大的缺点是对微分和积分等运算的局限性．例如：不连续函数的求导问题、高阶导数的存在性、函数列求导与求极限的交换次序问题，以及在经典函数意义下若干积分的发散性等等．这些限制往往给问题带来复杂性．有时使问题无法得到解决．因此，必须推广函数的概念，当然，推广的函数必须至少能解决上述所列的问题，即具有性质：

（1）反映通常的数量关系，能包含经典函数在内，且又能反映上述“点源”分布问题；

（2）可求任意阶导数，对经典函数，新定义应与之一致；

（3）推广的函数对求导、求积和求极限可任意交换运算．

这种新的函数称为**广义函数**或简称**广函**．为了定义广函，首先介绍**基本函数**或**试验函数**的概念：设空间 D 为所有在 R^n 中无穷可微且在不同有界域外恒等于零的函数组成的空间，记为 $D(R^n)\equiv C_0^\infty(R^n)$．$D$ 中元素是很多的，例如

$$\varphi(x,a,b)=\begin{cases}\exp\left[-\dfrac{b^2}{(x-a)^2}\right], & |x|<a\\ 0, & |x|\geqslant a\end{cases}\tag{3.1.4}$$

这里 a 和 b 为任意正数．D 中函数序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于零可定义为：

（1）所有 φ_n 在某同一有界域 K 外恒为零；

（2）$\{\varphi_n\}$ 及其各阶导数在 K 上一致收敛于零，记作 $\varphi_n\to 0(D)$

称 D 中的函数为**基本函数或试验函数**．

我们利用泛函来定义广义函数：D 上的广义函数 f 为 D 上的连续线性泛函，即对 D 中每个元素 φ，有确定的实或复数 $c(f,\varphi)$ 与之相应，记作

$$f(\varphi)\equiv(f,\varphi)=c(f,\varphi),\qquad \forall\varphi\in D\tag{3.1.5}$$

且具有性质：

（1）线性，对任意两个实或复数 α 和 β

$$f(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha f(\varphi)+\beta f(\psi),\qquad \varphi,\psi\in D;$$

（2）连续性，即当 $\varphi_n\to 0$ 时，有 $f(\varphi_n)\to 0$．

D 上的广义函数全体记作 D'，称为 D 的**对偶空间**．根据广函 f 之定义，可看出：广函 f 是定义在特定空间上的，如上面我们定义在 D 空间上．当然还可以在其他空间上．另一个十分重要的空间是速降函数空间 $L(R^n)$，它由下列函数组成：

（1）$\varphi(x)$ 为 R^n 中的无限可微函数；

（2）$\varphi(x)$ 的任意阶导数乘上任意次幂函数在无限远处仍趋向零，即 $\varphi(x)$ 在无穷远处急速下降

$$\lim_{|x|\to\infty}x^\alpha\frac{\partial^p\varphi(x)}{\partial x^p}=0\tag{3.1.6}$$

其中 α 和 p 为任意非负整数;

(3) $L(R^n)$中的任一函数序列$\{\varphi_v\}$对任意非负整数 α 和 p 在 R^n 上一致成立

$$\lim_{v\to\infty} x^\alpha \frac{\partial^p \varphi_v(x)}{\partial x^p} = 0 \tag{3.1.7}$$

则称 $\varphi_v(x)\to 0[L(R^n)]$.

定义在 $L(R^n)$的广函全体记作 $L'(R^n)$,可以证明 D 中的广函包含所有 $L(R^n)$中的广函,即$L'(R^n)$是 $D'(R^n)$的子空间

$$D'(R^n)\supset L'(R^n).$$

严格地说,广函 f 不是x 的函数,即对每一个 x 并不对应一个值,而是对每一个检验函数 $\varphi(x)$对应一个值. 但在我们考虑的情况,广函 f 能表达成$f(x)$的形式(对几乎所有的 x 点). 例如考虑 $f(x)$是一般的可积函数(在有限区域内),则泛函具有形式

$$(f,\varphi)=\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \qquad \forall\varphi\in D \tag{3.1.8}$$

如果 $f(x)$和 $g(x)$是两个可积函数,且

$$(f,\varphi)=(g,\varphi), \qquad \forall\varphi\in D \tag{3.1.9}$$

则

$$\int(f-g)\varphi\mathrm{d}x=0 \tag{3.1.10}$$

因 φ 取遍D 空间,于是由上式知 $g(x)$和 $f(x)$几乎处处相等

$$f(x)=g(x)$$

因此,由式(3.1.8)定义的泛函,惟一决定一个可积函数;反过来,每个可积函数可以决定一个泛函(3.1.8). 因而可以决定一个广义函数,这样的广义函数通常称为**正则广义函数**,故正则的广义函数能用可积函数来表示. 不能用可积函数来表示的广义函数称为**奇异广义函数**. 奇异的广义函数最简单的例子是 $\delta(x)$函数,它定义为泛函

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0) \tag{3.1.11}$$

严格地,δ 函数不能表示成式(3.1.8),但我们经常写成

$$(\delta,\varphi)=\int\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0) \tag{3.1.12}$$

广义函数的基本运算法则如下.

加法:D'中任意两个广函f 和g 的和$f+g$ 定义为如下的泛函

$$(f+g,\varphi)=(f,\varphi)+(g,\varphi), \qquad \forall\varphi\in D \tag{3.1.13}$$

当 f 和g 是可积函数时,由式(3.1.8)

$$(f+g,\varphi)=\int[f(x)+g(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x$$

因此有 $f+g=f(x)+g(x)$，相当于函数逐点相加.

乘法：广函 f 与数 α 相乘产生的广函定义为

$$(\alpha f,\varphi)=\alpha(f,\varphi)=(f,\alpha\varphi) \tag{3.1.14}$$

如果 f 是可积函数，则 $\alpha f=\alpha f(x)$.

坐标扩展：设 f 是 D' 中的广函，下面考虑广函 $f(cx)$ 的定义，首先考虑 $f(x)$ 是可积函数

$$[f(cx),\varphi(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(cx)\varphi(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x/c)\mathrm{d}x, & c>0\\ -\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x/c)\mathrm{d}x, & c<0\end{cases}$$

$$=\frac{1}{|c|}[f(x),\varphi(x/c)]$$

当 $f(x)$ 不是一般可积函数时，直接定义 $f(cx)$ 是下列泛函

$$[f(cx),\varphi(x)]=\frac{1}{|c|}[f(x),\varphi(x/c)] \tag{3.1.15}$$

例如对 $\delta(x)$ 函数

$$[\delta(cx),\varphi(x)]=\frac{1}{|c|}[\delta(x),\varphi(x/c)]=\frac{1}{|c|}\varphi(0)=\left(\frac{1}{|c|}\delta(x),\varphi(x)\right)$$

于是，形式上有

$$\delta(cx)=\frac{\delta(x)}{|c|} \tag{3.1.16}$$

特别当 $c=-1$

$$\delta(-x)=\delta(x) \tag{3.1.17}$$

故我们说 δ 函数是偶函数.

坐标平移：考虑 f 是可积情形

$$[f(x+c),\varphi(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+c)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x-c)\mathrm{d}x$$

$$=[f(x),\varphi(x-c)]$$

因此，当 $f(x)$ 不是一般可积函数时，广函 $f(x+c)$ 定义为下列泛函

$$[f(x+c),\varphi(x)]=[f(x),\varphi(x-c)] \tag{3.1.18}$$

例如对 δ 函数

$$[\delta(x-y),\varphi(x)]=[\delta(x),\varphi(x+y)]=\varphi(y). \tag{3.1.19}$$

函数相乘：广函 f 和无限可微函数 $g(x)$ 相乘，考虑 $f(x)$ 是可积情形

$$[g(x)f(x),\varphi(x)]=\int[g(x)f(x)]\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int f(x)[g(x)\varphi(x)]\mathrm{d}x=[f(x),g(x)\varphi(x)]$$

如果 $g(x)$ 无限可微，则 $g(x)\varphi(x)$ 仍然是 D 中元素，当 $f(x)$ 不是正则的广函时，直接定义

$$(gf,\varphi)=(f,g\varphi) \tag{3.1.20}$$

由上式可证明

$$g(x)\delta(x-y)=g(y)\delta(x-y) \tag{3.1.21}$$

事实上

$$\begin{aligned}[g(x)\delta(x-y),\varphi(x)]&=[\delta(x-y),g(x)\varphi(x)]\\&=g(y)\varphi(y)=[g(y)\delta(x-y),\varphi(x)]\end{aligned}$$

因此得式(3.1.21). 特别地，我们有

$$x\delta(x)=0\cdot\delta(x)=0. \tag{3.1.22}$$

广函的合复函数：设 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 为零，即 $g(x_0)=0$，由(3.1.12)

$$\begin{aligned}\{\delta[g(x)],\varphi(x)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}\delta[g(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sigma)\varphi[x(\sigma)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{g'[x(\sigma)]},g'[x(\sigma)]>0\\ \displaystyle-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sigma)\varphi[x(\sigma)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{g'[x(\sigma)]},g'[x(\sigma)]<0\end{cases}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sigma)\varphi[x(\sigma)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{|g'[x(\sigma)]|}=\frac{\varphi(x_0)}{|g'(x_0)|}\\&=\left[\frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x-x_0),\varphi(x)\right]\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

上式积分中取变数变换 $\sigma=g(x)$，故 $x=x(\sigma)$. $\sigma=0$ 的点即为 $g(x)$ 的零点 x_0. 从式(3.1.23)可见

$$\delta[g(x)]=\frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x-x_0) \tag{3.1.24}$$

当 $g(x)$ 有 n 个零点 x_n 时，显然应有

$$\delta[g(x)]=\sum_n\frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_n) \tag{3.1.25}$$

在实际问题的运算中，总把 δ 函数视作具有下列性质的"经典函数"

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\begin{cases}0, & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0\\ \infty, & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0\end{cases};\qquad \int_G\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\tau=1,\text{当 } G \text{ 包含 } \boldsymbol{r}_0 \text{ 点}.$$

或者

$$\int_G f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}0, & \boldsymbol{r}_0\overline{\in}G\\ f(\boldsymbol{r}_0), & \boldsymbol{r}_0\in G.\end{cases}$$

3.1.2 广义函数的导数

为了引进广义函数的导数，先考虑经典的连续可微函数 $f(x)$，由式(3.1.8)

并利用 φ 的性质：φ 及其任意导数在某有界闭域外恒为零

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\varphi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\mathrm{d}x = [f(x)\varphi(x)]\big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=(f,-\varphi') \tag{3.1.26}$$

当 $f(x)$ 不是经典函数时，根据上式作推广：定义 D' 中任一广函 f，其导数 f' 为广函

$$(f',\varphi)=-(f,\varphi') \tag{3.1.27}$$

在 n 维空间，可定义广函 f 的高阶偏导数

$$(D^{\alpha}f,\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,D^{\alpha}\varphi) \tag{3.1.28}$$

其中

$$D^{\alpha}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\qquad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

因此，广义函数 f 无穷可微，这是由于式(3.1.28)中 φ 无穷可微．显然，当 $f(x)$ 连续可微时，$f(x)$ 作为广函而言，其广义导数与经典导数一致．但当 $f(x)$ 是不可导的局部可积函数时，$f(x)$ 作为广函而言，仍有任意阶偏导数．由于对 φ 的偏导可交换次序，故对广函的偏导也可交换次序．

例 3.1.1 在广函意义下，求 Heaviside 函数的导数

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases} \tag{3.1.29}$$

当 $x=0$ 时 $H(x)$ 不连续，故 $H(x)$ 在 $x=0$ 处无经典导数．但作为广函

$$[H'(x),\varphi(x)]=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\varphi(x)|_0^{\infty}=\varphi(0)=[\delta(x),\varphi]$$

因此

$$H'(x)=\delta(x). \tag{3.1.30}$$

例 3.1.2 计算广函 $\delta(x-a)$ 的导数

$$[\delta'(x-a),\varphi(x)]=-[\delta(x-a),\varphi'(x)]=-\varphi'(a) \tag{3.1.31}$$

一般有

$$[\delta^{(k)}(x-a),\varphi(x)]=(-1)^k\varphi^{(k)}(a) \tag{3.1.32}$$

可见 δ 函数的导数只能用泛函来表示，而 $H(x)$ 的导数可用 δ 函数写成显式．形式上，δ 函数的导数可表示成微分算子

$$\frac{\mathrm{d}\delta(x-a)}{\mathrm{d}x}=-\delta(x-a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

例 3.1.3 在广函导数意义下计算 $\nabla^2\frac{1}{r}$，$r^2=x^2+y^2+z^2$

由式(3.1.28)

$$\left(\nabla^2 \frac{1}{r}, \varphi\right) = \left(\frac{1}{r}, \nabla^2 \varphi\right) = \int \frac{\nabla^2 \varphi}{r} \mathrm{d}\tau = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\Delta^2 \varphi}{r} \mathrm{d}\tau$$

其中最后一步是为了挖去奇点 $r=0$. 由于 φ 对某一个 α, 当 $r \geqslant \alpha$ 时恒为零, 应用 Green 公式

$$\int_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\nabla^2 \varphi}{r} \mathrm{d}\tau = \int_{r \geqslant \varepsilon} \varphi \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}\tau - \iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{1}{r} \mathrm{d}S + \iint_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \mathrm{d}S$$

当 $r \geqslant \varepsilon$ 时, $\nabla^2 r^{-1} = 0$, 而沿球面 $r=\varepsilon$ 的积分可估计如下:

$$\iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{1}{r} \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathrm{d}S = O(\varepsilon)$$

$$\iint_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \mathrm{d}S = -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{r=\varepsilon} \varphi \mathrm{d}S = -4\pi S_\varepsilon(\varphi)$$

$S_\varepsilon(\varphi)$ 为 φ 在球面 $r=\varepsilon$ 上的中值, 当 $\varepsilon \to 0$ 时 $S_\varepsilon(\varphi) = \varphi(0)$, 故得

$$\left(\nabla^2 \frac{1}{r}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\nabla^2 \varphi}{r} \mathrm{d}\tau = -4\pi\varphi(0) = -4\pi(\delta, \varphi)$$

故在广函意义下

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}). \tag{3.1.33}$$

例 3.1.4 不连续函数的导数, 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有跃变

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
[f'(x), \varphi(x)] &= -(f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{x_0-0} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0+0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0-0} - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0+0}^{\infty} + \int_{-\infty}^{x_0-0} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{x_0+0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= [f_2(x_0) - f_1(x_0)]\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{3.1.34}$$

上式中积分号下 $f'(x)$ 表示对 $x \neq x_0$ 处求导, 由于 $f'(x)$ 在 x_0 点的左导数和右导数为有限值, 故 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 的值对积分不作贡献, 因此

$$[f'(x), \varphi(x)] = [f_2(x_0) - f_1(x_0)][\delta(x-x_0), \varphi] + [f'(x), \varphi(x)]$$

因此

$$f'(x) = [f_2(x_0) - f_1(x_0)]\delta(x-x_0) + \begin{cases} f_1'(x), & x < x_0 \\ f_2'(x), & x > x_0 \end{cases} \tag{3.1.35}$$

式(3.1.29)为上述特殊情况

$$[f_2(x_0)-f_1(x_0)]=1; \qquad f_1'(x)=0, f_2'(x)=0$$

故 $H'(x)=\delta(x)$.

例 3.1.5 求下列函数的导数

$$\ln x=\begin{cases}\ln|x|, & x>0\\ \ln(-|x|)=\pm\mathrm{i}\pi+\ln|x|, & x<0\end{cases} \tag{3.1.36}$$

由式(3.1.35)得

$$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\mp\mathrm{i}\pi\delta(x) \tag{3.1.37}$$

另一方面

$$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{d}\ln(x\pm\mathrm{i}\varepsilon)}{\mathrm{d}x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon} \tag{3.1.38}$$

故有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{1}{x}\mp\mathrm{i}\pi\delta(x). \tag{3.1.39}$$

例 3.1.6 考虑二阶微分方程的 Green 函数 $G(x,x')$满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\right]=-\delta(x,x')+q(x)G(x,x') \tag{3.1.40}$$

把 $p(x)G'(x,x')$看作 $f(x)$,比较式(3.1.35),则应有

$$\left.\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'+0}-\left.\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'-0}=-\frac{1}{p(x')}. \tag{3.1.41}$$

3.1.3 广义函数的 Fourier 变换

首先考虑经典函数 $f(\boldsymbol{r})$,设 $f(\boldsymbol{r})$的 Fourier 积分存在

$$\mathbf{F}f=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int f(\boldsymbol{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^n\boldsymbol{t} \tag{3.1.42}$$

其中 n 为空间的维数,于是

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}f,\varphi)&=\int\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int f(\boldsymbol{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^n\boldsymbol{t}\right]\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}\\&=\int f(\boldsymbol{t})\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^n\boldsymbol{s}\right]\mathrm{d}^n\boldsymbol{t}=(f,\mathbf{F}\varphi)\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

其中 $\mathbf{F}\varphi$ 为试验函数的 Fourier 变换

$$\mathbf{F}\varphi=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^n\boldsymbol{r} \tag{3.1.44}$$

于是对一般的广函 f,可以定义其 Fourier 变换为广函 $\mathbf{F}f$

$$(\mathbf{F}f,\varphi)=(f,\mathbf{F}\varphi) \tag{3.1.45}$$

但上式存在一个基本问题:即 D 中试验函数 φ 的 Fourier 变换 $\mathbf{F}\varphi$ 不一定属于 D.

因此 $\mathbf{F}\varphi$ 不一定都可作为 D 中的试验函数，于是在 D 上定义广函 f 的 Fourier 变换显然是不恰当的，必须寻找新的函数空间，这个函数空间中的函数必须有这样的性质：

(1) 首先是其 Fourier 变换仍属这个空间，这样就可以由式(3.1.45)定义广函的 Fourier 变换；

(2) 同定义在 D 上的广函一样，定义在这个空间上的广函必须具有诸如无穷可微，求极限与求导可变换次序等性质.

我们发现由速降函数组成的空间 $L(R^n)$ 中的函数具有这样好的性质. 显然 $D(R^n)$ 是 $L(R^n)$ 的一个子空间

$$L(R^n) \supset D(R^n)$$

这是因为 D 中的元素总可视为速降函数. 因此，我们定义 $L(R^n)$ 上的广函 f 的 Fourier 变换为广函 $\mathbf{F}f$

$$(\mathbf{F}f, \varphi) = (f, \mathbf{F}\varphi), \qquad \forall\, \varphi \in L(R^n) \tag{3.1.46}$$

因速降函数 φ 的 Fourier 变换 $\mathbf{F}\varphi$ 仍是速降函数，故 $\mathbf{F}\varphi$ 仍是试验函数. 因此式(3.1.46)右边确实能定义一个广函，这个广函即是 f 的 Fourier 变换.

例 3.1.7 求 $\delta(x-a)$ 的 Fourier 变换. 因为

$$(\mathbf{F}\delta, \varphi) = [\delta(x-a), \mathbf{F}\varphi] = \left[\delta(x-a), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}, \varphi)$$

故

$$\mathbf{F}[\delta(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi} \tag{3.1.47}$$

例 3.1.8 求 $f(\boldsymbol{r}) = 1$ 的 Fourier 变换. 根据经典的 Fourier 变换理论，$f(\boldsymbol{r}) = 1$ 的 Fourier 变换不存在，但在广函意义下则存在. 记 $\mathbf{F}\varphi = \psi$，则 $\mathbf{F}^{-1}\psi = \varphi$

$$[\mathbf{F}(1), \varphi] = (1, \mathbf{F}\varphi) = (1, \psi) = \int \psi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

$$= (2\pi)^{n/2}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

因

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \mathbf{F}^{-1}\psi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \psi(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

故

$$\varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \psi(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot\boldsymbol{k}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \psi(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

于是

$$[\mathbf{F}(1),\varphi]=(2\pi)^{n/2}\varphi(0)=(2\pi)^{n/2}[\delta(\boldsymbol{r}),\varphi]$$

因此有

$$\mathbf{F}(1)=(2\pi)^{n/2}\delta(\boldsymbol{r}) \tag{3.1.48}$$

对一维情况 $n=1$,上式为

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x$$

例 3.1.9 在广函意义下,求 $\sin ax$ 的 Fourier 变换. 因 $2\mathrm{i}\sin ax=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax})$,故只要讨论 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$即可. 记 $\psi=\mathbf{F}\varphi$ 和 $\varphi=\mathbf{F}^{-1}\psi$

$$(\mathbf{F}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax},\varphi)=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax},\mathbf{F}\varphi)=\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\psi(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\varphi(a)=\sqrt{2\pi}[\delta(\xi-a),\varphi] \tag{3.1.49}$$

故 $\mathbf{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax})=\sqrt{2\pi}\delta(\xi-a)$从而

$$\mathbf{F}(\sin ax)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\xi-a)-\delta(\xi+a)] \tag{3.1.50}$$

同理可求得

$$\mathbf{F}(\cos ax)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\xi-a)+\delta(\xi+a)]$$

3.1.4 弱收敛和广义解

给定 D 上的广函序列$\{f_k\}$,当有

$$\lim_{k\to\infty}(f_k,\varphi)=(f,\varphi),\qquad\forall\varphi\in D \tag{3.1.51}$$

我们说广函序列弱收敛到 f,如果$\{f_k\}$收敛到 δ 函数

$$\lim_{k\to\infty}(f_k,\varphi)=(\delta,\varphi)=\varphi(0),\qquad\forall\varphi\in D \tag{3.1.52}$$

称序列$\{f_k\}$弱收敛到 δ 函数.

例 3.1.10 函数序列

$$f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{2}, & |x|<\dfrac{1}{k}\\[2mm] 0, & |x|>\dfrac{1}{k}\end{cases} \tag{3.1.53}$$

显然有

$$(f_k,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{k}{2}\int_{-1/k}^{1/k}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{k}{2}\varphi(\bar{x})\int_{-1/k}^{1/k}\mathrm{d}x=\varphi(\bar{x})$$

其中 $\varphi(\bar{x})$是 $x\in(-1/k,1/k)$的平均值. 当 $k\to\infty$,$\varphi(\bar{x})=\varphi(0)$, 故

$$\lim_{k\to\infty}(f_k,\varphi)=\varphi(0)$$

于是有

$$\lim_{k\to\infty} f_k = \delta(x). \tag{3.1.54}$$

例 3.1.11 热传导问题中

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right]\mathrm{d}\xi = \varphi(x)$$

故有

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] = \delta(x-\xi)$$

其他常用的弱收敛到 δ 函数的函数系列有

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} = \delta(\theta-\varphi)$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{x} = \delta(x); \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \delta(x)$$

如果 $\{f_k\}$ 弱收敛到 f，则微分和极限运算能交换次序

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{3.1.55}$$

事实上

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i},\varphi\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f_k,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$$

而 $\{f_k\}$ 弱收敛到 f，故

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i},\varphi\right) = -\lim_{k\to\infty}\left(f_k,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = -\left(f,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i},\varphi\right)$$

故有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

例 3.1.12 分析 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \tag{3.1.56}$$

其中 $f(x)=(\pi-x)/2$（当 $0<x<2\pi$）且 $f(x)$ 以 2π 为周期，如图 3.1.1 所示．令

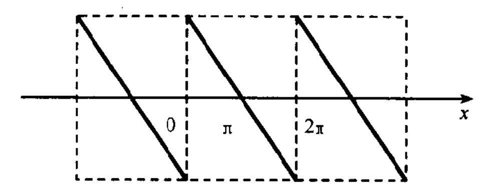


图 3.1.1 $f(x)$ 的周期为 2π

$$f_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin nx}{n}$$

则

$$\frac{\partial f_k}{\partial x} = \sum_{n=1}^{k} \cos nx$$

而另一方面

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi n). \tag{3.1.57}$$

例 3.1.13　考虑波动方程混合问题的广义解

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in (0, l), \qquad t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \qquad t > 0 \\ u(x, 0) = 1; \qquad u_t(x, 0) = 0, \qquad x \in (0, l) \end{gathered} \tag{3.1.58}$$

形式解为

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{kc\pi t}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{3.1.59}$$

其中

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{8l}}{k\pi}, & k = \text{奇数} \\ 0, & k = \text{偶数} \end{cases}$$

因此

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{l}(x + ct) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k} \sin\left[\frac{k\pi}{l}(x - ct)\right] \tag{3.1.60}$$

其中求和号表示只对奇数求和. 上式的物理意义很明显,表示两个传播波:一个向左,一个向右. 显然式(3.1.60)不可能是式(3.1.58)的古典解. 事实上只要看式(3.1.59)在 $t = 0$ 时情形

$$u(x, t)|_{t=0} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \tag{3.1.61}$$

上式右边是函数 $f(x) = 1, x \in [0, l]$ 作奇延拓情形的 Fourier 展式,在 $x = 0$ 和 l 点只能收敛

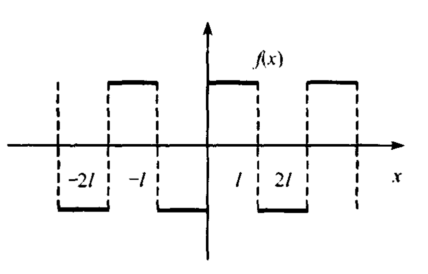


图 3.1.2　$f(x)$ 的周期为 $2l$

到零,不可能为 1,如图 3.1.2. 此外式(3.1.59)右边在古典意义下,求导和求和不能交换,但在广义导数意义下导数总存在,并且求导和求和能交换. 为了考察这点,令 $f(x)$的奇延拓函数为 $F(x)$, $F(x)$在 $x=\pm nl$ 处有跃变,则式(3.1.60)可表示成

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[F(x+ct)+F(x-ct)] \tag{3.1.62}$$

于是有

$$\frac{\partial F(x+ct)}{\partial x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\delta(x+ct-nl)=\frac{4}{l}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\cos\left[\frac{k\pi}{l}(x+ct)\right]$$

$$\frac{\partial^2 F(x+ct)}{\partial x^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\delta'(x+ct-nl)=-\frac{4\pi}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}{}'k\sin\left[\frac{k\pi}{l}(x+ct)\right]$$

由上可看出,只有在广函意义下,$u(x,t)$的导数才存在. 因此式(3.1.60)可看作定解问题在广函意义下的解,故是一种广义解.

下面给出广函意义下微分方程

$$\mathbf{L}u=f \tag{3.1.63}$$

广义解的严格定义:对 D 中每个元素 φ,如果存在广函 $u\in D'$和 $f\in D'$满足

$$(\mathbf{L}u,\varphi)=(f,\varphi),\qquad \forall\,\varphi\in D \tag{3.1.64}$$

其中 $\mathbf{L}$ 对 u 的所有导数都是在广函意义下的导数,那么称 u 是方程(3.1.63)在广函意义下的**广义解**. 根据式(2.2.1)共轭算子 $\mathbf{L}^+$ 的定义,把上式写成

$$(u,\mathbf{L}^+\varphi)=(f,\varphi) \tag{3.1.65}$$

如果把上式中的线性泛函定义成 Hibert 空间的内积,则对 Hilbert 空间的矢量 u 和 f, $(u,\mathbf{L}^+\varphi)$和(f,φ)都存在. 因此,可用式(3.1.65)定义方程(3.1.63)的广义解:对 D 中每个元素 φ,如果存在 $u\in L^2$ 和 $f\in L^2$ 满足式(3.1.65),那么我们称 u 是方程(3.1.63)的**广义解**. 这种广义解称为方程(3.1.63)的**弱解**.

因为 $u\in L^2$ 和 $f\in L^2$ 一定是广义函数,但反过来,广义函数不一定平方可积,因此由式(3.1.65)定义的弱解一定是由式(3.1.64)定义的广义解,反之不一定成立. 我们更感兴趣的是平方可积函数,即方程(3.1.63)的弱解.

3.2 二阶常微分方程的 Green 函数

本节讨论二阶常微分方程的 Green 函数,内容包括 Cauchy 问题的 Green 函数、边值问题的 Green 函数和广义 Green 函数. 除用 Green 函数解非齐次方程外,我们特别感兴趣的是如何把微分方程化成积分方程.

3.2.1 Cauchy 问题的 Green 函数

考虑经典力学中受迫阻尼振子方程的 Cauchy 问题

$$\mathbf{L}x = f(t), \quad t>0; \quad x(t)|_{t=0} = x_0; \quad x'(t)|_{t=0} = y_0 \tag{3.2.1}$$

其中算子

$$\mathbf{L} = -\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) \tag{3.2.2}$$

γ 为阻尼常数，ω_0 为系统频率．根据 δ 函数的性质，不妨把式(3.2.1)写成

$$\mathbf{L}x = \int f(t')\delta(t-t')\mathrm{d}t' \tag{3.2.3}$$

如果定义函数 $G(t,t')$满足

$$\mathbf{L}G(t,t') = \delta(t-t'), \quad t,t'>0 \tag{3.2.4}$$

根据 $\mathbf{L}$ 的线性性质应有

$$x(t) = \int f(t')G(t,t')\mathrm{d}t' \tag{3.2.5}$$

事实上，上式两边作用 $\mathbf{L}$，并利用式(3.2.4)

$$\mathbf{L}x = \int f(t')\mathbf{L}G(t,t')\mathrm{d}t' = f(t) \tag{3.2.6}$$

因此只要求得 $G(t,t')$，即可求得非齐次方程(3.2.1)的一个特解，为了满足初始条件，注意到齐次方程 $\mathbf{L}x=0$ 存在二个线性独立解 $x_1(t)$和 $x_2(t)$，于是可得式(3.2.1)的通解为

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) + \int_0^t f(t')G(t,t')\mathrm{d}t' \tag{3.2.7}$$

其中常数 a 和 b 由初始条件决定．由式(3.2.4)决定的函数 $G(t,t')$称为 Cauchy 问题的 **Green 函数**．

当 $\mathbf{L}$ 为常系数微分算子式(3.2.2)时，可用 Fourier 积分方法求解．令

$$G(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty} g(k,t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}k \tag{3.2.8}$$

代入式(3.2.4)

$$\mathbf{L}G(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty} g(k,t')(k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}k = \delta(t,t')$$

于是

$$\begin{aligned} g(k,t') &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t,t')\exp(\mathrm{i}kt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}kt')}{k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2} \end{aligned}$$

因此

$$G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-\mathrm{i}(t-t')k]}{k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2}\mathrm{d}k \tag{3.2.9}$$

上式可用围道积分求积．在复平面 k 上，被积函数

$$f(k) \equiv \frac{\exp[-\mathrm{i}(t-t')k]}{k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2}$$

有两个一阶极点

$$k_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}-\mathrm{i}\gamma;\qquad k_2=-\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}-\mathrm{i}\gamma$$

位于下半平面,如图 3.2.1. 当 $t>t'$时,可取位于下半平面的半圆;当 $t<t'$时,围道要取上半平面,这时围道内无极点.

最后可以求得

$$G(t,t')=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}\dfrac{\sin\left[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')\right]}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}, & t>t'\\ 0, & t<t'\end{cases}\tag{3.2.10}$$

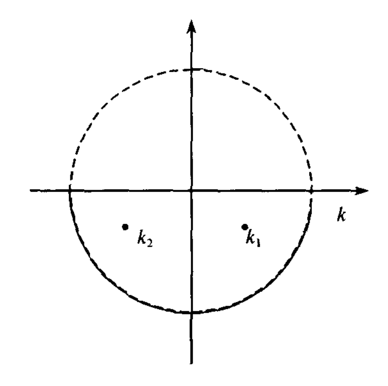


图 3.2.1 两个一阶极点分布

上式的物理意义很明显,因为 $\delta(t-t')$ 表示 $t=t'$时作用在振子上的瞬时外力,对 $t<t'$的振动当然无影响,故当 $t<t'$, $G(t,t')=0$.

考虑一般的二阶线性算子

$$\mathbf{L}=-\left[f_0(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+f_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+f_2(t)\right]\tag{3.2.11}$$

$\mathbf{L}$ 的 Green 函数 $G(t,t')$满足

$$\mathbf{L}G(t,t')=\delta(t-t'),\qquad t,t'>0\tag{3.2.12}$$

由于系数(f_0,f_1,f_2)与 t 有关,Fourier 积分法失效. 但可用构造法来求 $G(t,t')$. 由式(3.2.11)及 $\delta(t-t')$的定义,当 $t\neq t'$时 $G(t,t')$满足齐次方程

$$\mathbf{L}G(t,t')=0,\qquad t\neq t'\tag{3.2.13}$$

因此如果设 $x_1(t)$和 $x_2(t)$是齐次方程(3.2.13)的两个线性独立解,则

$$G(t,t')=\begin{cases}a_1x_1(t)+a_2x_2(t), & t>t'\\ b_1x_1(t)+b_2x_2(t), & t<t'\end{cases}\tag{3.2.14}$$

下面利用 Green 函数 $G(t,t')$的性质来决定四个系数. 显然,当 $t=t'$, $G(t,t')$必须连续,因为如果它不连续, G_t 就包含一个 δ 函数,而二阶导数就要包含 δ 函数的导数,但式(3.2.12)右边只是 δ 函数. 因此, $G(t,t')$在 $t=t'$是第一类间断点,一阶导数 G_t 不连续. 现在来求 G_t 在 $t=t'$处的跃值

$$\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'+\varepsilon}-\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'-\varepsilon}$$

为此,式(3.2.12)两边从 $t=t'-\varepsilon$ 到 $t=t'+\varepsilon$ 积分

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}f_0(t)\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t+\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}f_1(t)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon}f_2(t)G(t,t')\mathrm{d}t=-1$$

假定(f_0,f_1,f_2)在 Green 函数的定义域内处处连续,则

$$f_0(t')\left[\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'+\varepsilon}-\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'-\varepsilon}\right]=-1$$

因此有

$$\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'+\epsilon}-\left.\frac{\mathrm{d}G(t,t')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t'-\epsilon}=-\frac{1}{f_0(t')} \tag{3.2.15}$$

利用上式及 $G(t,t')$的连续性:$G(t,t')|_{t=t'+\epsilon}=G(t,t')|_{t=t'-\epsilon}$可得

$$a_1x_1(t')+a_2x_2(t')=b_1x_1(t')+b_2x_2(t')$$

$$[a_1\dot{x}_1(t')+a_2\dot{x}_2(t')]-[b_1\dot{x}_1(t')+b_2\dot{x}_2(t')]=-\frac{1}{f_0(t')}$$

从而求得

$$a_1-b_1=-\frac{x_2(t')}{f_0(t')W(t')};\qquad a_2-b_2=\frac{x_1(t')}{f_0(t')W(t')}$$

其中 $W(t')$是 $x_1(t')$和 $x_2(t')$的 Wronskian 行列式

$$W(t')=x_1(t')\frac{\mathrm{d}x_2(t')}{\mathrm{d}t'}-\frac{\mathrm{d}x_1(t')}{\mathrm{d}t'}x_2(t')=\begin{vmatrix}x_1(t') & x_2(t')\\ \dot{x}_1(t') & \dot{x}_2(t')\end{vmatrix}$$

由于 x_1 与 x_2 线性独立,故恒有 $W(t')\neq0$. 因此 $G(t,t')$为

$$G(t,t')=\begin{cases}b_1x_1(t)+b_2x_2(t)-\dfrac{x_1(t)x_2(t')-x_2(t)x_1(t')}{f_0(t')W(t')}, & t>t'\\ b_1x_1(t)+b_2x_2(t), \quad t<t'\end{cases} \tag{3.2.16}$$

仍有两个常数 b_1 和 b_2 待定,它们由问题的性质(Cauchy 问题或边值问题,后者将在 3.2.2 小节讨论)决定,对 Cauchy 问题,b_1 和 b_2 可以合并到式(3.2.7)的 a 和 b 中去,因此取 $b_1=b_2=0$

$$G(t,t')=-\frac{x_1(t)x_2(t')-x_2(t)x_1(t')}{f_0(t')W(t')}H(t-t'). \tag{3.2.17}$$

3.2.2 边值问题的 Green 函数

考虑二阶非齐次方程的边值问题

$$\mathbf{L}u=f(x),\qquad x\in(a,b)$$

$$\left.\left(\alpha_1u-\beta_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=a}=0;\qquad \left.\left(\alpha_2u+\beta_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=b}=0 \tag{3.2.18}$$

其中

$$\mathbf{L}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x) \tag{3.2.19}$$

$p(x)>0$ 和 $q(x)\geqslant0$. 由于上述问题的方程非齐次,但边界条件齐次,故称为**半齐次 Sturm-Liouville 边值问题**.

定义 Green 函数 $G(x,\xi)$满足

$$\mathbf{L}G=\delta(x-\xi),\qquad x,\xi\in(a,b)$$

$$\left(\alpha_1 G - \beta_1 \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=a} = 0; \qquad \left(\alpha_2 G + \beta_2 \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=b} = 0 \tag{3.2.20}$$

同 3.2.1 小节的讨论一样,式(3.2.18)的解可表示为

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.2.21}$$

由于 $G(x,\xi)$满足齐次边界条件,故 $u(x)$也满足. 因此上式是式(3.2.18)的解,但此解是否惟一? 显然,如果齐次方程的齐次边值问题有非零解(即 $\lambda=0$ 是 $\mathbf{L}$ 的本征值),上式不是式(3.2.18)的惟一解,因为假定 $u_0(x)$满足

$$\mathbf{L}u_0(x) = 0 \tag{3.2.22}$$

及齐次边界条件,则 $u_1(x)$

$$u_1(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi + a u_0(x)$$

也是式(3.2.18)的解. 此时,并不是对任何 $f(x)$,边值问题式(3.2.18)都有解. 事实上,由关系

$$\int_a^b (u_0\mathbf{L}u - u\mathbf{L}u_0)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(u\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} - u_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x \tag{3.2.23}$$

因 $\mathbf{L}u = f(x)$和 $\mathbf{L}u_0 = 0$,故有

$$\int_a^b u_0(x)f(x)\mathrm{d}x = p(x)\left(u\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} - u_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_a^b \tag{3.2.24}$$

又因 u_0 和 u 满足齐次边界条件,容易证明上式右边为零,因此得相容性条件

$$\int_a^b u_0(x)f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3.2.25}$$

即 $f(x)$必须与 $u_0(x)$正交,式(3.2.18)才有解. 与 Cauchy 问题的 Green 函数作一比较:在 Cauchy 问题中,齐次方程满足 Cauchy 数据的非零解总存在,但在边值问题中,齐次方程满足齐次边界条件的非零解不一定存在.

假定 $u_0(x)\equiv 0$,即 $\lambda=0$ 不是 $\mathbf{L}$ 的本征值,相反的情形在 3.2.3 小节讨论. 这时,可以证明 Green 函数存在且惟一. 设 $G_1(x,\xi)$与 $G_2(x,\xi)$是式(3.2.20)的两个解,则 $G(x,\xi) = G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)$满足齐次边界及齐次方程,故

$$0 \equiv \int_a^b G(x,\xi)\mathbf{L}G(x,\xi)\mathrm{d}x = \left[-p(x)G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right]\bigg|_a^b + \int_a^b p(x)\left[\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right]^2\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)G^2(x,\xi)\mathrm{d}x$$

利用式(3.2.20 中)边界条件第二式,容易证明

$$\left[-p(b)G(b,\xi)\frac{\mathrm{d}G(b,\xi)}{\mathrm{d}x}\right] \geqslant 0; \qquad \left[p(a)G(a,\xi)\frac{\mathrm{d}G(a,\xi)}{\mathrm{d}x}\right] \geqslant 0$$

故恒有 $G(x,\xi)\equiv 0$,亦即 $G_1(x,\xi) \equiv G_2(x,\xi)$.

下面用构造法求 $G(x,\xi)$，设 $u_1(x)$和 $u_2(x)$分别是齐次方程 $\mathbf{L}u=0$ 的两个解，取 $u_1(x)$满足 $x=a$ 处的齐次边界条件，而 $u_2(x)$满足 $x=b$ 处的齐次边界条件. $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 显然线性独立. 因为如果 $u_1(x)$和 $u_2(x)$线性相关，则 $u_1(x)=$常数 $\times\ u_2(x)$，因此，$u_1(x)$同时满足 $x=a$ 与 b 两端边界条件，故 $u_1(x)$是$\lambda=0$ 的本征函数，根据假定 $u_1(x)\equiv 0$. Green 函数取形式

$$G(x,\xi)=\begin{cases} c_1(\xi)u_1(x), & a<x\leqslant\xi \\ c_2(\xi)u_2(x), & \xi\leqslant x<b \end{cases} \tag{3.2.26}$$

$c_1(\xi)$与 $c_2(\xi)$由 $G(x,\xi)$的连续性及 G_x 的跃变条件决定

$$G(x,\xi)\big|_{x=\xi-0}=G(x,\xi)\big|_{x=\xi+0};\qquad \left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\xi-0}-\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\xi+0}=\frac{1}{p(\xi)} \tag{3.2.27}$$

式(3.2.26)代入得

$$\begin{aligned} &c_2(\xi)u_2(\xi)-c_1(\xi)u_1(\xi)=0 \\ &c_2(\xi)\frac{\mathrm{d}u_2(\xi)}{\mathrm{d}\xi}-c_1(\xi)\frac{\mathrm{d}u_1(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{1}{p(\xi)} \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

上式的解为

$$c_1(\xi)=\frac{-u_2(\xi)}{p(\xi)W(u_1,u_2)};\qquad c_2(\xi)=\frac{-u_1(\xi)}{p(\xi)W(u_1,u_2)}$$

其中 $W(u_1,u_2)$是 u_1 与 u_2 的 Wronskian 行列式. 下面证明 $p(\xi)W(u_1,u_2)$为常数，由

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\,\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)u_1=0;\qquad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\,\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)u_2=0$$

以 u_2 乘第一式，u_1 乘第二式相减得

$$u_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\,\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}\right)-u_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\,\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right)=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\left(u_1\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}-u_2\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right)\right]=0$$

故 $-p(\xi)W(u_1,u_2)=$常数 c. 于是我们求得 Green 函数的表达式

$$G(x,\xi)=\frac{1}{c}\begin{cases} u_1(x)u_2(\xi), & a<x\leqslant\xi \\ u_2(x)u_1(\xi), & \xi\leqslant x<b. \end{cases} \tag{3.2.29}$$

例 3.2.1　设 $\mathbf{L}=-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$，边界条件为 $u|_{x=0}=u|_{x=l}$. 先求齐次问题的解

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=0,\qquad x\in(0,l) \tag{3.2.30}$$

上式的通解为

$$u(x)=c_1+c_2x$$

取 $u_1(x)=x$,则 $u_1|_{x=0}=0$,取 $u_2(x)=(l-x)$,显然 $u_2|_{x=l}=0$. 可求得

$$-p(\xi)W(u_1,u_2)=l$$

故所求 Green 函数为

$$G(x,\xi)=\frac{1}{l}\begin{cases}x(l-\xi), & 0<x\leqslant\xi\\(l-x)\xi, & \xi\leqslant x<l.\end{cases}\tag{3.2.31}$$

例 3.2.2 $\mathbf{L}=-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2+\lambda,(\lambda>0)$,边界条件为 $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$. 齐次方程

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\lambda u=0,\qquad x\in(0,l)\tag{3.2.32}$$

的通解为

$$u=c_1\exp(-\sqrt{\lambda}x)+c_2\exp(\sqrt{\lambda}x)$$

取 $u_1=\sinh(\sqrt{\lambda}x)$则 $u_1|_{x=0}=0$,取 $u_2=\sinh\sqrt{\lambda}(l-x)$,则 $u_2|_{x=l}=0$. 可求得

$$-p(\xi)W(u_1,u_2)=\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}l$$

于是 Green 函数为

$$G(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}l}\begin{cases}\sinh\sqrt{\lambda}x\sinh\sqrt{\lambda}(l-\xi), & 0<x\leqslant\xi\\\sinh\sqrt{\lambda}(l-x)\sinh\sqrt{\lambda}\xi, & \xi\leqslant x<l\end{cases}\tag{3.2.33}$$

Green 函数的一个重要性质是它的对称性,即

$$G(x,\xi)=G(\xi,x)\tag{3.2.34}$$

从式(3.2.29)可立即得到结论. 但我们用较一般的方法来证明之,令

$$u=G(x,\xi_1);\qquad \mathbf{L}u=\delta(x-\xi_1)$$

$$v=G(x,\xi_2);\qquad \mathbf{L}v=\delta(x-\xi_2)$$

则由关系

$$u\mathbf{L}(v)-v\mathbf{L}(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\right]\tag{3.2.35}$$

两边积分(设 $\xi_2>\xi_1$)

$$\begin{aligned}\int_a^b(u\mathbf{L}v-v\mathbf{L}u)\mathrm{d}x&=G(\xi_2,\xi_1)-G(\xi_1,\xi_2)\\&=\int_a^{\xi_1}+\int_{\xi_1}^{\xi_2}+\int_{\xi_2}^b\\&=p(x)\left[G(x,\xi_2)\frac{\mathrm{d}G(x,\xi_1)}{\mathrm{d}x}-G(x,\xi_1)\frac{\mathrm{d}G(x,\xi_2)}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b}=0\end{aligned}$$

故有

$$G(\xi_1,\xi_2)=G(\xi_2,\xi_1)$$

而 ξ_1 与 ξ_2 任意,故

$$G(x,\xi)=G(\xi,x)$$

利用 Green 函数,可把 Sturm-Liouville 本征值问题化为积分方程.考虑本征值问题

$$\mathbf{L}u=\lambda\rho(x)u,\qquad x\in(a,b) \tag{3.2.36}$$

及齐次边界条件,把右边看作 $f(x)$,则有

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.2.37}$$

如果 $\rho(x)=1$

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.2.38}$$

上式称为积分方程,因此可用积分方程理论(见第五章)来讨论本征值问题.$G(x,\xi)$称为积分核.由 Green 函数的对称性 $G(x,\xi)=G(\xi,x)$,故称上式是具有对称核的积分方程.如果 $\rho(x)\neq1$,但 $\rho(x)>0$,则可令变换

$$v(x)=\sqrt{\rho(x)}\,u(x)$$

式(3.2.37)成为

$$v(x)=\lambda\int_a^b k(x,\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.2.39}$$

这时核 $k(x,\xi)=G(x,\xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$ 显然对称.如果 Sturm-Liouville 方程还包括非齐次项 f

$$\mathbf{L}u-\lambda\rho(x)u=f,\qquad x\in(a,b) \tag{3.2.40}$$

可化成

$$u(x)=g(x)+\lambda\int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3.2.41}$$

其中

$$g(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

式(3.2.41)称为**第二类 Fredholm 积分方程**,详细讨论见第五章.

我们用构造法求得了式(3.2.20)的解,也可用本征函数法求解.设 $\mathbf{L}$ 的本征函数$\{\varphi_m\}$构成完备的正交归一系,满足

$$\mathbf{L}\varphi_m=\lambda_m\rho(x)\varphi_m,\qquad x\in(a,b)$$

$$\left(\alpha_1\varphi_m-\beta_1\frac{\mathrm{d}\varphi_m}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=a}=0;\qquad\left(\alpha_2\varphi_m+\beta_2\frac{\mathrm{d}\varphi_m}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=b}=0$$

令

$$G(x,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\varphi_m(x) \tag{3.2.42}$$

代入(3.2.20)中第一式

$$\mathbf{L}G(x,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\mathbf{L}\varphi_m(x)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\lambda_m\rho(x)\varphi_m=\delta(x-\xi)$$

两边乘 φ_n 并积分

$$\lambda_m c_m=\int_a^b\varphi_m(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=\varphi_m(\xi)$$

因假定 $\lambda_m\neq 0$,故有 $c_m=\varphi_m(\xi)/\lambda_m$,于是 Green 函数为

$$G(x,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}\varphi_m(\xi)\varphi_m(x)\tag{3.2.43}$$

例 3.2.3 设 $\mathbf{L}=-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$,边界条件为 $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$. 显然

$$\varphi_m(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right);\qquad\lambda_m=\frac{m^2\pi^2}{l^2},\qquad m=1,2,\cdots\tag{3.2.44}$$

于是

$$G(x,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2l}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}\xi\tag{3.2.45}$$

把式(3.2.31)作 Fourier 级数展开,即可证明与上式完全一致.

3.2.3 非齐次 Sturm-Liouville 边值问题

下列问题称为**非齐次 Sturm-Liouville 边值问题**

$$\mathbf{L}u=f(x),\qquad x\in(a,b)\tag{3.2.46}$$

$$\left(\alpha_1 u-\beta_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=a}=g_1;\qquad\left(\alpha_2 u+\beta_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=b}=g_2\tag{3.2.47}$$

仍设 $\mathbf{L}$ 无零本征值,考虑关系

$$\int_a^b(u\mathbf{L}v-v\mathbf{L}u)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x$$

取 $v=G(x,\xi)$,其中 Green 函数 $G(x,\xi)$满足式(3.2.20). 注意 $G(x,\xi)$满足的边界条件是齐次的! 于是

$$\begin{aligned}u(\xi)&=\int_a^b G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(u\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}-G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x-\left[p(x)\left(u\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}-G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)\right]\bigg|_{x=a}^{x=b}\end{aligned}\tag{3.2.48}$$

另一方面,由于

$$\left[\alpha_1 u-\beta_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]\bigg|_{x=a}=g_1;\qquad\left[\alpha_1 G(x,\xi)-\beta_1\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right]\bigg|_{x=a}=0$$

于是有

$$\left[u\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}-G\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{x=a}=\begin{cases}\dfrac{g_1}{\alpha_1}\cdot\dfrac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{x=a}, & \alpha_1\neq 0\\ \dfrac{g_1}{\beta_1}G(x,\xi)\Bigg|_{x=a}, & \beta_1\neq 0\end{cases}\tag{3.2.49}$$

对 b 点同样有

$$\left[u\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}-G\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{x=b}=\begin{cases}\dfrac{g_2}{\alpha_2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{x=b}, & \alpha_2\neq 0\\ -\dfrac{g_2}{\beta_2}G(x,\xi)\Bigg|_{x=b}, & \beta_2\neq 0\end{cases}\tag{3.2.50}$$

把式(3.2.49)和(3.2.50)代入式(3.2.48)得到

$$u(\xi)=\int_a^b G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x-\frac{p(b)g_2}{\alpha_2}\cdot\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{x=b}+\frac{p(a)g_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{x=a}$$

上式假定 $\alpha_1\neq 0$ 和 $\alpha_2\neq 0$，否则根据式(3.2.49)和(3.2.50)，作一定的修改即可．交换变量 x 和 ξ 并利用 $G(x,\xi)=G(\xi,x)$ 得到

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{p(b)g_2}{\alpha_2}\cdot\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Bigg|_{\xi=b}+\frac{p(a)g_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Bigg|_{\xi=a}.$$

3.2.4　广义 Green 函数

当 $\lambda=0$ 是 $\mathbf{L}$ 的本征值时，由下式定义的 Green 函数不存在

$$\mathbf{L}G(x,\xi)=\delta(x,\xi),\qquad x,\xi\in(a,b)\tag{3.2.51}$$

证明：设 $u_0(x)\neq 0$ 是零本征值的本征函数 $\mathbf{L}u_0(x)=0$，$G(x,\xi)$ 是上式的解，$u_0(x)$ 和 $G(x,\xi)$ 都满足齐次边界条件，那么

$$\int_a^b[u_0\mathbf{L}G(x,\xi)-G(x,\xi)\mathbf{L}u_0]\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}-u_0\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x$$

上式左边为 $u_0(x)$ 即有

$$u_0(x)=p(x)\left[G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}-u_0\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b}$$

而右边由齐次边界条件容易证明为零，即 $u_0(x)=0$．矛盾！故由式(3.2.51)定义的 Green 函数不存在．这时我们可以定义 Green 函数

$$\mathbf{L}G=\delta(x-\xi)+cu_0(x),\qquad x,\xi\in(a,b)\tag{3.2.52}$$

其中 c 由下式决定

$$\int_a^b[u_0\mathbf{L}G(x,\xi)-G(x,\xi)\mathbf{L}u_0]\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}-u_0\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x=0\tag{3.2.53}$$

把式(3.2.52)代入上式

$$\int_a^b u_0(x)[cu_0(x)+\delta(x-\xi)]\mathrm{d}x=0$$

即 $c=-u_0(\xi)$,其中假定 $u_0(x)$已归一化. 因此 $G(x,\xi)$满足

$$\mathbf{L}G=\delta(x-\xi)-u_0(\xi)u_0(x),\qquad x,\xi\in(a,b) \tag{3.2.54}$$

这时式(3.2.18)的解为

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+au_0(x) \tag{3.2.55}$$

其中 f 满足相容性条件

$$\int_a^b f(\xi)u_0(\xi)\mathrm{d}\xi=0 \tag{3.2.56}$$

由式(3.2.54)定义的 Green 函数称为**广义 Green 函数**. (3.2.54)右边第二项有明显的物理意义:如果 $\lambda=0$ 是问题的本征值,那么在等于零的频率时就有共振. 因此集中源 $\delta(x-\xi)$将使 Green 函数不为有限,为了使 Green 函数有限,必须外加分布源 $u_0(\xi)u_0(x)$来抵消这种发散.

我们用本征函数法求式(3.2.54)的解,令

$$G=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\varphi_m \tag{3.2.57}$$

代入式(3.2.54)

$$\begin{aligned}\mathbf{L}G(x,\xi)&=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\mathbf{L}\varphi_m=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\lambda_m\rho(x)\varphi_m\\&=\delta(x-\xi)-u_0(\xi)u_0(x)\end{aligned}$$

上式两边乘 φ_n 并积分

$$\begin{aligned}c_m\lambda_m&=\int_a^b\delta(x-\xi)\varphi_m(x)\mathrm{d}x-u_0(\xi)\int_a^b u_0(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x\\&=\varphi_m(\xi)-u_0(\xi)\delta_{m0}\end{aligned}$$

当 $m=0,\varphi_0=u_0$,故 $c_0\lambda_0=0$,而 $\lambda_0=0,c_0$ 任意. 当 $m\neq0$ 时 $c_m=\varphi_m(\xi)/\lambda_m$,于是

$$G(x,\xi)=c_0u_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}\varphi_m(\xi)\varphi_m(x) \tag{3.2.58}$$

常数 c_0 由 Green 函数的对称性要求得到

$$c_0(\xi)u_0(x)=c_0(x)u_0(\xi)$$

因此可以取 $c_0(\xi)=u_0(\xi)$. 于是

$$G(x,\xi)=u_0(\xi)u_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}\varphi_m(\xi)\varphi_m(x). \tag{3.2.59}$$

例 3.2.4 考虑第二类边值问题

$$-\frac{d^2 u}{dx^2}=f(x), \qquad x\in(0,1); \qquad \frac{du(0)}{dx}=\frac{du(1)}{dx}=0 \tag{3.2.60}$$

显然本征值问题

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\lambda\varphi, \qquad x\in(0,1); \qquad \frac{d\varphi(0)}{dx}=\frac{d\varphi(1)}{dx}=0 \tag{3.2.61}$$

有零本征值,相应的本征函数为 $\varphi_0=1$,故存在可解性条件

$$\int_0^1 f(x)dx=0$$

广义 Green 函数 $G(x,\xi)$满足

$$\begin{aligned}&-\frac{d^2G}{dx^2}=\delta(x-\xi)-1, \qquad x,\xi\in(0,1)\\ &\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=1}=0\end{aligned} \tag{3.2.62}$$

当 $x\neq\xi$,有解

$$G(x,\xi)=\begin{cases}A+Bx+\dfrac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant\xi<1\\ C+Dx+\dfrac{x^2}{2}, & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases} \tag{3.2.63}$$

由边界条件得 $B=0$ 和 $D=-1$,又由 $G(\xi-0,\xi)=G(\xi+0,\xi)$得 $A=C-\xi$,因此

$$G(x,\xi)=\begin{cases}C-\xi+\dfrac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant\xi<1\\ C-x+\dfrac{x^2}{2}, & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases} \tag{3.2.64}$$

显然上式自动满足(3.2.27)第二式. 取 C 使 $G(x,\xi)$有对称性 $G(x,\xi)=G(\xi,x)$,于是 $C=\xi^2/2$,因此

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\xi+\dfrac{x^2+\xi^2}{2}, & 0<x\leqslant\xi<1\\ -x+\dfrac{x^2+\xi^2}{2}, & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases} \tag{3.2.65}$$

另一方面,本征值问题式(3.2.61)的解为

$$\varphi_0=1; \qquad \varphi_n(x)=\sqrt{2}\cos n\pi x; \qquad \lambda_n=n^2\pi^2, \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{3.2.66}$$

因此,由式(3.2.59)得到

$$G(x,\xi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi\xi\cos n\pi x \tag{3.2.67}$$

把式(3.2.65)作 Fourier 级数展开,可证明上式与式(3.2.65)完全一样.

以上讨论限于非奇异的 Sturm-Liouville 方程,对奇异情形,应视具体情况进行

讨论,下面举两例说明.

例 3.2.5 考虑 Legendre 算子的非齐次方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]=f(x),\qquad x\in(-1,1)\tag{3.2.68}$$

$$u(x)|_{x=\pm1}<\infty$$

首先看本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right]=\lambda\varphi,\qquad x\in(-1,1)\tag{3.2.69}$$

$$\varphi(x)|_{x=\pm1}<\infty$$

显然本征函数和相应的本征值为

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x);\qquad \lambda_n=n(n+1)\tag{3.2.70}$$

$\lambda_0=0$ 是 Legendre 算子的零本征值,相应的本征函数为 $\varphi_0(x)=1/\sqrt{2}$. 故必须定义广义 Green 函数

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right]=\delta(x-\xi)-\frac{1}{2},\qquad x,\xi\in(-1,1)\tag{3.2.71}$$

$$G(x,\xi)|_{x=\pm1}<\infty$$

当 $x\neq\xi$ 时,方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right]=\frac{1}{2},\qquad x,\xi\in(-1,1)\tag{3.2.72}$$

$$G(x,\xi)|_{x=\pm1}<\infty$$

的通解为

$$G=c_1+c_2\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{4}\ln(1-x^2)$$

分别取 $x=\pm1$ 处有限的解为

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\alpha+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{4}\ln(1-x^2)=-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\alpha, & -1<x\leqslant\xi<1\\ \beta-\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{4}\ln(1-x^2)=-\frac{1}{2}\ln(1+x)+\beta, & -1<\xi\leqslant x<1\end{cases}\tag{3.2.73}$$

由 $G(\xi-0,\xi)=G(\xi+0,\xi)$ 得到

$$-\frac{1}{2}\ln(1-\xi)+\alpha=-\frac{1}{2}\ln(1+\xi)+\beta\tag{3.2.74}$$

因此可取

$$\alpha=-\frac{1}{2}\ln(1+\xi);\qquad \beta=-\frac{1}{2}\ln(1-\xi)$$

于是

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\ln[(1-x)(1+\xi)], & -1<x\leqslant\xi<1\\ -\dfrac{1}{2}\ln[(1+x)(1-\xi)], & -1<\xi\leqslant x<1\end{cases}$$

显然上式自动满足(3.2.27)第二式．另一方面，由式(3.2.59)得到 Green 函数的级数展开形式

$$G(x,\xi)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{2n+1}{2}\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_n(\xi)\tag{3.2.75}$$

方程(3.2.68)的解为

$$u(x)=a+\int_{-1}^{1}G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad x\in(-1,1)\tag{3.2.76}$$

其中 a 为任意常数，式(3.2.68)可解性条件为

$$\int_{-1}^{1}f(\xi)\mathrm{d}\xi=0.\tag{3.2.77}$$

例 3.2.6　考虑非齐次方程

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{n^2}{x}u=f(x),\qquad x\in(0,1)\\ u(x)|_{x=0}<\infty;\qquad u(x)|_{x=1}=0\end{gathered}\tag{3.2.78}$$

首先求 Green 函数

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{n^2}{x}G=\delta(x-\xi),\qquad x,\xi\in(0,1)\\ G(x,\xi)|_{x=0}<\infty;\qquad G(x,\xi)|_{x=1}=0\end{gathered}\tag{3.2.79}$$

当 $x\neq\xi$ 时，方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{n^2}{x}G=0\tag{3.2.80}$$

的通解为

$$G=\begin{cases}ax^n+bx^{-n}, & n>0\\ c+d\ln x, & n=0\end{cases}$$

因此满足条件 $G(x,\xi)|_{x=0}<\infty$；$G(x,\xi)|_{x=1}=0$ 的 Green 函数可取为

$$G(x,\xi)=\begin{cases}ax^n, & 0<x\leqslant\xi<1\\ b(x^n-x^{-n}), & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases};\qquad(n>0)\tag{3.2.81}$$

利用式(3.2.27)，可以求出常数 a 和 b，于是

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x^n}{2n}[(1/\xi)^n-(\xi)^n], & 0<x\leqslant\xi<1\\ \dfrac{\xi^n}{2n}[(1/x)^n-(x)^n], & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases};\qquad(n>0)\tag{3.2.82}$$

当 $n=0$ 时不难求得

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\ln\xi, & 0<x\leqslant\xi<1\\ -\ln x, & 0<\xi\leqslant x<1\end{cases};\qquad (n=0). \tag{3.2.83}$$

3.3 高维边值问题的 Green 函数

本节讨论高维边值问题的 Green 函数,主要讨论具有下列形式的算子

$$\mathbf{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.1}$$

其中 $p(\boldsymbol{r})>0, q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$. 特别讨论 $p(\boldsymbol{r})\equiv 1, q(\boldsymbol{r})=0$ 或 $q(\boldsymbol{r})=\lambda$(常数)情况,即 Laplace 算子及 Helmholtz 算子.

3.3.1 非齐次问题的积分公式

考虑非齐次边值问题

$$\mathbf{L}u(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}\in G \tag{3.3.2}$$

$$\left[\alpha u(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=B(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{3.3.3}$$

定义非齐次问题的 Green 函数为下列边值问题的解

$$\mathbf{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G \tag{3.3.4}$$

$$\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=0,\qquad \boldsymbol{r}'\in G+\partial G \tag{3.3.5}$$

注意:$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$满足齐次边界条件. 下面用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$来表示式(3.3.2)和(3.3.3)的解. 利用 Green 公式

$$\int_G(u^*\mathbf{L}v-v\mathbf{L}u^*)\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial G}p\left(v\frac{\partial u^*}{\partial n}-u^*\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{3.3.6}$$

取 $v=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$则

$$u^*(\boldsymbol{r}')=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau+\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u^*(\boldsymbol{r})}{\partial n}-u^*(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \tag{3.3.7}$$

上式面积分可用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$表示. 事实上,因

$$\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=0;\qquad \left[\alpha u^*(\boldsymbol{r})+\beta\frac{\partial u^*(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=B^*(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.8}$$

于是有

$$\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u^*(\boldsymbol{r})}{\partial n}-u^*(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=\begin{cases}-\dfrac{B^*(\boldsymbol{r})}{\alpha}\cdot\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}, & \alpha\neq 0\\[2ex] \dfrac{B^*(\boldsymbol{r})}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), & \beta\neq 0\end{cases}$$

因此

$$u^*(r')=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau+\begin{cases}-\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[\dfrac{B^*(\boldsymbol{r})}{\alpha}\cdot\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S, & \alpha\neq 0\\ \iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[\dfrac{B^*(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\beta}\right]\mathrm{d}S, & \beta\neq 0\end{cases}\tag{3.3.9}$$

形式上,只要知道 Green 函数,好象求得了式(3.3.2)和(3.3.3)的解. 其实不然,因为点 $\boldsymbol{r}'$在定义式(3.3.4)中是常点. 利用 Green 函数的对称性,即可解决这一问题. 下面来证明 Green 的对称性

$$G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\tag{3.3.10}$$

令 $u^*=G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$和 $v=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$分别有

$$\mathbf{L}G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}');\qquad \mathbf{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$$

于是由式(3.3.6)

$$G^*(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')-G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\frac{\partial G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}-G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

由于 $G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$及 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$都满足边界条件,故上式右边积分为零. 于是

$$G^*(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')$$

即得式(3.3.10). 因此, $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$对 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$交换**共轭对称**. 利用此结果,对式(3.3.9)两边取复共轭,并交换 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$变量,应有

$$u(\boldsymbol{r})=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'+\begin{cases}-\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[\dfrac{B(\boldsymbol{r}')}{\alpha}\cdot\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S', & \alpha\neq 0\\ \iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[\dfrac{B(\boldsymbol{r}')}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S', & \beta\neq 0\end{cases}\tag{3.3.11}$$

上式即为式(3.3.2)和(3.3.3)的解. 下面来讨论式(3.3.4)和(3.3.5),分两种情况:

(1) 零不是 $\mathbf{L}$ 的本征值:设$\{\varphi_m(\boldsymbol{r})\}$是 $\mathbf{L}$ 的完备、正交且归一的本征函数集,相应的本征值为 λ_m,则令

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\varphi_m(\boldsymbol{r})\tag{3.3.12}$$

代入式(3.3.4)

$$\mathbf{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\mathbf{L}\varphi_m(\boldsymbol{r})=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\lambda_m\rho(\boldsymbol{r})\varphi_m(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

于是 $\lambda_m c_m=\varphi_m{}^*(\boldsymbol{r}')$,因 $\lambda_m\neq 0$,故 $c_m=\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')/\lambda_m$,因此,求得 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\tag{3.3.13}$$

因 λ_m 是实数,显然有对称性 $G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$;

(2) 当零是 $\mathbf{L}$ 的本征值时:设 $\varphi_0(\boldsymbol{r})\neq 0$ 是零本征函数 $\mathbf{L}\varphi_0(\boldsymbol{r})=0$,这时可证明式(3.3.4)和(3.3.5)无解. 事实上,令式(3.3.6)中 $v=\varphi_0(\boldsymbol{r})$ 和 $u=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,则应有 $\varphi_0(\boldsymbol{r}')\equiv 0$,故矛盾!象一维情形,必须引进广义 Green 函数

$$\mathbf{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\varphi_0^*(\boldsymbol{r}')\varphi_0(\boldsymbol{r})+\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3.3.14}$$

这时仍令 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为式(3.3.12)形式,但求和从 $m=0$ 开始,代入式(3.3.14)应有

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m\lambda_m\rho(\boldsymbol{r})\varphi_m(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\varphi_0^*(\boldsymbol{r}')\varphi_0(\boldsymbol{r})$$

因此

$$c_m\lambda_m=\varphi_0^*(\boldsymbol{r}')-\varphi_0^*(\boldsymbol{r}')\delta_{m0}$$

当 $m=0$ 时,$\lambda_0=0$,因此 c_0 可为任意常数;当 $m\neq 0$ 时,$\lambda_m\neq 0$,故 $c_m=\varphi_0^*(\boldsymbol{r}')/\lambda_m$,于是广义 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=c_0\varphi_0(\boldsymbol{r})+\sum_{m\neq 0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})$$

为了保持 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的共轭对称性,应取 $c_0=\varphi_0^*(\boldsymbol{r}')$,相应地式(3.3.11)应修改成

$$u(\boldsymbol{r})=a\varphi_0(\boldsymbol{r})+\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'+\begin{cases}-\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[\dfrac{B(\boldsymbol{r}')}{\alpha}\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S', & \alpha\neq 0\\ \iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r}')\left[\dfrac{B(\boldsymbol{r}')}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S', & \beta\neq 0\end{cases} \tag{3.3.15}$$

其中 a 是常数. 式(3.3.6)中令 $v=\varphi_0(\boldsymbol{r})$,因 $\mathbf{L}\varphi_0(\boldsymbol{r})=0$,故 f 和 B 满足相容性条件

$$-\int_G\varphi_0(\boldsymbol{r})f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\begin{cases}-\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[\dfrac{B^*(\boldsymbol{r})}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi_0(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\mathrm{d}S, & \alpha\neq 0\\ \iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left[\dfrac{B^*(\boldsymbol{r})}{\beta}\varphi_0(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}S, & \beta\neq 0\end{cases} \tag{3.3.16}$$

如果边界条件是齐次的,即 $B(\boldsymbol{r})=0$,上式变成

$$\int_G\varphi_0(\boldsymbol{r})f^*(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=0 \tag{3.3.17}$$

式(3.3.16)和(3.3.17)即是解存在的相容性条件. 一般如果 $\lambda=0$ 是 n 重简并的,则对 $\lambda=0$ 有 $\varphi_{0i}(\boldsymbol{r})(i=1,2,\cdots,n)$满足 $\mathbf{L}\varphi_{0i}(\boldsymbol{r})=0$,式(3.3.15)右边$a\varphi_0(\boldsymbol{r})$项应改为

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_{0i}(\boldsymbol{r})$$

而广义 Green 函数应改为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{0i}^{*}(\boldsymbol{r}')\varphi_{0i}(\boldsymbol{r}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m}\varphi_m^{*}(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}).$$

例 3.3.1　具有零本征值的简单例子是 Laplace 方程的第二类边值问题

$$-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}\in G;\qquad \left.\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0 \tag{3.3.18}$$

显然 $\lambda=0$ 是 $\mathbf{L}=-\nabla^2$ 的本征值，相应的本征函数 $\varphi_0(\boldsymbol{r})=1/\sqrt{V}$，其中 V 是区域的体积. 由式(3.3.17)，相容性条件为

$$\int_G f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau = 0 \tag{3.3.19}$$

上式的物理意义很明显：因为式(3.3.18)中边界条件表示绝热，没有热量能通过边界. 因此稳定分布的条件是区域中总热量的产生为零. 这时广义 Green 函数定义为

$$-\nabla^2 G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{V} + \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}');\qquad \left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0$$

一般解为

$$\psi(\boldsymbol{r}) = C + \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

其中 C 为任意常数.

3.3.2　Helmholtz 方程的 Green 函数

考虑式(3.3.1)的特殊情况 $p(\boldsymbol{r})=1$ 和 $g(\boldsymbol{r})=\lambda$（$\lambda$ 为常数）

$$(-\nabla^2+\lambda)u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}\in G$$
$$\left.\left[\alpha u(\boldsymbol{r}) + \beta\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\right|_{\partial G} = B(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{3.3.20}$$

而式(3.3.4)和(3.3.5)成为

$$(-\nabla^2+\lambda)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G$$
$$\left.\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\right|_{\partial G} = 0,\qquad \boldsymbol{r}'\in G+\partial G \tag{3.3.21}$$

用本征函数法求解上式，令

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\varphi_m(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.22}$$

其中 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$是 Laplace 算子的本征函数

$$-\nabla^2\varphi_m(\boldsymbol{r}) = \lambda_m\varphi_m(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}\in G$$
$$\left.\left[\alpha\varphi_m(\boldsymbol{r}) + \beta\frac{\partial\varphi_m(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]\right|_{\partial G} = 0 \tag{3.3.23}$$

把式(3.3.22)代入式(3.3.21)应有

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(\lambda_m + \lambda)\varphi_m(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})$$

故有

$$(\lambda_m + \lambda)c_m = \varphi_m^*(\boldsymbol{r}') \tag{3.3.24}$$

分两种情况讨论：

(1) $\lambda_m + \lambda \neq 0, c_m = \varphi_m^*(\boldsymbol{r}')/(\lambda_m + \lambda)$，于是 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m + \lambda}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(r) \tag{3.3.25}$$

显然亦有

$$G^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}); \tag{3.3.26}$$

(2) $\lambda_m + \lambda = 0$：因 φ_m^* 不可能恒为零，故式(3.3.24)中 $c_m \to \infty$，必须推广 Green 函数的定义．定义广义 Green 函数

$$\begin{aligned} &(-\nabla^2 + \lambda)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}) + \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in G \\ &\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial G} = 0, \qquad \boldsymbol{r}' \in G + \partial G \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

可求得，当 $i \neq m$ 时，

$$c_i = \frac{1}{\lambda_m + \lambda_i}\varphi_i^*(\boldsymbol{r}')$$

而 c_m 为任意常数，为了保持 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的共轭对称性，应取 $c_m = \varphi_m^*(\boldsymbol{r}')$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}) + \sum_{i \neq m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_m}\varphi_i^*(\boldsymbol{r}')\varphi_i(\boldsymbol{r}). \tag{3.3.28}$$

例 3.3.2 二维柱内 Helmholtz 方程的 Green 函数，圆柱半径为 a

$$-(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), \qquad r, r' < a \tag{3.3.29}$$

$$G(r,\theta,r',\theta')|_{r=0} < \infty; \qquad G(r,\theta,r',\theta')|_{r=a} = 0 \tag{3.3.30}$$

利用柱坐标中的 $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{r}\delta(r - r')\delta(\theta - \theta') \tag{3.3.31}$$

首先，把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 展开成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(r,r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \tag{3.3.32}$$

代入式(3.3.29)得

$$\frac{\mathrm{d}^2 G_m}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)G_m = -\frac{1}{2\pi r}\delta(r - r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta'} \tag{3.3.33}$$

令

$$G_m(r,r') = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta'}g_m(r,r')$$

则

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_m(r,r')}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}g_m(r,r')}{\mathrm{d}r}+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)g_m(r,r')=-\frac{1}{r}\delta(r,r')$$

(3.3.34)

上式是常微分方程,故可用构造法求 $g_m(r,r')$. 满足$g_m(r,r')\big|_{r=0}<\infty$的解 $g_m^1(r,r')=J_m(kr)$,而满足$g_m(r,r')\big|_{r=a}=0$的解可取为

$$g_m^2(r,r')=N_m(ka)J_m(kr)-J_m(ka)N_m(kr)$$

于是可构造出 Green 函数

$$G_m(r,\theta,r',\theta')=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{i}m(\theta-\theta')]$$

$$\times\begin{cases}\dfrac{J_m(ka)N_m(kr')-N_m(ka)J_m(kr')}{2\varepsilon_m J_m(ka)}J_m(kr), & r<r'\\[2ex] \dfrac{J_m(ka)N_m(kr)-N_m(ka)J_m(kr)}{2\varepsilon_m J_m(ka)}J_m(kr'), & r'<r\end{cases}$$

(3.3.35)

其中 $\varepsilon_m=2$(当 $m=0$)和 1(当 $m\geqslant1$). 另一方面用本征函数法求解式(3.3.29)和(3.3.30),本征值问题

$$-\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r})=\lambda\varphi(\boldsymbol{r}),\qquad r<a;\qquad \varphi(\boldsymbol{r})\big|_{r=a}=0\tag{3.3.36}$$

的解为

$$\{\varphi_n^m(r,\theta)\}=\left\{\frac{1}{N_{mn}}J_m\left(\sqrt{\lambda_n^m}r\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\right\},\qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$N_{mn}=\frac{a}{\sqrt{2}}J'_m(\sqrt{\lambda_n^m}a)$$

(3.3.37)

其中 N_{mn}是 Bessel 函数在第一类边界条件下的模,λ_n^m 是 m 阶 Bessel 方程的第 n 个根. 设 $J_m(x)=0$ 的正根为$(x_1^m,x_2^m,\cdots,x_n^m,\cdots)$则 $\lambda_n^m=(x_n^m/a)^2$,于是根据式(3.3.25)

$$G(r,\theta,r',\theta')=\frac{2}{a^2}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{1}{J'^2_m(x_n^m)[(x_n^m/a)^2-k^2]}J_m\left(x_n^m\frac{r'}{a}\right)J_m\left(x_n^m\frac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\theta')}$$

(3.3.38)

当 $k=x_n^m/a$ 时,必须引进广义 Green 函数. 由 Green 函数的惟一性,上式应与式(3.3.35)相同,故右边应相等.

例 3.3.3 Laplace 方程的球内问题

$$-\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\qquad r,r'<a\tag{3.3.39}$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{r=0}<\infty;\qquad G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{r=a}=0\tag{3.3.40}$$

利用球坐标系中 $\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的表达式

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')$$
$$= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

首先,把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$展开成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}g_{lm}(r,r')Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{3.3.41}$$

代入式(3.3.39)应有

$$-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[rg_{lm}(r,r')] + \frac{l(l+1)}{r^2}g_{lm}(r,r') = \frac{1}{r'^2}\delta(r-r') \tag{3.3.42}$$

根据构造法,取

$$g_{lm}^1(r) = r^l; \qquad g_{lm}^2(r) = \left(1 - \frac{a^{2l+1}}{r^{2l+1}}\right)r^l$$

故有

$$g_l(r,r') \equiv g_{lm}(r,r') = \frac{r^l r'^l}{(2l+1)a^{2l+1}}\begin{cases}1-\left(\dfrac{a}{r'}\right)^{2l+1}, & 0\leqslant r\leqslant r'\leqslant a\\[2ex] 1-\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2l+1}, & 0\leqslant r'\leqslant r\leqslant a\end{cases}$$

注意:g_{lm}与 m 无关. 于是求得 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}g_l(r,r')Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{3.3.43}$$

利用加法公式

$$P_l(\cos\Theta) = \sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{(2l+1)}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

其中 Θ 为(r,θ,φ)和(r',θ',φ')之间的夹角,Green 函数可表示为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)g_l(r,r')P_l(\cos\Theta). \tag{3.3.44}$$

3.3.3 无界空间的 Green 函数和基本解

无界空间的 Green 函数称为**基本解**. 一般在有界空间问题中,可令 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,其中 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为基本解,它满足方程

$$\mathrm{L}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

但不一定满足边界条件. 由于 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$含有奇点,可指望 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$在整个区域内正则且无奇点. 由 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$满足的边界条件

$$\left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G} = 0$$

故 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$应满足

$$\mathbf{L}G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0,\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G$$

$$\left[\alpha G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}=-\left[\alpha G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\beta\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G}$$

把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$分成 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$和 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的优点在于:$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$容易求解,并包含了 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的奇性,而 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$则可用级数法求得. 由于 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$无奇性,它的级数将有较好的收敛性.

下面考虑几个方程的基本解:

(1) Laplace 算子 $\mathbf{L}=-\nabla^2$

$$-\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\tag{3.3.45}$$

在无界空间中 $-\nabla^2$ 的本征函数为

$$\varphi_k(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

本征值为 k^2,由于无边界条件约束,本征值构成连续谱;即 k 可取任意值. 由式(3.3.13)

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_k\frac{\varphi_k(\boldsymbol{r})\varphi_k^*(\boldsymbol{r}')}{k^2}=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_k\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2}\tag{3.3.46}$$

积分代替求和应有

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2}\mathrm{d}\varphi$$

由于在积分过程中$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$是常量,可取 $\boldsymbol{k}$ 与$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$的夹角为 θ,即

$$\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta$$

于是上式角度部分可简单积出

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty\frac{\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{k}\mathrm{d}k=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.\tag{3.3.47}$$

(2) Helmholtz 算子 $\mathbf{L}=-(\nabla^2+\lambda)$

$$-(\nabla^2+\lambda)G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\tag{3.3.48}$$

用 Fourier 积分法求之,设

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\int g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}')\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\tag{3.3.49}$$

代入式(3.3.48)可得

$$g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')}{k^2-\lambda}\tag{3.3.50}$$

其中利用

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

因此

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2-\lambda}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}. \tag{3.3.51}$$

分两种情况讨论：

(a) $\lambda<0$($\lambda=0$ 即为上小节情形)，可令 $\lambda=-\kappa^2$

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2+\kappa^2}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{3.3.52}$$

角度部分积出后再利用围道积分，可求得

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(-k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}; \tag{3.3.53}$$

(b) $\lambda>0$，可令 $\lambda=q^2$，代入式(3.3.51)

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2-q^2}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{3.3.54}$$

当 $k=\pm q$ 时，上式分母为零. 为了求出积分，引进虚数

$$\lambda=(q\pm\mathrm{i}\varepsilon)^2,\qquad \varepsilon>0,\qquad \varepsilon\to0 \tag{3.3.55}$$

相应地，式(3.3.54)表成

$$G_{\pm0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k^2-(q\pm\mathrm{i}\varepsilon)^2}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{3.3.56}$$

对角度部分积分，并利用被积函数的奇偶性，把对 k 的积分扩展到 $-\infty$

$$G_{\pm0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{8\pi^2\mathrm{i}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{k\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{(k-q\mp\mathrm{i}\varepsilon)(k+q\pm\mathrm{i}\varepsilon)}-\frac{k\exp(-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{(k-q\mp\mathrm{i}\varepsilon)(k+q\pm\mathrm{i}\varepsilon}\right]\mathrm{d}k$$

首先，考虑积分

$$I_\pm=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{(k-q\mp\mathrm{i}\varepsilon)(k+q\pm\mathrm{i}\varepsilon)}\mathrm{d}k$$

$I_\pm$ 分别有一阶极点

$$k_1^\pm=q\pm\mathrm{i}\varepsilon,\qquad k_2^\pm=-(q\pm\mathrm{i}\varepsilon)$$

取上半平面围道，I_+ 围道内有极点 $k_1^+=q+\mathrm{i}\varepsilon$；而 I_- 围道内有极点 $k_2^-=-q+\mathrm{i}\varepsilon$，如图 3.3.1，于是可得

$$I_\pm=2\pi\mathrm{i}\,\frac{(\pm q+\mathrm{i}\varepsilon)\exp[\mathrm{i}(\pm q+\mathrm{i}\varepsilon)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{2(\pm q+\mathrm{i}\varepsilon)}$$

当 $\varepsilon\to0$

$$I_\pm=\pi\mathrm{i}\exp(\pm\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

对积分

$$K_\pm=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\exp(-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{(k-q\pm\mathrm{i}\varepsilon)(k+q\pm\mathrm{i}\varepsilon)}\mathrm{d}k$$

应取下半平面围道，可得 $K_\pm=-I_\pm$. 故

$$G_{\pm 0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\pm \mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.57}$$

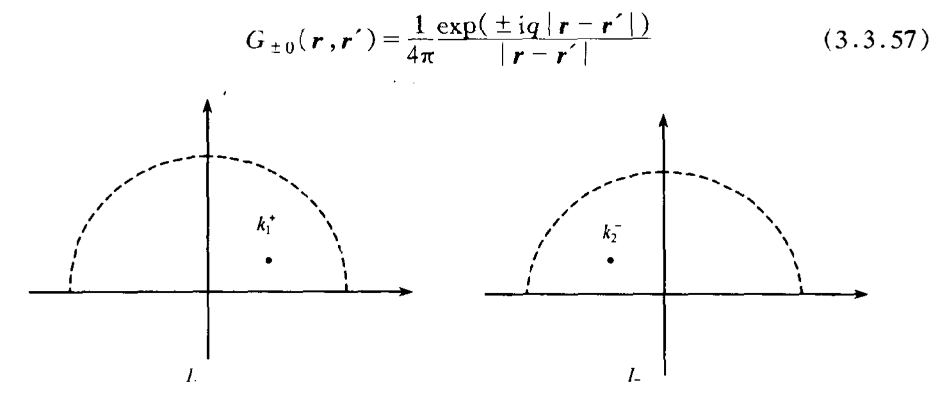


图 3.3.1　积分 I_+ 和 I_- 的围道选择

上式中正负号有十分重要的意义:物理上 G_{+0} 称为"发射"Green 函数,而 G_{-0} 称为"接收"Green 函数.

下面利用上述结果来讨论平面波的散射问题:假如平面声波 $a_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})$ 入射到非均匀区 G,可推出波动方程为

$$-(\nabla^2+q^2)\psi(\boldsymbol{r})=\varepsilon q^2V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}),\qquad \varepsilon\ll 1 \tag{3.3.58}$$

其中 ε 表示非均匀区的非均匀强度,利用无界区域的 Green 函数 G_{+0}

$$\psi(\boldsymbol{r})=a_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})+\varepsilon q^2\int_G V(\boldsymbol{r})\frac{\exp(\mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\psi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{3.3.59}$$

上式为第二类 Fredholm 积分方程. 当非均匀区变化很小即 $\varepsilon\ll 1$ 时,可用迭代法求解,将在第四章详细讨论之.

对一维和二维 Helmholtz 方程

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k^2\right)G_0(x,x')=\delta(x-x')$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)G_0(x,x',y,y')=\delta(x-x')\delta(y-y')$$

分别可得

$$G_0(x,x')=\frac{\mathrm{i}}{2k}\exp(\pm \mathrm{i}k|x-x'|)\text{(一维)} \tag{3.3.60}$$

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\text{(二维)} \tag{3.3.61}$$

其中 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$,$H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 为第一类零级 Hankel 函数. 利用近似

$$H_0^{(1)}(x)\sim \mathrm{i}\,\frac{2}{\pi}\ln x,\qquad x\to 0$$

取式(3.3.61)中 $k\to 0$,可得二维 Laplace 算子的基本解

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{3.3.62}$$

对 n 维 Laplace 算子和 Helmholtz 算子

$$\mathbf{L}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2};\qquad \mathbf{L}=-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2\right)$$

分别有基本解

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(n-2)\omega_n}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{n-2}},\qquad n\geqslant 3 \tag{3.3.63}$$

及

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}\left(\frac{k}{2\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)^{(n-2)/2}H^{(1)}_{(n-2)/2}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|),\qquad n\geqslant 2 \tag{3.3.64}$$

其中 $\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$为单位球面面积，$H^{(1)}_{(n-2)/2}$为第一类$(n-2)/2$ 级 Hankel 函数.

由上各式可看出 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$只与相对距离$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$有关，这是容易理解的. 在无边界情况下，方程 $\mathbf{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的解应对称于矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$. 因此，我们只要求其依赖于$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$的解即可，当 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$时显然有

$$\mathbf{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0$$

取含有奇性(在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$处)的解 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$即是我们的基本解. 但仍可差一相乘常数，这个常数由下法决定：因 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$满足

$$\mathbf{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

对方程两边积分应有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\mathbf{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau=1 \tag{3.3.65}$$

其中 ε 为包含$\boldsymbol{r}'$点的小球. 下面分几种情况讨论式(3.3.65)：

(1) 一维，$\mathbf{L}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$，式(3.3.65)变成

$$\lim_{x\to x'}p(x)\frac{\mathrm{d}G(x,x')}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}=-1 \tag{3.3.66}$$

上式即为(3.2.27)中第二式.

(2) 二维，$\mathbf{L}=-\nabla\cdot[p(x,y)\nabla]+q(x,y)$，式(3.3.65)变成

$$-1=\int_{\varepsilon\to 0}[\nabla\cdot(p\nabla G)-qG]\mathrm{d}\tau=\int_{\varepsilon\to 0}\nabla\cdot(p\nabla G)\mathrm{d}\tau$$

$$=p(\boldsymbol{r}')\oint_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S=p(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot 2\pi\varepsilon\big|_{\varepsilon\to 0}$$

而 $\varepsilon\to 0$ 即为 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'$故有

$$\lim_{r\to r'} p(r)\frac{\partial G}{\partial |r-r'|}\cdot 2\pi|r-r'| = -1 \tag{3.3.67}$$

设 $r'=0$,则

$$\lim_{r\to 0}\left(2\pi r p\frac{\partial G}{\partial r}\right) = -1. \tag{3.3.68}$$

(3) n 维($n\geqslant 3$),由式(3.3.65)

$$-1=\int_{\varepsilon\to 0}\nabla\cdot[p(r)\nabla G]\mathrm{d}\tau=\int_{\varepsilon\to 0}p\frac{\partial G}{\partial r}\mathrm{d}S=p(r)\frac{\partial G}{\partial r}\omega(r)\Big|_{\varepsilon\to 0}$$

即

$$\lim_{r\to 0}\omega(r)p\frac{\partial G}{\partial r} = -1 \tag{3.3.69}$$

其中 $\omega(r)$为半径 r 的 n 维球面的面积. 当 $n=3$ 时,$\omega(r)=4\pi r^2$,于是有

$$\lim_{r\to 0}4\pi r^2 p\frac{\partial G}{\partial r} = -1 \tag{3.3.70}$$

由于 p 在 $r\to 0$ 处无奇性,上面各式中都可移出极限号. 由式(3.3.66)、(3.3.68)和(3.3.70)可知,当 $r\to r'$时,$G(r,r')$的奇性分别如下

当 $n=1$ 时

$$\lim_{x\to x'}G(x,x') = -\frac{1}{2p(x')}|x-x'| \tag{3.3.71}$$

当 $n=2$ 时

$$\lim_{r\to r'}G(r,r') = -\frac{1}{2\pi p(r')}\ln|r-r'| \tag{3.3.72}$$

当 $n=3$ 时

$$\lim_{r\to r'}G(r,r') = \frac{1}{4\pi p(r')}\cdot\frac{1}{|r-r'|}. \tag{3.3.73}$$

下面用上法来证明式(3.3.53)和(3.3.57)以及式(3.3.60)和(3.3.61). 考虑方程

$$-\nabla^2 u + qu = 0 \tag{3.3.74}$$

依赖于 r 的解 $u=u(r)$,上式化成

$$\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial u(r)}{\partial r}-qu(r)=0 \tag{3.3.75}$$

对 Laplace 方程 $q=0$,故

$$u(r)=\begin{cases} c_1|x-x_0|, & n=1\\ c_2\ln r = c_2\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, & n=2\\ \dfrac{c_3}{r}=\dfrac{c_3}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, & n=3 \end{cases}$$

比较式(3.3.71)~(3.3.73),得到 $c_1=-1/2$、$c_2=-1/2\pi$ 和 $c_3=1/4\pi$.

下面考虑 $q\neq 0$ 情形. 当 $n=1$ 时,通解为

$$u(r)=\begin{cases} c_1\exp(\sqrt{q}r)+c_2\exp(-\sqrt{q}r), & q>0 \\ c_1\exp(\mathrm{i}\sqrt{|q|}r)+c_2\exp(-\mathrm{i}\sqrt{|q|}r), & q<0 \end{cases} \tag{3.3.76}$$

c_1 和 c_2 由无限远处条件及式(3.3.66)决定:

(1) $q>0, r\to\infty$ 时, $u(r)|_{r\to\infty}\to 0$,结合式(3.3.66)求得

$$c_1=0;\qquad c_2=\frac{1}{2\sqrt{q}}$$

故

$$G_0(x,x')=\frac{1}{2\sqrt{q}}\exp(-\sqrt{q}|x-x'|); \tag{3.3.77}$$

(2) $q<0$,根据物理意义,式(3.3.76)的两个解中,一个代表向左传播波,另一个代表向右传播波,两种情况可分别令

$$c_1=\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{-q}},\qquad c_2=0;\qquad c_1=0,\qquad c_2=\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{-q}}$$

如令 $-q=k^2$ 则有

$$G_{0\pm}(x,x')=\frac{\mathrm{i}}{2k}\exp(\pm\mathrm{i}k|x-x'|) \tag{3.3.78}$$

上式即为式(3.3.60).

当 $n=2$ 时,式(3.3.75)在 $r=0$ 处有奇性的解是

$$u(r)=\begin{cases} c_0H_0^{(1)}(\sqrt{|q|}r), & (q<0) \\ c_1K_0(\sqrt{q}r), & (q>0) \end{cases}$$

其中 $H_0^{(1)}$ 和 K_0 分别为零级第一类 Hankel 函数和第二类虚宗量 Bessel 函数. 当 $z\to 0$时有近似式

$$H_0^{(1)}(z)\approx\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\ln z;\qquad K_0(z)\approx-\ln z,\qquad z\to 0$$

由式(3.3.68), $c_0=\mathrm{i}/4$ 和 $c_1=1/2\pi$,于是

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{|q|}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|), & (q<0) \\ \dfrac{1}{2\pi}K_0(\sqrt{q}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|), & (q>0) \end{cases} \tag{3.3.79}$$

当 $n=3$ 时,令 $u(r)=\phi(r)/r$ 代入式(3.3.75)得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(r)}{\mathrm{d}r^2}-q\phi(r)=0 \tag{3.3.80}$$

上式的解为

$$\phi(r)=\begin{cases}c_0\exp(-\sqrt{q}r), & (q>0)\\ c_1\exp(\pm\mathrm{i}\sqrt{|q|}r), & (q<0)\end{cases}$$

利用式(3.3.70)容易求得 $c_0=c_1=1/4\pi$，于是

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(-\sqrt{q}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|), & q>0\\ \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(\pm\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|), & -q=k^2>0\end{cases}\tag{3.3.81}$$

上式与式(3.3.53)和(3.3.57)一致.

当 $n>3$ 时，令式(3.3.75)中

$$u(r)=\frac{1}{r^{(n-2)/2}}\varphi(\rho)$$

其中 $\rho=\sqrt{-q}r$，代入式(3.3.75)得到

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho}+\left[\rho^2-\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right]\varphi=0\tag{3.3.82}$$

上式为 Bessel 方程. 根据要求，应取第一类 Hankel 函数 $H^{(1)}_{(n-2)/2}(\rho)$，于是有

$$u(r)=\frac{c}{r^{(n-2)/2}}H^{(1)}_{(n-2)/2}(\sqrt{-q}r)$$

其中常数 c 由式(3.3.69)决定. 最后可求得 Green 函数为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}\left(\frac{\sqrt{-q}}{2\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)^{(n-2)/2}\cdot H^{(1)}_{(n-2)/2}(\sqrt{-q}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\tag{3.3.83}$$

即为式(3.3.64). 由 $H^{(1)}_v(x)$在 $x\to\infty$远处的展式

$$H^{(1)}_v(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-v\pi/2-\pi/4)}+O(x^{-3/2})$$

显然 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$表示点源向外发射的 n 维球面波，为“发射”Green 函数，相应的“接收”Green 函数由第二类 Hankel 函数 $H^{(2)}_v(x)$表示.

3.3.4　镜像法求边值问题的 Green 函数

当所考虑问题的区域比较简单时，可用镜像法求解 Green 函数. 根据前面的讨论，边值问题的 Green 函数可表示成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\tag{3.3.84}$$

其中 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$是基本解，在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$点有奇性

$$\mathbf{L}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G$$

而 $G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$在所考虑的区域满足

$$\mathbf{L}G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0,\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G\tag{3.3.85}$$

镜像法求解 Green 函数的基本思想是：$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$表示成式(3.3.84)，然后求出适当的 $G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$使 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$在边值上满足相应的齐次条件．下面举几例说明之．

例 3.3.4　上半空间 Laplace 方程第一和第二类边值问题的 Green 函数．首先考虑第一类边值问题

$$-\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\qquad z>0;\qquad G|_{z=0}=0 \tag{3.3.86}$$

Laplace 方程的基本解

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

其中 $\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$．在边界上

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{z=0}=\frac{1}{4\pi\sqrt{|\rho-\rho'|^2+z'^2}}$$

其中 $\rho=(x,y)$和 $\rho'=(x',y')$．为了在边界上满足 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0$，必须选择 $G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$

$$G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{z=0}=-G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{z=0}$$

并且在上半空间内 $G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$满足 Laplace 方程．于是，如图 3.3.2，可取 P'的镜像点P''：$\boldsymbol{r}''=(x',y',-z')$（$P''$是$P'$关于平面 $z=0$ 的反演点），在 P''点放一点源，该点源产生的场为

$$G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}''|}$$

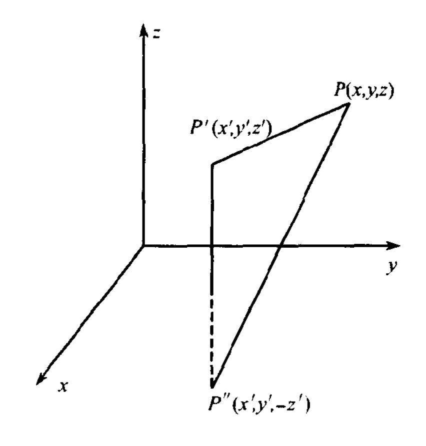


图 3.3.2　P'的镜像点 P''

显然取 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$能满足式(3.3.86)，而且 $G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$在 $z>0$ 内满足式(3.3.85)．因此，求得了 Laplace 方程第一类边值问题上半空间的 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}\right) \tag{3.3.87}$$

对第二类边值问题，不难验证 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}\right)$$

因此，第一类边值问题

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u(x,y,z)=0,\qquad z>0\\&u(x,y,z)\big|_{z=0}=f(x,y)\end{aligned} \tag{3.3.88}$$

的解为

$$u(x,y,z)=-\iint_{\infty} f(x',y')\frac{\partial G(x,y,z,x',y',z')}{\partial n'}\bigg|_{z'=0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

而

$$\frac{\partial G(x,y,z,x',y',z')}{\partial n'}\bigg|_{z'=0}=-\frac{\partial G(x,y,z,x',y',z')}{\partial z'}\bigg|_{z'=0}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{-z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}$$

因此式(3.3.88)的解为

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint_{\infty}\frac{f(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}} \tag{3.3.89}$$

注意:尽管式(3.3.11)适合于闭区域,但只要 $u\to 0$(当 $r\to\infty$) 足够快,上式仍成立.

例 3.3.5　上半空间 Helmholtz 方程第一和第二类边值问题的 Green 函数

$$\begin{aligned}&-(\nabla^2+k^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\qquad z>0\\&G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{z=0}=0\quad 或者\ \frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\bigg|_{z=0}=0\end{aligned} \tag{3.3.90}$$

基本解为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{3.3.91}$$

而

$$G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|)$$

其中 $\boldsymbol{r}''=(x',y',-z')$为镜像点的坐标. 于是,对第一类边界条件

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\ . \tag{3.3.92}$$

对第二类边界条件

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\ . \tag{3.3.93}$$

例 3.3.6　考虑半径为 a 球内 Laplace 方程的第一类边值问题的 Green 函数

$$\begin{aligned}&-\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\qquad r,r'<a\\&G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{r=a}=0\end{aligned} \tag{3.3.94}$$

基本解为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.95}$$

现在来求 $G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 使

$$[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\big|_{r=a}=0$$

为此作 P'的镜像点P_1,P_1 在$\overline{OP'}$的延长线上且P_1 与原点的距离为:$\overline{OP_1}=a^2/r'$,$r'=\overline{OP'}$,P_1 的位置矢径写作

$$\boldsymbol{r}_1=a^2\boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|^2 \tag{3.3.96}$$

于是,取 $G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为 P_1 处点源产生的场

$$G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{c}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}=\frac{c}{4\pi|\boldsymbol{r}-a^2\boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|^2|} \tag{3.3.97}$$

式中常数 c 可由 $[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]|_{r=a}=0$ 决定

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=\frac{1}{4\pi\sqrt{a^2+r'^2-2ar'\cos\Theta}}+\frac{1}{4\pi\sqrt{a^2+a^4/r'^2-2a^3/r'\cos\Theta}}$$

其中 Θ 为球面上一点 P 与 P' 之间的夹角，上式即为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=\frac{1}{4\pi}\left(1+\frac{r'c}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{r'^2+a^2-2ar'\cos\Theta}}$$

显然，只要取 $c=-a/r'$，则 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_{r=a}=0$. 于是求得式(3.3.94)的解

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\frac{a}{r'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-a^2\boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|^2|}\right) \tag{3.3.98}$$

容易求得

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right|_{r'=a}=\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial r'}\right|_{r'=a}=\frac{1}{4\pi a}\frac{r^2-a^2}{(a^2+r^2-2ra\cos\Theta)^{3/2}}$$

于是，如果给定球面上

$$u(r,\theta,\varphi)|_{r=a}=f(\theta,\varphi) \tag{3.3.99}$$

则球内 Laplace 方程的解为

$$u(r,\theta,\varphi)=-\iint_{r'=a}f(\theta',\varphi')\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_{r'=a}\mathrm{d}S'$$

把式(3.3.99)代入，最后得到解为

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\theta',\varphi')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'}{(a^2+r^2-2ra\cos\Theta)^{3/2}} \tag{3.3.100}$$

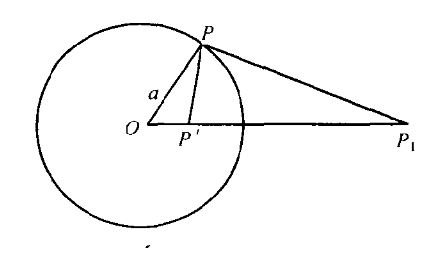


图 3.3.3　求球内第一类边值问题的 Green 函数

其中 $\cos\Theta=\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')+\cos\theta\cos\theta'$. 上式称为**球 Poisson 公式**. 而分离变量解式(2.4.17)是无穷级数形式，不难证明两者的一致性.

例 3.3.7　圆内二维 Laplace 方程第一类边值问题

$$\nabla^2u(r,\theta)=0,\quad r<a;\quad u(r,\theta)|_{r=a}=f(\theta) \tag{3.3.101}$$

的解. 首先求 Green 函数，仍参看球内问题，如图 3.3.3，只要把它理解为平面即可，这时 P' 的镜像点为 P_1，P_1 在 $\overline{OP'}$ 的延长线上，且 $\overline{OP_1}\equiv r_1=a^2/r'$. 于是

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|};$$

$$G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}-\frac{c}{4\pi}$$

其中 $\boldsymbol{r}_1'$ 是 P_1 点的坐标,常数 c 由 $[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\big|_{\rho=a}=0$ 决定

$$[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\Big|_{r=a}=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\ln\frac{r^2+r'^2-2rr'\cos\Theta}{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\Theta}\right)\Bigg|_{r=a}-c\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\ln\frac{r'^2}{a^2}-c\right)$$

于是 $c=-2\ln(a/r')$. 因此 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\ln\left(\frac{a}{r'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\right)\right] \tag{3.3.102}$$

故有

$$\frac{\partial G(r,\theta,r',\theta')}{\partial n'}\bigg|_{r'=a}=\frac{\partial G(r,\theta,r',\theta')}{\partial r'}\bigg|_{r'=a}$$

$$=-\frac{1}{2\pi a}\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ra\cos\Theta} \tag{3.3.103}$$

在平面极坐标系中 $\cos\Theta=\cos(\theta-\theta')$,于是有

$$u(r,\theta)=-\oint_{r'=a}f(\theta')\left[\frac{\partial G(r,\theta,r',\theta')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\theta')\mathrm{d}\theta'}{a^2-2ar\cos(\theta-\theta')+r^2} \tag{3.3.104}$$

上式称为平面 **Poisson 公式**.

3.4 混合问题的含时 Green 函数

本节讨论波动方程及热传导方程混合问题的含时 Green 函数的定义、性质以及应用. 对混合问题,Green 函数的定义显然应与边值问题有较大区别,我们从本征函数展开法着手,来考察应如何定义混合问题的含时 Green 函数.

3.4.1 热导方程的 Green 函数

考虑下列混合问题,$u(\boldsymbol{r},t)$满足

$$\rho(\boldsymbol{r})u_t+\mathbf{L}u=0,\qquad \boldsymbol{r}\in G,\qquad t>0$$

$$u\big|_{t=0}=u(\boldsymbol{r},0);\qquad \left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0 \tag{3.4.1}$$

其中 $\mathbf{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r}),p(\boldsymbol{r})>0,\rho(\boldsymbol{r})>0,q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$. 注意,上式的方程和边界条件都是齐次的,非齐次情况将在 3.5 节讨论. 设 $\mathbf{L}$ 在齐次边界条件下有完备的正交归一的本征函数$\{\varphi_m(\boldsymbol{r})\}$,相应的本征值为 λ_m. 令

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m(t)\varphi_m(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.2}$$

代入式(3.4.1)可得

$$a_m(t) = a_m(0)\exp(-\lambda_m t) \tag{3.4.3}$$

而

$$a_m(0) = \int_G \varphi_m^*(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r},0)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau \tag{3.4.4}$$

把式(3.4.3)和(3.4.4)代入式(3.4.2)得

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r},t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left[\int_G \varphi_m^*(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\right]\exp(-\lambda_m t)\varphi_m(\boldsymbol{r}) \\ &= \int_G\left[\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_m t)\right]\rho(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\tau' \end{aligned}$$

令

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = \sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_m t) \tag{3.4.5}$$

则

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)u(\boldsymbol{r}',0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.6}$$

由式(3.4.5)定义的 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$称为混合问题式(3.4.1)的**含时 Green 函数**. 下面讨论式(3.4.5)的意义,假如有一 δ 函数型的初始分布

$$u(\boldsymbol{r},0) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)/\rho(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.7}$$

由式(3.4.6),问题的解为

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\tau' = G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0,t)$$

因此,Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$实质上是 δ 函数型初始分布的解,即 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$满足

$$\rho(\boldsymbol{r})G_t(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) + \mathrm{L}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = 0, \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G, \qquad t>0 \tag{3.4.8}$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\big|_{t=0} = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r}); \qquad \left[\alpha G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) + \beta\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial G} = 0 \tag{3.4.9}$$

利用$\{\varphi_m(\boldsymbol{r})\}$的封闭性关系

$$\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.4.10}$$

不难验证式(3.4.5)满足式(3.4.8)和(3.4.9),故可作为一阶方程混合问题式(3.4.1)的 Green 函数定义.

下面讨论 Green 函数的性质:

(1) $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$的传播特性:假定初始分布取在 $t=t'$

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=t'} = u(\boldsymbol{r},t')$$

解应为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')u(\boldsymbol{r}',t')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.11}$$

其中 $t>t'$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\exp[-\lambda_m(t-t')] \tag{3.4.12}$$

式(3.4.11)解释为,$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$将函数 u 从 t' 时刻传播到 $t>t'$ 时刻,因此物理上常称 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$为**传播子**. 根据 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$的传播特性,如果 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$把 u 从 t_0 传播 t_1,再传播到 t_2,结果应同 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$把 u 从 t_0 直接传播到 t_2 一样,如图 3.4.1.

$$u(\boldsymbol{r},t_0)\xrightarrow{G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_1-t_0)}u(\boldsymbol{r},t_1)\xrightarrow{G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_1)}u(\boldsymbol{r},t_2)$$

$$u(\boldsymbol{r},t_0)\xrightarrow{\qquad G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_0)\qquad}u(\boldsymbol{r},t_2)$$

图 3.4.1　Green 函数的传播特性

上述结论证明如下:由式(3.4.11)

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t_1)&=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_1-t_0)u(\boldsymbol{r}',t_0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\u(\boldsymbol{r},t_2)&=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_1)u(\boldsymbol{r}',t_1)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

第一式代入第二式得

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t_2)&=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_1)\left[\int_G G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',t_1-t_0)u(\boldsymbol{r}'',t_0)\rho(\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\tau''\right]\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&=\int_G\left[\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_1)G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',t_1-t_0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\right]\rho(\boldsymbol{r}'')u(\boldsymbol{r}'',t_0)\mathrm{d}\tau''\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

根据式(3.4.12)

$$\begin{aligned}&\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_1)G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',t_1-t_0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&=\sum_{m,n=1}\varphi_m(\boldsymbol{r})\varphi_n^*(\boldsymbol{r}'')\mathrm{e}^{-\lambda_m(t_2-t_0)}\int_G\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_n(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&=\sum_{m,n=1}\varphi_m(\boldsymbol{r})\varphi_n^*(\boldsymbol{r}'')\mathrm{e}^{-\lambda_m(t_2-t_0)}\delta_{mn}=\sum_{m=1}\varphi_m(\boldsymbol{r})\varphi_m^*(\boldsymbol{r}'')\mathrm{e}^{-\lambda_m(t_2-t_0)}\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

其中已利用 $\varphi_m(\boldsymbol{r})$和 $\varphi_n(\boldsymbol{r})$的正交性

$$\int_G\varphi_m^*(\boldsymbol{r})\varphi_n(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\delta_{mn} \tag{3.4.16}$$

即有

$$u(\boldsymbol{r},t_2)=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t_2-t_0)u(\boldsymbol{r}',t_0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.17}$$

于是传播性得证.

(2) $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$的对称性:由式(3.4.5),如果 t 是实数(扩散和热导方程)

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=G^{*}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},t) \tag{3.4.18}$$

即 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$关于 $\boldsymbol{r}$ 与$\boldsymbol{r}'$共轭对称;如果 t 是复数(对含时 Schrödinger 方程),则有

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',-t)=G^{*}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},t) \tag{3.4.19}$$

即 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$关于 $\boldsymbol{r}$ 与$\boldsymbol{r}'$交换、t 反演是共轭对称的.

(3) $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$满足的共轭方程:$\overline{\mathbf{L}}$ 对 $\boldsymbol{r}'$作用,由式(3.4.12)

$$\overline{\mathbf{L}}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^{*}\rho(\boldsymbol{r}')\varphi_m^{*}(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\lambda_m(t-t')}$$

而

$$\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial t'}=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m\rho(\boldsymbol{r}')\varphi_m^{*}(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\lambda_m(t-t')}$$

利用 λ_m 的实数性$\lambda_m=\lambda_m^{*}$,故对变数$(\boldsymbol{r}',t')$有方程

$$\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial t'}-\overline{\mathbf{L}}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')=0 \tag{3.4.20}$$

上式称为方程(3.4.1)的**共轭方程**(见 3.5 节讨论)

例 3.4.1 考虑一维混合问题的 Green 函数

$$\frac{\partial G(x,x',t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 G(x,x',t)}{\partial x^2}=0,\qquad x,x'\in(0,l),\qquad t>0 \tag{3.4.21}$$

$$G(x,x',t)\big|_{x=0}=G(x,x',t)\big|_{x=l}=0;\quad G\big|_{t=0}=\delta(x-x') \tag{3.4.22}$$

由 1.4.2 小节知

$$G(x,x',t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right)\exp\left(-\frac{n^2a^2\pi^2t}{l^2}\right) \tag{3.4.23}$$

当式(3.4.22)变成第二类边界时

$$G(x,x',t)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x'}{l}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}\right) \tag{3.4.24}$$

对非齐次问题(注意:初值是齐次的)

$$\mathbf{L}u(\boldsymbol{r},t)+\rho(\boldsymbol{r})u_t(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t),\qquad \boldsymbol{r}\in G,\qquad t>0 \tag{3.4.25}$$

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=0;\qquad\left[\alpha u(\boldsymbol{r},t)+\beta\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial G}=0 \tag{3.4.26}$$

利用 Duhamel 齐次化原理,设 $v(\boldsymbol{r},t,t')$是下列混合问题的解

$$\mathbf{L}v(\boldsymbol{r},t,t')+\rho(\boldsymbol{r})v_t(\boldsymbol{r},t,t')=0 \tag{3.4.27}$$

$$v\big|_{t=t'}=f(\boldsymbol{r},t')/\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\left[\alpha v(\boldsymbol{r},t,t') + \beta \frac{\partial v(\boldsymbol{r},t,t')}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial G} = 0 \tag{3.4.28}$$

则式(3.4.25)和(3.4.26)的解为

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int_0^t v(\boldsymbol{r},t,t')\mathrm{d}t' \tag{3.4.29}$$

利用 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$，$v(\boldsymbol{r},t)$可表示为

$$v(\boldsymbol{r},t,t') = \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.30}$$

因此

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int_0^t\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t' \tag{3.4.31}$$

令 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$如下

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') = G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')H(t-t') \tag{3.4.32}$$

于是式(3.4.31)可写成

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int_0^\infty\int_G G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t' \tag{3.4.33}$$

上式代入式(3.4.25)应该有

$$\int_0^\infty\int_G \left[\mathbf{L}G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') + \rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')}{\partial t}\right]f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t' = f(\boldsymbol{r},t) \tag{3.4.34}$$

因此要求 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$满足

$$\mathbf{L}G_1 + \rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1}{\partial t} = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{3.4.35}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathbf{L}G_1 + \rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1}{\partial t} &= H(t-t')\mathbf{L}G + \rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial t}[GH(t-t')] \\ &= H(t-t')\mathbf{L}G + H(t-t')\rho(\boldsymbol{r})G_t + G\rho(\boldsymbol{r})H_t(t-t') \\ &= H(t-t')[\mathbf{L}G + \rho(\boldsymbol{r})G_t] + G\rho(\boldsymbol{r})H_t(t-t')\end{aligned} \tag{3.4.36}$$

因 $\mathbf{L}G + \rho G_t = 0$；$H_t(t-t') = \delta(t-t')$，因此有

$$\begin{aligned}\mathbf{L}G_1 + \rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1}{\partial t} &= \rho(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\delta(t-t') \\ &= \rho(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t'-t')\delta(t-t')\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

而

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t'-t') = \sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r})$$

故有式(3.4.35)．上述过程表明式(3.4.33)确是式(3.4.25)的解．由于 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')$满足式(3.4.35)以及零初始条件，故可定义式(3.4.25)和(3.4.26)的 Green

函数为下列定解问题的解

$$\mathbf{L}G_1+\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial G_1}{\partial t}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'),\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G \tag{3.4.38}$$

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\big|_{t=0}=0;\qquad \left(\alpha G_1+\beta\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0 \tag{3.4.39}$$

如果式(3.4.25)和(3.4.26)中初值也是非齐次的，可令

$$u(\boldsymbol{r},t)=w(\boldsymbol{r},t)+v(\boldsymbol{r},t)$$

而 $w(\boldsymbol{r},t)$满足齐次方程和非齐次初值，$v(\boldsymbol{r},t)$满足非齐次方程和齐次初值，于是解为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\rho(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\tau'+\int_0^t\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t' \tag{3.4.40}$$

以上讨论中边界条件始终保持齐次，对非齐次边界问题，将在 3.5 节中讨论.

3.4.2 波动方程的 Green 函数

考虑下列混合问题

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}u(\boldsymbol{r},t)+\rho(\boldsymbol{r})u_{tt}(\boldsymbol{r},t)=0,\qquad \boldsymbol{r}\in G,\qquad t>0\\&u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=u(\boldsymbol{r},0);\qquad u_t(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=\dot{u}(\boldsymbol{r},0)\\&\left[\alpha u(\boldsymbol{r},t)+\beta\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial n}\right]_{\partial G}=0,\qquad t>0\end{aligned} \tag{3.4.41}$$

仍用本征函数法求解，令

$$u(\boldsymbol{r},t)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m(t)\varphi_m(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.42}$$

有

$$c_m(t)=a_m\cos\sqrt{\lambda_m}t+b_m\sin\sqrt{\lambda_m}t \tag{3.4.43}$$

其中

$$a_m=\int_G u(\boldsymbol{r}',0)\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau';\qquad b_m=\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\int_G\dot{u}(\boldsymbol{r}',0)\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

假定 $\lambda_m\neq0$，即零不是 $\mathbf{L}$ 的本征值，于是有解

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_G G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)u(\boldsymbol{r}',0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'+\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\dot{u}(\boldsymbol{r}',0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.44}$$

其中 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$和 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$为 Green 函数

$$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\cos\sqrt{\lambda_n}t \tag{3.4.45}$$

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\sin\sqrt{\lambda_m}t \tag{3.4.46}$$

如果级数一致收敛,显然有

$$\frac{\partial G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial t} = G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) \tag{3.4.47}$$

故式(3.4.44)可写成

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)u(\boldsymbol{r}',0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' + \int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\dot{u}(\boldsymbol{r}',0)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.48}$$

因此只要定义混合问题式(3.4.41)的 Green 函数是 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$即可. 下面考察 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$满足的方程. 设初始分布

$$u(\boldsymbol{r},0)=0; \qquad \dot{u}(\boldsymbol{r},0)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)/\rho(\boldsymbol{r})$$

显然有

$$u(\boldsymbol{r},t)=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0,t)$$

因此,$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$是下列定解问题的解

$$\begin{gathered}
\mathbf{L}G_2+\rho(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}=0, \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G, \qquad t>0 \\
G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\big|_{t=0}=0; \qquad \left.\frac{\partial G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r}) \\
\left.\left(\alpha G_2+\beta\frac{\partial G_2}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0.
\end{gathered} \tag{3.4.49}$$

对非齐次方程

$$\mathbf{L}u(\boldsymbol{r},t)+\rho u_{tt}(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{r}\in G, \qquad t>0 \tag{3.4.50}$$

以及非齐次初值和齐次边界条件,仍可分

$$u(\boldsymbol{r},t)=w(\boldsymbol{r},t)+v(\boldsymbol{r},t)$$

而 $w(\boldsymbol{r},t)$是式(3.4.41)的解,$v(\boldsymbol{r},t)$则是下列问题的解

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}v(\boldsymbol{r},t)+\rho v_{tt}(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{r}\in G, \qquad t>0 \\
&v(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=v_t(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=0
\end{aligned} \tag{3.4.51}$$

令上式的解具有形式

$$v(\boldsymbol{r},t)=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t'\int_G G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau' \qquad t>0 \tag{3.4.52}$$

为满足式(3.4.51)中的初值,要求

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\big|_{t=0}=\left.\frac{\partial G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{3.4.53}$$

代入(3.4.51)第一式,要求

$$\mathbf{L}G_R + \rho\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2} = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(t-t') \tag{3.4.54}$$

G_R 称为式(3.4.51)的 Green 函数. 下面我们来构成 G_R. 为了在上式右边产生一个 $\delta(t-t')$函数,故令

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t') = g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')H(t-t') \tag{3.4.55}$$

$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$满足 $\mathbf{L}g+\rho g_{tt}=0$,则

$$\begin{aligned}\mathbf{L}G_R + \rho\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2} &= H(t-t')\mathbf{L}g + \rho\frac{\partial^2[gH(t-t')]}{\partial t^2}\\ &= H(t-t')\mathbf{L}g + \rho\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \left[2\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\mathrm{d}H(t-t')}{\mathrm{d}t} + g\frac{\mathrm{d}^2H(t-t')}{\mathrm{d}t^2}\right]\rho\\ &= \left[2\delta(t-t')\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\delta(t-t')}{\mathrm{d}t}g\right]\rho\end{aligned} \tag{3.4.56}$$

根据 3.1.1 小节的讨论,δ 函数的导数相当于算子

$$\frac{\mathrm{d}\delta(t-t')}{\mathrm{d}t} = -\delta(t-t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

于是式(3.4.56)变成

$$\mathbf{L}G_R + \rho\frac{\partial^2 G_R}{\partial t^2} = \delta(t-t')\rho\frac{\partial g}{\partial t} \tag{3.4.57}$$

因此,如果取

$$g_t\big|_{t=t'} = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.58}$$

则式(3.4.55)满足式(3.4.54). 考虑到式(3.4.49)中初始条件,显然取

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t') = G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') \tag{3.4.59}$$

能满足我们的要求,故我们求得

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t') = G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')H(t-t') \tag{3.4.60}$$

于是式(3.4.52)可变成

$$v(\boldsymbol{r},t) = \int_0^t \mathrm{d}t'\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.61}$$

因此非齐次问题式(3.4.50)的解为

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t) = &\frac{\partial}{\partial t}\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\rho(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\tau' + \int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\rho(\boldsymbol{r}')\dot{u}(\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\tau'\\ &+ \int_0^t \mathrm{d}t'\int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')f(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\tau', \qquad t>0\end{aligned} \tag{3.4.62}$$

物理上,式(3.4.60)定义的 Green 函数称为**推迟 Green 函数**. 如果定义 G_A

$$G_A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t') = -H(t'-t)G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') = \begin{cases}-G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t'), & t<t'\\ 0, & t>t'\end{cases} \tag{3.4.63}$$

$G_A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$称为**超前 Green 函数**. 由 $G_A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$得到的解相应于波动效应是向过去反过来传播的,在一阶方程中,不存在超前 Green 函数,故从现在的状态不能反演过去的状态,而波动方程具有时间反演对称性.

3.4.3 Cauchy 问题的基本解

当考虑无界区域时,混合问题即为初值问题. 这时的 Green 函数称为基本解. 首先考虑热传导方程的基本解

$$-\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)+\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}=0,\quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\qquad t>0 \quad (3.4.64)$$

$$G_0\big|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G+\partial G \quad (3.4.65)$$

从 1.4.1 小节我们知道式(3.4.64)和(3.4.65)的解为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^3\exp\left(\frac{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4t}\right) \quad (3.4.66)$$

根据 3.1.1 小节的讨论

$$\lim_{t\to 0}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

故满足初始条件. 式(3.4.64)和式(3.4.65)也可用本征函数法求之. $\mathbf{L}=-\nabla^2$ 的本征函数

$$\varphi_k(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

本征值构成连续谱 $\lambda=k^2$,这时式(3.4.5)中求和变积分

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_k\varphi_k(\boldsymbol{r})\varphi_k^*(\boldsymbol{r}')\exp(-\lambda_m t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{k}-k^2t]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

$$\equiv G_1\cdot G_2\cdot G_3$$

其中

$$G_i=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{i}(x_i-x'_i)k_x-k_x^2t]\mathrm{d}k_x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x_i-x'_i)^2}{4t}\right],(i=1,2,3)$$

于是得到式(3.4.66).

下面考虑波动方程 Cauchy 问题的基本解

$$-\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)+\frac{\partial^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial t^2}=0,\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\qquad t>0$$

$$G_0\big|_{t=0}=0;\qquad \left.\frac{\partial G_0}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G+\partial G$$

同样

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = \sum_m \varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\frac{\sin\sqrt{\lambda_m}t}{\sqrt{\lambda_m}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\sin kt}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

利用球坐标

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2\mathrm{d}k\int_0^\pi\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\frac{\sin kt}{k}\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]$$

因为 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$在积分过程中是常矢量,可选为 k_z 方向,于是

$$\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta_k$$

因此

$$\begin{aligned}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^\infty k\sin kt\,\mathrm{d}k\int_0^\pi\sin\theta_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta_k}\mathrm{d}\theta_k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\\ &= \frac{1}{2\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty\sin kt\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}k\\ &= \frac{1}{4\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^\infty\sin kt\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}k\\ &= \frac{1}{8\pi^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^\infty[\cos k(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)-\cos(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+t)]\mathrm{d}k\end{aligned}$$

利用 δ 函数的积分关系,上式为

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}[\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)-\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+t)].$$

(1) 当 $t>0$ 时

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t) \tag{3.4.67}$$

由式(3.4.60)

$$G_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t') = \frac{H(t-t')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-(t-t')] \tag{3.4.68}$$

上式与式(2.5.20)类似;

(2) 当 $t<0$ 时

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+t) \tag{3.4.69}$$

这时有超前 Green 函数式(3.4.63)得

$$G_A(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t') = \frac{H(t'-t)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+(t-t')]. \tag{3.4.70}$$

于是,三维波动方程初值问题的解为

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\left|\frac{u(\boldsymbol{r}',0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)\mathrm{d}\tau'+\frac{1}{4\pi}\int\frac{\dot{u}(\boldsymbol{r}',0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right|\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)\mathrm{d}\tau' \tag{3.4.71}$$

上式即是 Poisson 公式(2.5.19). 对二维波动方程,相当于三维情形中 $u(\boldsymbol{r},t)$与 z 无关,即

$$u(\boldsymbol{r},0)=u(x,y,0);\qquad \dot{u}(\boldsymbol{r},0)=\dot{u}(x,y,0)$$

由式(3.4.71)得

$$u(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'u(x',y',0)\left[\int_{-\infty}^{\infty} G_0(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)\mathrm{d}z'\right]$$
$$+\int \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\dot{u}(x',y',0)\left[\int_{-\infty}^{\infty} G_0(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)\mathrm{d}z'\right]$$

因此,二维基本解为

$$G_0^{2\mathrm{D}}(x,y,x',y',t)=\int_{-\infty}^{\infty} G_0(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)\mathrm{d}z' \tag{3.4.72}$$

上式的物理意义是很明显的:因为三维 Green 函数是点源产生的场,而二维 Green 函数是 z 方向无限长线源产生的场. 由迭加原理,二维 Green 函数应该是三维 Green 函数的积分. 由式(3.4.67)得

$$G_0^{2\mathrm{D}}(x,y,x',y',t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}z'$$

作变换 $s=z-z'$则

$$G_0^{2\mathrm{D}}(x,y,x',y',t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}s$$

而$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')+s^2}$,令 $\rho^2=(x-x')^2+(y-y')^2$,则

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{\rho^2+s^2};\qquad \frac{\mathrm{d}s}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{s}=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\sqrt{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2-\rho^2}}$$

故

$$G_0^{2\mathrm{D}}(x,y,x',y',t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\rho}^{\infty}\frac{\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-t)}{\sqrt{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2-\rho^2}}\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \tag{3.4.73}$$

分析上式积分,如果 $t<\rho$,根据 δ 函数性质,积分为零;如果 $t>\rho$,应有

$$G_0^{2\mathrm{D}}(x,y,x',y',t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2-\rho^2}}$$

可见二维 Green 函数仅仅依赖于 ρ,于是

$$G_0^{2\mathrm{D}}(\rho,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2-\rho^2}}H(t-\rho). \tag{3.4.74}$$

一维情况可看作与 y 无关的初始分布,同理只要对 $G_0^{2\mathrm{D}}(\rho,t)$作积分就可以了,计算表明

$$G_0^{1\mathrm{D}}(x,x',t)=\frac{1}{2}H(t-|x-x'|).$$

例 3.4.2 考虑运动电荷的场分布. 设电荷运动轨迹为 $\boldsymbol{x}(t)$,如图 3.4.2 所示,电量为 q,标量势 $u(\boldsymbol{r},t)$满足波动方程

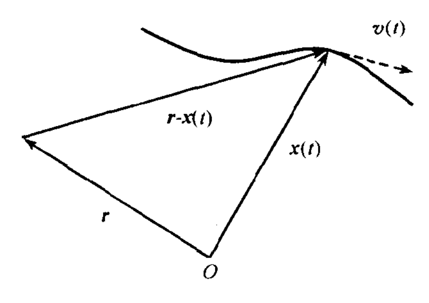


图 3.4.2　电荷运动轨迹 $x(t)$ 和场点 r

$$-\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{c^2}u_{tt}(\boldsymbol{r},t)=4\pi q\delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t)]$$

利用式(3.4.52)和(3.4.68)得

$$u(\boldsymbol{r},t)=q\int \mathrm{d}\tau'\int_0^t \frac{\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c-(t-t')]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta[\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{x}(t')]\mathrm{d}t' \tag{3.4.75}$$

直接对 r' 积分得

$$u(\boldsymbol{r},t)=q\int_0^t \frac{\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c-(t-t')]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}\mathrm{d}t' \tag{3.4.76}$$

作变换 $\eta=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c+t'$ 则

$$\mathrm{d}t'=\frac{\mathrm{d}\eta}{1+\dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}{\mathrm{d}t'}} \tag{3.4.77}$$

故有

$$u(\boldsymbol{r},t)=q\int_0^t \frac{\delta(\eta-t)}{1+\dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}{\mathrm{d}t'}}\cdot\frac{\mathrm{d}\eta}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}$$

$$=\frac{1}{\left[1+\dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}{\mathrm{d}t'}\right]\cdot|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|_{t'=t'(\eta);\,\eta=t}}$$

其中 $t'=t'(\eta)$ 关系可由变换 $\eta=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c+t'$ 解得

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{\left[1+\dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}{\mathrm{d}t'}\right]\cdot|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|_{t'=t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c}} \tag{3.4.78}$$

注意:推迟时间 t' 可有下列方程解得

$$t'=t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}{c} \tag{3.4.79}$$

计算 $\mathrm{d}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/\mathrm{d}t'$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|=-\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')]\cdot\boldsymbol{v}(t')$$

其中 $\boldsymbol{v}(t')=\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t')/\mathrm{d}t'$ 为粒子速度. 于是

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{q}{\left\{1-\dfrac{[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')]\cdot\boldsymbol{v}(t')}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}\right\}\cdot|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|_{t'=t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c}} \tag{3.4.80}$$

下面考虑两种特殊情况,设粒子在 x 方向以恒速运动:$x(t)=vt$

(1) $v<c$,求推迟时间 t'

$$t' = t - \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}$$

解为

$$t' = \frac{1}{1-\beta^2}\left[t - \frac{vx}{c^2} \pm \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + (1-\beta)^2(y^2 + z^2)}\right]$$

其中 $\beta = v/c < 1$,故

$$t' - t = \frac{1}{1-\beta^2}\left[-\frac{v}{c^2}(x - vt) \pm \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2 + z^2)}\right] \tag{3.4.81}$$

因为 $\beta < 1$,比较上式与式(3.4.79)知,上式中"+"为增根. 代入式(3.4.80)可得

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2 + z^2)}} \tag{3.4.82}$$

当 $\beta \ll 1$ 时,电荷可视为不动,故电势为静态势.

(2) $v > c$,这是比较有趣的情况,物理上相当于电荷在介质中作超光速运动. 由式(3.4.81)

$$t' - t = \frac{1}{\beta^2 - 1}\left[\frac{v}{c^2}(x - vt) \mp \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}\right] \tag{3.4.83}$$

因为由式(3.4.79) $t' - t = -|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t')|/c < 0$,当 $\beta < 1$ 时上式只有一个可能解. 但当 $\beta > 1$ 时,存在三种情况:

(a) 在区域 S_1 内无解,S_1 由下式决定

$$(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2) < 0$$

显然 $(\beta^2 - 1)(y^2 + z^2) = (x - vt)^2$ 是以 v 运动的锥面. 因此,上式表示运动锥的外部,锥的半顶角为 θ,如图 3.4.3 所示

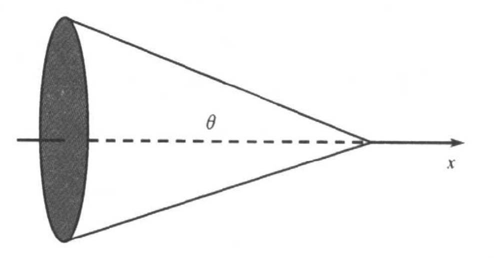


图 3.4.3 Cerenkov 辐射运动锥面

$$\sin\theta = \frac{c}{v}$$

因此在锥外,不存在推迟时间 t',故式(3.4.76)积分应为零

$$u(\boldsymbol{r}, t) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in \text{锥外}.$$

(b) 锥内 $(x - vt)^2 > (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)$,这时式(3.4.83)中"±"都是推迟时间,式(3.4.76)积分应有两项贡献

$$u(\boldsymbol{r}, t) = u_1(\boldsymbol{r}, t) + u_2(\boldsymbol{r}, t) = \frac{2q}{\sqrt{(vt - x)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}}.$$

(c) 锥面上 $(vt - x)^2 = (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)$,由上式得 $u(\boldsymbol{r}, t) \to \infty$.

因此,在锥面上产生奇性. 这时波动方程本身已不成立,必须修正. 例如在声学里,波动方程必须引进非线性项,来抑制这种发散;在电动力学里,因为带电粒子在介质中运动,须引进阻尼效应,来抵消这种发散. 上述现象称为 **Cherenkov 辐射**,利用此现象可测出带电粒子的运动速度.

3.4.4 混合问题 Green 函数的镜像法

对混合问题如果区域边界比较简单,也可用镜像法来构成 Green 函数. 下面举例说明之. 在 1.4 节我们已得到部分结论,本节从镜像法求混合问题 Green 函数的角度,进一步进行讨论.

例 3.4.3 半无限区域的热传导问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0, \qquad x\in(0,\infty), \qquad t>0 \\ &G|_{x=0}=0; \qquad G_t|_{t=0}=\delta(x-x') \end{aligned} \tag{3.4.84}$$

基本解为

$$G_0(x,x',t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}\right] \tag{3.4.85}$$

为了保证边界条件 $G|_{x=0}=0$,只要在 $x=-x'$ 处放一负点源即可,如图 3.4.4 所示. 于是所求的 Green 函数为

$$G(x,x',t)=-G_0(x,-x',t)+G_0(x,x',t) \tag{3.4.86}$$

当式(3.4.84)中边界条件是第二类 $G_x|_{x=0}=0$ 时, 显然,只要取

$$G(x,x',t)=G_0(x,-x',t)+G_0(x_0,x',t). \tag{3.4.87}$$

$-x'$　　O　　x'

图 3.4.4 半无限区域的像点

例 3.4.4 有限区域内的热传导问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0, \qquad x\in(0,l), \qquad t>0 \\ &G|_{x=0}=G|_{x=l}=0; \qquad G_t|_{t=0}=\delta(x-x') \end{aligned} \tag{3.4.88}$$

显然,由于存在二个端点,故对 x' 存在二个像点:一个关于 $x=0$ 对称,另一个关于 $x=l$ 对称(记这二个像点为 O_1 和 O_2). 但是 O_1 关于 l 又产生一个像点 O_3. 同样,O_2 关于 $x=0$ 也产生一个像点 O_4. 这样下去,在 x 轴将产生无限多个像点,如图 3.4.5 所示. 于是总的 Green 函数应该是

$$G(x,x',t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[G_0(x,2nl+x',t)-G_0(x,2nl-x',t)\right] \tag{3.4.89}$$

当式(3.4.88)中边界条件为第二类

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \tag{3.4.90}$$

用同样的方法,根据上例,像点应是"正"像点,因此

$$G(x,x',t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[G_0(x,2nl+x',t)+G_0(x,2nl-x',t)] \tag{3.4.91}$$

当要求 G 满足

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}=0;\qquad G|_{x=l}=0$$

则关于 $x=0$ 的像点应是"正"像点,而关于 $x=l$ 应是"负"像点. 于是可得

$$G(x,x',t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n[G_0(x,2nl+x',t)-G_0(x,2nl-x',t)].$$

图 3.4.5 有限区域的像点有无限

3.5 广义 Green 公式及非齐次问题的积分解

本节讨论一般形式的二阶线性偏微分算子

$$\mathbf{L}u\equiv\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}b_i(\boldsymbol{r})\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(\boldsymbol{r})u \tag{3.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,如何引进 Green 函数的问题. 为此,首先介绍广义 Green 公式和共轭边值问题的概念. 下面将看到式(3.5.1)的 Green 函数是用共轭算子来定义的.

3.5.1 共轭算子及广义 Green 公式

定义微分算子 $\mathbf{L}$ 的**共轭算子** $\mathbf{L}^+$

$$\mathbf{L}^+v=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2(a_{ij}v)}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_iv)+cv \tag{3.5.2}$$

如果 $\mathbf{L}=\mathbf{L}^+$ 则称 $\mathbf{L}$ 为**自轭算子**,例如

$$\mathbf{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r});\qquad \mathbf{L}^+=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r}) \tag{3.5.3}$$

故 $\mathbf{L}$ 是自轭算子,波动算子

$$\Pi \equiv \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{L}; \qquad \Pi^+ \equiv \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{L} \tag{3.5.4}$$

也是自轭算子. 但热传导算子

$$\Pi \equiv \rho \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{L}; \qquad \Pi^+ \equiv -\rho \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{L} \tag{3.5.5}$$

不是自轭的. 利用微分可得

$$v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^+ v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left[a_{ij} v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij} v) \right] + b_i uv \right\}$$

令

$$R_i \equiv \sum_{j=1}^{m} \left[a_{ij} v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij} v) \right] + b_i uv$$

则有

$$v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^+ v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R_i}{\partial x_i} \tag{3.5.6}$$

上式右边具有散度的形式,故可用 Green 公式. 为此在区域 Ω 内积分

$$\int_\Omega (v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^+ v)\mathrm{d}\Omega = \sum_{i=1}^{m} \iint_{\partial\Omega} R_i \cos(n_i, x_i)\mathrm{d}\Sigma \tag{3.5.7}$$

注意:$\mathrm{d}\Omega$ 和 $\mathrm{d}\Sigma$ 是区域 Ω 的广义体积元和面积元,$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界,区域 Ω 可能包括空间和时间变量. 显然上式是 Green 公式的推广.

如果取 v 为局部函数且取 Ω 无限大,那么

$$\int_\Omega (v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^+ v)\mathrm{d}\Omega = 0$$

与第二章的定义一致,但 $\mathbf{L}^+$ 对边界条件没有要求. 这就是共轭算子 $\mathbf{L}^+$ 取式(3.5.2)的原因. 进一步,令

$$b = \sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \cos(n_i, x_i) \tag{3.5.8}$$

$$\mathbf{P}u \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \cos(n_i, x_i) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \beta u$$

$$\mathbf{Q}v \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \cos(n_i, x_i) \frac{\partial v}{\partial x_j} - (b - \beta) v \tag{3.5.9}$$

其中 β 为 $\partial\Omega$ 上的任一连续函数,则式(3.5.7)可写成

$$\int_\Omega (v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^+ v)\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} (v\mathbf{P}u - u\mathbf{Q}v)\mathrm{d}\Sigma \tag{3.5.10}$$

P 和 Q 称为**共轭边界算子**. 显然 $\beta = \infty$,对应于第一类边界条件;$\beta = 0$ 对应于第二类边界条件;一般则为第三类边界条件. 考虑边值问题

$$\mathbf{L}u = f(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in \Omega; \quad \mathbf{P}u\,|_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in \partial\Omega \tag{3.5.11}$$

并定义 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$满足下列边值问题

$$\begin{aligned} &\overline{\mathbf{L}}^{+} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in \Omega \\ &\overline{\mathbf{Q}} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad \boldsymbol{r} \in \Omega + \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

其中 $\overline{\mathbf{L}}^{+}$ 和 $\overline{\mathbf{Q}}$ 表示 $\mathbf{L}^{+}$ 和 Q 对变量 $\boldsymbol{r}'$ 作用. 式(3.5.10)中取 $v = G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，而 $u(\boldsymbol{r}')$满足式(3.5.11)，则边值问题的解可表示成

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_{\Omega} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Omega' - \iint_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varphi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\,\Sigma' \tag{3.5.13}$$

注意:Green 函数现在由共轭算子定义. 下面分三种情况:$\mathbf{L}$ 在考虑的区域 $\Omega + \partial\Omega$ 上是椭圆、双曲和抛物型的来讨论.

3.5.2　椭圆型方程的 Green 函数

不失一般性，可认为 $\mathbf{L}$ 在区域内已标准化:$a_{ij} = 1$(当 $i = j$)或 0(当 $i \neq j$). 令 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$为三维空间的矢径，我们有

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n_i, x_i) + \beta u = \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u; \qquad b = \sum_{i=1}^{3} b_i \cos(n_i, x_i) \\ &\mathbf{Q}v = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_i}\cos(n_i, x_i) - (b-\beta)v = \frac{\partial v}{\partial n} - (b-\beta)v \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

式(3.5.10)变成

$$\int_{G} (u\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^{+}v)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} \left[u\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right) - u\left(\frac{\partial v}{\partial n} - (b-\beta)v\right) \right] \mathrm{d}S \tag{3.5.15}$$

注意:现在 $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\tau$ 是通常意义的三维体积元，而 $\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{d}S$ 是通常意义的面元. 考虑下面两个边值问题

$$\mathbf{L}u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in G; \quad \mathbf{P}u(\boldsymbol{r})\,|_{\partial G} = \varphi(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in \partial G \tag{3.5.16}$$

和

$$\mathbf{L}^{+}v(\boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in G; \quad \mathbf{Q}v(\boldsymbol{r})\,|_{\partial G} = \psi(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in \partial G \tag{3.5.17}$$

当 $\mathbf{L}$ 是椭圆型时，显然 $\mathbf{L}^{+}$ 也是椭圆型的. 式(3.5.16)和(3.5.17)称为**共轭边值问题**. 由式(3.5.15)可推出式(3.5.16)和(3.5.17)可解性之间的联系:

(1) 第一边值问题，设 $v(\boldsymbol{r})$是齐次问题

$$\mathbf{L}^{+}v(\boldsymbol{r}) = 0; \quad v(\boldsymbol{r})\,|_{\partial G} = 0 \tag{3.5.18}$$

的解,由式(3.5.15)得到式(3.5.16)的可解条件

$$\int_G f(\boldsymbol{r})v(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G}\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial v(\boldsymbol{r})}{\partial n}\mathrm{d}S = 0 \tag{3.5.19}$$

当式(3.5.18)只有零解时,上式自动满足. 这时对 φ 和 f 不必附加条件. 因此,当式(3.5.16)的共轭齐次边值问题只有零解时,式(3.5.16)总有解(对边界 ∂G 有一定光滑性要求).

(2) 第二和三边值问题,有解的必要条件为

$$\int_G f(\boldsymbol{r})v(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G}\varphi(\boldsymbol{r})v(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S = 0 \tag{3.5.20}$$

其中 v 满足

$$\mathbf{L}^+ v = 0; \qquad \mathbf{Q}v\,|_{\partial G} = 0. \tag{3.5.21}$$

下面考虑边值问题式(3.5.16)的 Green 函数及积分解:

(1) 第一边值问题的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 定义

$$\overline{\mathbf{L}}^+ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in G; \qquad G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{\partial G} = 0$$

由式(3.5.15)得

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' + \iint_{\partial G}\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S' \tag{3.5.22}$$

(2) 第二边值问题 Green 函数定义

$$\overline{\mathbf{L}}^+ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in G$$

$$\left[\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - bG(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\Bigg|_{\partial G} = 0$$

而式(3.5.16)的解为

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' - \iint_{\partial G}\varphi(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{3.5.23}$$

(3) 第三边值问题 Green 函数定义

$$\overline{\mathbf{L}}^+ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in G$$

$$\left[\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - (b-\beta)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\Bigg|_{\partial G} = 0$$

式(3.5.16)的解表示成

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' - \iint_{\partial G}\varphi(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' \tag{3.5.24}$$

下面介绍 Green 函数的对称性. 设式(3.5.16)和(3.5.17)的 Green 函数 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 分别为下列共轭问题的解

$$\overline{\mathbf{L}}^+ G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'); \qquad \overline{\mathbf{Q}}G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{\partial G} = 0$$

$$\overline{\mathbf{L}}^+ G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'); \qquad \overline{\mathbf{P}}G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,|_{\partial G} = 0$$

取 $u = G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 和 $v = G_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r}')$,由式(3.5.15)

$$\int_G G_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' - \int_G G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = 0$$

即

$$G_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{r}) = G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z}) \tag{3.5.25}$$

上式意味着共轭问题的 Green 函数是对称的.

我们可用构造法来求得式(3.5.1)在椭圆型情况下的基本解. 考虑基本解 $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$满足的方程

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 G_0}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{3} b_i\frac{\partial G_0}{\partial x_i} + cG_0 = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3.5.26}$$

根据 3.3 节的讨论,主部的基本解已知,设为 $G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$. 把上式改写成

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_i^2} = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \sum_{i=1}^{3} b_i\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_i} - cG_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

于是有积分方程

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \int_G G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\tau'' - \int_G\left[\sum_{i=1}^{3} b_i\frac{\partial G_0(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')}{\partial x_i} + cG_0(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')\right]G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\mathrm{d}\tau''$$

故可设式(3.5.26)的解有形式

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \int_G G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\rho(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'' \tag{3.5.27}$$

利用

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_i^2} = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

把式(3.5.27)代入式(3.5.26)可得

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \sum_{i=1}^{3} b_i\frac{\partial G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_i} + cG_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$
$$+ \int_G \rho(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')\left[\sum_{i=1}^{3} b_i\frac{\partial G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial x_i} + cG_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\right]\mathrm{d}\tau'' = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

故 $\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$满足积分方程

$$\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \int_G k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')\rho(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'' \tag{3.5.28}$$

其中

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\sum_{i=1}^{3} b_i\frac{\partial G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial x_i} - cG_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

$$k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'') = -\sum_{i=1}^{3} b_i\frac{\partial G_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')}{\partial x_i} - cG_0^0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'')$$

式(3.5.28)为第二类 Fredholm 积分方程,可用积分方程理论来讨论,详见第五章.

3.5.3 抛物型方程的 Green 函数

考虑简单情形，即热传导方程

$$\rho u_t - \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla u] + qu = f(\boldsymbol{r},t) \tag{3.5.29}$$

上式中把没有二阶导数的时间变量用 t 来表示，而 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 表示三维空间变量. 显然，只要 $p(\boldsymbol{r})>0$，整个算子

$$\boldsymbol{\Pi} = \rho \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q$$

是抛物型的，共轭算子为

$$\boldsymbol{\Pi}^+ = -\rho \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q,$$

这时式(3.5.7)中积分应在时-空四维空间 Ω 上进行. 时-空体积元 $\mathrm{d}\Omega$ 等于空间体积元 $\mathrm{d}\tau$ 与时间元 $\mathrm{d}t$ 之积：$\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$，设 R 是 $\boldsymbol{r}-t$ 空间中长为 T 的圆柱，圆柱的下底为 $t=0$，上底为 $t=T$，如图 3.5.1，仍用 G 表示三维空间中的区域，∂G 为其边界. 这时广义 Green 公式(3.5.7)为

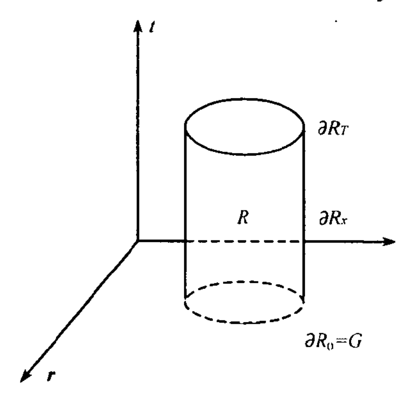


图 3.5.1 时-空四维空间中的区域 R

$$\int_R (v\boldsymbol{\Pi}u - u\boldsymbol{\Pi}^+ u)\mathrm{d}\Omega = \int_R \tilde{\nabla} \cdot [-pv\nabla u + pu\nabla v, \rho uv]\mathrm{d}\Omega$$
$$= \iint_{\partial R} [-pv\nabla u + pu\nabla v, \rho uv]\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma \tag{3.5.30}$$

其中 $\mathrm{d}\Sigma$ 是 ∂R_x 上的面积元，它等于空间区域 G 的边界 ∂G 上的面积元 $\mathrm{d}S$ 乘以 $\mathrm{d}t$. 上式中，$\tilde{\nabla}=(\nabla,\partial/\partial t)$ 表示空-时四维梯度算子，而

$$[(-pv\nabla u + pu\nabla v), \rho uv]$$

表示四维矢量；∂R 有三部分组成 $\partial R=\partial R_x+\partial R_T+\partial R_0$，在柱侧面 ∂R_x 上，法向矢量 $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{n}_x,0]$（其中 $\boldsymbol{n}_x$ 是三维空间区域 G 之边界 ∂G 上的法向矢量）；底面 ∂R_0：$\boldsymbol{n}=[0,-1]$；∂R_T：$\boldsymbol{n}=[0,1]$，代入式(3.5.30)有

$$\int_R (v\boldsymbol{\Pi}u - u\boldsymbol{\Pi}^+ v)\mathrm{d}\Omega = \iint_{\partial R_x}\left(-pv\frac{\partial u}{\partial n} + pu\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Sigma + \int_{\partial R_T}\rho uv\mathrm{d}\tau - \int_{\partial R_0}\rho uv\mathrm{d}\tau \tag{3.5.31}$$

下面利用上式求热传导方程定解问题

$$\boldsymbol{\Pi}u = f(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{r}\in G, \qquad t>0$$

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=u(\boldsymbol{r},0);\qquad \left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=b(\boldsymbol{r},t)\tag{3.5.32}$$

的积分解. 注意:边界条件是非齐次的. 定义上述定解问题的 Green 函数$\overline{G}^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}^{+}\overline{G}^{+}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'),\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\qquad 0<t<T\\&\overline{G}^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\big|_{t=T}=0;\qquad \left(\alpha\overline{G}^{+}+\beta\frac{\partial\overline{G}^{+}}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{3.5.33}$$

注意:初始条件取在 $t=T$. 式(3.5.31)中取 $v=\overline{G}^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$得

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r}',t')=&\int_0^T\int_G f(\boldsymbol{r},t)\overline{G}^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau+\int_G\rho(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r},0)\overline{G}^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0,t')\mathrm{d}\tau\\&+\begin{cases}-\displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})b(\boldsymbol{r},t)}{\alpha}\frac{\partial\overline{G}^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t, & \alpha\neq0\\ \displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})b(\boldsymbol{r},t)}{\beta}\overline{G}^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\mathrm{d}S\mathrm{d}t, & \beta\neq0\end{cases}\end{aligned}\tag{3.5.34}$$

只要求得 Green 函数 $\overline{G}^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')$,右边各项就已知,式(3.5.32)的解即求得.

如果我们定义 Green 函数 $G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$如下

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Pi}^{+}G^{+}=0,\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\qquad 0<t<T\\&G^{+}\big|_{t=T}=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r});\qquad \left(\alpha G^{+}+\beta\frac{\partial G^{+}}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0\end{aligned}\tag{3.5.35}$$

取式(3.5.31)中 u 满足式(3.5.32),而 $v=G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$,利用上式中初始条件

$$\int_{\partial R_T}\rho uv\,\mathrm{d}\tau=\int_{\partial R_T}\rho uG^{+}\bigg|_{t=T}\mathrm{d}\tau=u(\boldsymbol{r}',T)$$

因此有

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r}',T)=&\int_0^T\int_G f(\boldsymbol{r},t)G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau+\int_G\rho(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r},0)G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\tau\\&+\begin{cases}-\displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})b(\boldsymbol{r},t)}{\alpha}\frac{\partial G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t, & \alpha\neq0\\ \displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})b(\boldsymbol{r},t)}{\beta}G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t, & \beta\neq0\end{cases}\end{aligned}\tag{3.5.36}$$

只要求得 Green 函数 $G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$,上式右边全部已知. 下面作几点说明:

(1) 热传导的反时间初值问题是不适定的,但式(3.5.33)和(3.5.35)是共轭方程的反时间初值(即给定 $t=T$,求 $t<T$ 时间内的解),它是适定的。

(2) 式(3.5.36)中 T 为任意选取,故可视为问题的解. 比较式(3.5.34)和(3.5.36),右边对时间变量的积分均是从 0 到 T,但式(3.5.34)左边是 $u(\boldsymbol{r}',t')$,

而式(3.5.36)左边是 $u(\boldsymbol{r}',T)$. 可以证明两者是一致的,因为一般由式(3.5.33)定义的 Green 函数有性质

$$\overline{G}^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=0,\qquad \text{当 } t>t'(\text{当然仍有 } t<T)$$

故式(3.5.34)中对 t 的积分实质上变成从 0 积到 t'.

(3) 当边界条件为齐次时,式(3.5.36)应与式(3.4.40)一致,比较是容易的:利用本征函数展开法,$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$满足式(3.4.8)和(3.4.9)(正时问题:给定 $t=0$ 时刻的值,求 $t>0$ 时间的值),$G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$满足式(3.5.35)(反时问题:给定$t=T$ 时刻的值,求 $t<T$ 时间的值)的解分别为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_m t}\varphi_m^{*}(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}),\qquad t>0 \tag{3.5.37}$$

$$G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_m(T-t)}\varphi_m^{*}(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}),\qquad t<T \tag{3.5.38}$$

显然有

$$G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T-t) \tag{3.5.39}$$

利用上式,不难比较当边界条件齐次时,式(3.5.36)和(3.4.40)完全一样.

(4) 式(3.5.36)可应用于 Cauchy 问题,这时 $G^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$应为基本解 $G_0^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$,要求在无穷远处很快趋于零,于是式(3.5.36)中对面积分一项应为零,故

$$u(\boldsymbol{r}',T)=\int_0^T\int_G f(\boldsymbol{r},t)G_0^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau+\int_G\rho(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r},0)G_0^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\tau$$

由式(3.4.66),显然

$$G_0^{+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\frac{1}{[4\pi(T-t)]^{3/2}}\exp\left[\frac{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4(T-t)}\right],\qquad (t<T)$$

注意:G_0^{+} 不是热传导方程的基本解,而是其共轭方程的基本解.

对一维问题,式(3.5.31)中面积分变成在边界点积分,故需另外处理. 这时,区域 R 为$t-x$ 平面中的矩形,如图 3.5.2. 而式(3.5.31)变成

$$\begin{aligned}\iint_R(v\boldsymbol{\Pi}u-u\boldsymbol{\Pi}^{+}v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\iint_R\tilde{\nabla}\cdot[-pvu_x+puv_x,\rho uv]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\oint_{\partial R}[-pvu_x+puv_x,\rho uv].\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma\\&=-\int_0^l\rho uv|_{t=0}\mathrm{d}x+\int_0^l\rho uv|_{t=T}\mathrm{d}x\\&\quad+\int_0^T[-pvu_x+puv_x]|_{x=l}\mathrm{d}t-\int_0^T[-pvu_x+puv_x]|_{x=0}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.5.40}$$

因此,对一维混合问题

$$\boldsymbol{\Pi}u=f(x,t),x\in(0,l),t>0 \tag{3.5.41}$$

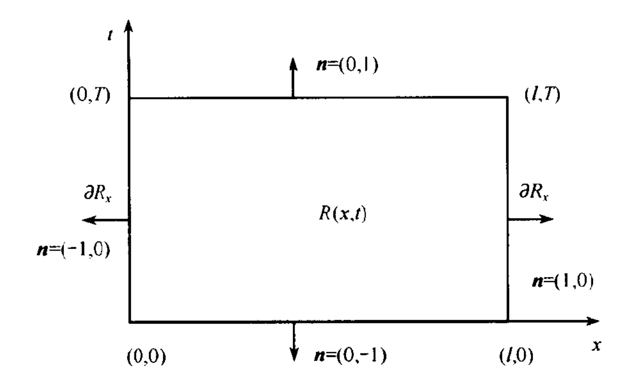


图 3.5.2 区域 R 为 $t-x$ 平面中的矩形

$$u\big|_{t=0}=u(x,0),$$

$$\left(\alpha_1 u-\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=g_1;\qquad \left(\alpha_2 u+\beta_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=l}=g_2 \tag{3.5.42}$$

定义 Green 函数 $G^+(x,x',t)$

$$\Pi^+G^+=0,\qquad x,x'\in(0,l),\qquad 0<t<T$$

$$G^+\big|_{t=T}=\delta(x,x')/\rho(x) \tag{3.5.43}$$

$$\left(\alpha_1 G^+-\beta_1\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=0;\qquad \left(\alpha_2 G^++\beta_2\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\bigg|_{x=l}=0$$

式(3.5.40)中取 $v=G^+(x,x',t)$，则有

$$u(x',T)=\int_0^T\int_0^l G^+(x,x',t)f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^l\rho(x)u(x,0)G^+(x,x',0)\mathrm{d}x$$
$$+\int_0^T p\left(G^+\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\bigg|_{x=l}\mathrm{d}t-\int_0^T p\left(G^+\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}\mathrm{d}t \tag{3.5.44}$$

上式最后二项可用式(3.5.42)和(3.5.43)中边界条件消去 u 和 u_x. 由于

$$\left(\alpha_1 u-\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=g_1;\qquad \left(\alpha_1 G^+-\beta_1\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=0 \tag{3.5.45}$$

设 $\alpha_1\neq0$，于是有关系，

$$-p\left(G^+\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=\frac{pg_1}{\alpha_1}\frac{\partial G^+}{\partial x} \tag{3.5.46}$$

对端点 $x=l$，同样有

$$-p\left(G^+\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial G^+}{\partial x}\right)\bigg|_{x=l}=\frac{pg_2}{\alpha_2}\frac{\partial G^+}{\partial x} \tag{3.5.47}$$

于是可得

$$u(x',T)=\int_0^T\int_0^l G^+(x,x',t)f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^l \rho(x)u(x,0)G^+(x,x',0)\mathrm{d}x$$
$$+\int_0^T \frac{p(0)g_1(t)}{\alpha_1}\cdot\frac{\partial G^+(0,x',t)}{\partial x}\mathrm{d}t-\int_0^T \frac{p(l)g_2(t)}{\alpha_2}\cdot\frac{\partial G^+(l,x',t)}{\partial x}\mathrm{d}t \tag{3.5.48}$$

对 β_1 和 $\beta_2\neq 0$ 可以得到类似的关系式.

3.5.4 双曲型方程的 Green 函数

考虑波动算子式(3.5.4)的混合问题

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Pi}u=f(\boldsymbol{r},t),\qquad \boldsymbol{r}\in G,\qquad t>0\\&u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=u(\boldsymbol{r},0);\qquad u_t(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=\dot{u}(\boldsymbol{r},0)\\&\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=b(\boldsymbol{r},t),\qquad \boldsymbol{r}\in\partial G,\qquad t\geqslant 0\end{aligned} \tag{3.5.49}$$

定义柱形区域 R 如图 3.5.1,由广义 Green 公式(3.5.7)

$$\begin{aligned}\int_R(v\mathbf{\Pi}u-u\mathbf{\Pi}v)\mathrm{d}\Omega&=\int_R\tilde{\nabla}\cdot[-pv\nabla u+pu\nabla v,\rho vu_t-\rho uv_t]\mathrm{d}\Omega\\&=\iint_{\partial R}[-pv\nabla u+pu\nabla v,\rho vu_t-\rho uv_t]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma\\&=\int_{\partial R_x}(-pv\nabla u+pu\nabla v)\cdot\boldsymbol{n}_x\mathrm{d}\Sigma\\&\quad+\int_{\partial RT}(\rho vu_t-\rho u_tv)\mathrm{d}\tau-\int_{\partial R_0}\rho(vu_t-uv_t)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{3.5.50}$$

定义式(3.5.49)的 Green 函数 $G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)$满足

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Pi}G_2^+=0,\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\qquad t<T\\&G_2^+\big|_{t=T}=0;\qquad \frac{\partial G_2^+}{\partial t}\bigg|_{t=T}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r})\\&\left(\alpha G_2^++\beta\frac{\partial G_2^+}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0\end{aligned} \tag{3.5.51}$$

式(3.5.50)中取 $v=G_2^+$,而 u 满足式(3.5.49),则

$$\int_{\partial R_T}\rho(vu_t-uv_t)\mathrm{d}\tau=-u(\boldsymbol{r}',T)$$

故

$$u(\boldsymbol{r}',T)=-\int_0^T\int_G G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\int_{\partial R_x}p\left(-G_2^+\frac{\partial u}{\partial n}+u\frac{\partial G_2^+}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Sigma$$
$$-\int_{\partial R_0}\rho\left[G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)\frac{\partial u(\boldsymbol{r},0)}{\partial t}-u(\boldsymbol{r},0)\frac{\partial G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)}{\partial t}\right]\mathrm{d}\tau \tag{3.5.52}$$

利用式(3.5.49)和(3.5.51)中边界条件

$$\int_{\partial R_x} p\left(-G_2^+\frac{\partial u}{\partial n}+u\frac{\partial G_2^+}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Sigma$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})b(\boldsymbol{r},t)}{\alpha}\cdot\frac{\partial G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'t)}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t, & \alpha\neq0\\ \displaystyle-\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})b(\boldsymbol{r},t)}{\beta}\cdot G_2^+(r,r',t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t, & \beta\neq0\end{cases}$$

假定 $\alpha\neq0$,可得

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r}',T)=&-\int_0^T\int_G G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\&-\int_{\partial R_0}\rho\left[G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)\dot{u}(\boldsymbol{r},0)-u(\boldsymbol{r},0)\frac{\partial G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)}{\partial t}\right]\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^T\iint_{\partial G}\frac{p(\boldsymbol{r})b(\boldsymbol{r},t)}{\alpha}\cdot\frac{\partial G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.5.53}$$

比较上式与式(3.4.62),当边界条件齐次 $b=0$ 时应一致.事实上因

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_m}t}{\sqrt{\lambda_m}}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}),\qquad t>0\tag{3.5.54}$$

而

$$G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\left[\sqrt{\lambda_m}(t-T)\right]}{\sqrt{\lambda_m}}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}),\qquad t<T\tag{3.5.55}$$

故

$$G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-T);\qquad\frac{\partial G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)}{\partial t}=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T)$$

$$G_2^+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',0)=G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',-T)=-G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',T)$$

代入式(3.5.53)即可证明,式(3.5.53)与(3.4.62)完全一致.

一维情形与 3.5.3 小节同样处理

$$\boldsymbol{\Pi}u=f(x,t),\quad x\in(0,l),\quad t>0\tag{3.5.56}$$

$$u\big|_{t=0}=u(x,0);\qquad u_t\big|_{t=0}=\dot{u}(x,0)\tag{3.5.57}$$

$$\left(\alpha_1u-\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=g_1;\qquad\left(\alpha_2u+\beta_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=l}=g_2\tag{3.5.58}$$

广义 Green 公式为

$$\int_R(v\boldsymbol{\Pi}u-u\boldsymbol{\Pi}v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_R\tilde{\nabla}\cdot[-pvu_x+puv_x,\rho(vu_t-uv_t)]\mathrm{d}t\mathrm{d}x\tag{3.5.59}$$

$$=-\int_0^l\rho(vu_t-uv_t)\bigg|_{t=0}\mathrm{d}x+\int_0^T p(-vu_x+uv_x)\big|_{x=l}\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^l \rho(vu_t - uv_t)\Big|_{t=T}\mathrm{d}x - \int_0^T p(-vu_x + uv_x)|_{x=0}\mathrm{d}t$$

取 $v = G_2^+(x, x', t)$ 满足

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi} G_2^+ = 0, \quad x, x' \in (0, l), \quad 0 < t < T \\ G_2^+|_{t=T} = 0; \quad \frac{\partial G_2^+}{\partial t}\Big|_{t=T} = \delta(x, x')/\rho(x) \\ \left(\alpha_1 G_2^+ - \beta_1 \frac{\partial G_2^+}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = 0; \quad \left(\alpha_2 G_2^+ + \beta_2 \frac{\partial G_2^+}{\partial x}\right)\Big|_{x=l} = 0\end{gathered} \tag{3.5.60}$$

则得

$$\begin{aligned} u(x', T) = & -\int_0^T\int_0^l G_2^+(x, x', t) f(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ & + \int_0^T p\left(-G_2^+ \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial G_2^+}{\partial x}\right)\Big|_{x=l}\mathrm{d}t - \int_0^T p\left(-G_2^+ \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial G_2^+}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}\mathrm{d}t \\ & - \int_0^l \rho\left[G_2^+(x, x', 0)\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - u(x, 0)\frac{\partial G_2^+(x, x', 0)}{\partial t}\right]\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.5.61}$$

利用边界条件并设 α_1 和 $\alpha_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} u(x', T) = & -\int_0^T\int_0^l G_2^+(x, x', t) f(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ & - \int_0^T \frac{p(0)g_1(t)}{\alpha_1}\cdot\frac{\partial G_2^+(0, x', t)}{\partial x}\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{p(l)g_2(t)}{\alpha_2}\cdot\frac{\partial G_2^+(l, x', t)}{\partial x}\mathrm{d}t \\ & - \int_0^l \rho\left[G_2^+(x, x', 0)\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - u(x, 0)\frac{\partial G_2^+(x, x', 0)}{\partial t}\right]\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.5.62}$$

当 $\lambda_0 = 0$ 是 $\mathbf{L}$ 的本征值时，必须引进广义 Green 函数. 事实上，这时式(3.4.46)不可能满足式(3.4.49)，式(3.5.55)也不可能满足式(3.5.51). 验证如下.

由式(3.4.46)或(3.5.54)

$$\frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}) \tag{3.5.63}$$

但由式(3.4.49)

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_2}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \frac{\delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\rho(\boldsymbol{r})} = \sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r}) \\ &= \varphi_0^*(\boldsymbol{r}')\varphi_0(\boldsymbol{r}) + \sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

比较上二式，显然式(3.4.46)不满足初值条件，但如果我们要求 Green 函数满足的初始条件改成

$$\left.\frac{\partial G_2}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r})-\varphi_0^*(\boldsymbol{r}')\varphi_0(\boldsymbol{r})$$

问题就不存在了. 于是可定义混合问题式(3.4.41)的广义 Green 函数 G_2 满足

$$\begin{gathered}\mathbf{\Pi}G_2=0,\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\qquad t>0\\ G_2\big|_{t=0}=0;\qquad \left.\frac{\partial G_2}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r})-\varphi_0^*(\boldsymbol{r}')\varphi_0(\boldsymbol{r})\\ \left.\left(\alpha G_2+\beta\frac{\partial G_2}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{3.5.64}$$

这时

$$G_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_m}t}{\sqrt{\lambda_m}}\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})\tag{3.5.65}$$

仍成立. 对定解问题式(3.5.49),讨论相似. 定义广义 Green 函数 G_2^+

$$\begin{gathered}\mathbf{\Pi}G_2^+=0,\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in G,\qquad t<T\\ G_2^+\big|_{t=T}=0;\qquad \left.\frac{\partial G_2^+}{\partial t}\right|_{t=T}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/\rho(\boldsymbol{r})-\varphi_0^*(\boldsymbol{r}')\varphi_0(\boldsymbol{r})\\ \left.\left(\alpha G_2^++\beta\frac{\partial G_2^+}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered}\tag{3.5.66}$$

这时通解式(3.4.62)和(3.5.53)中应增加项 $c\varphi_0(\boldsymbol{r})$,其中 c 为任意常数.

习 题 三

3.1 写出用 δ 函数表示的电偶极矩表达式.

3.2 函数

$$\rho(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x^2-1)$$

表示一维电荷密度分布,解释其物理意义.

3.3 证明

$$\delta(x+a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\delta^{(n)}(x).$$

3.4 证明

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|x|=2\delta(x)$$

提示:利用关系 $|x|=H(x)-xH(-x)$.

3.5 证明当 $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ 时,有

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=\frac{1}{|J|}\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)$$

其中 J 是变换 $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ 的 Jacobi 行列式, (x_0,y_0) 是 (ξ_0,η_0) 的对应点. 由此证明在极坐标下

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=\frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0).$$

3.6 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\cos ax\cos bx dx,\qquad (a>0,b>0).$$

3.7 验证 δ 函数的弱收敛公式

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin k(x-x')}{x-x'}=\delta(x-x')$;

(2) $\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}=\delta(\theta-\varphi)$.

3.8 证明

(1) 在球坐标下

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{\delta'(r-0^+)}{4\pi r^2}=-\frac{\delta'(r-0^+)}{4\pi r}=-\frac{\delta'(r)}{2\pi r}$$

(2) 在极坐标下

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{\delta(r-0^+)}{2\pi r}=-\frac{\delta'(r-0^+)}{2\pi}=-\frac{\delta'(r)}{\pi}.$$

3.9 证明一维波动方程 Cauchy 问题的基本解

$$\frac{\partial^2 G(x,x',t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 G(x,x',t)}{\partial x^2},\qquad x,x'\in(-\infty,\infty),\qquad t>0$$

$$G|_{t=0}=0;\qquad G_t|_{t=0}=\delta(x-x')$$

为

$$G(x,x',t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}; & |x-x'|\leqslant at\\ 0; & |x-x'|\geqslant at\end{cases}$$

提示:用 Fourier 积分法.

3.10 证明二维波动方程 Cauchy 问题的基本解

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right),\qquad (x,y,x',y')\in(-\infty,\infty),\qquad t>0$$

$$G|_{t=0}=0;\qquad G_t|_{t=0}=\delta(x-x')\delta(y-y')$$

为

$$G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a}\dfrac{1}{\sqrt{(at)^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}}; & |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leqslant at\\ 0; & |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\geqslant at\end{cases}$$

其中 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$. 提示:利用关系式

$$J_0(\lambda r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda r\cos\theta}\mathrm{d}\theta;\quad \int_0^{\infty}J_0(\lambda r)\sin a\lambda t\,\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{(at)^2-r^2}}; & at>r\\ 0; & at\leqslant r.\end{cases}$$

3.11 在第一类边界条件下,矩形区域 Laplace 算子的 Green 函数满足

$$-\nabla^2 G=\delta(x,x';y,y'),\qquad x,x'\in(0,a),y,y'\in(0,b)$$
$$G|_{x=0}=G|_{x=a}=G|_{y=0}=G|_{y=b}=0$$

证明 Green 函数为

$$G(x,y;x',y')=\frac{4}{ab\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{a}\right)^2\right]^{-1}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x'}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y'}{b}$$

3.12 在第一类边界条件下,柱内 Laplace 算子的 Green 函数满足

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}=-\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')$$
$$\rho\in(0,a),\qquad \varphi\in[0,2\pi],\qquad z\in(0,L)$$
$$G|_{\rho=a}=G|_{z=0,L}=0$$

证明 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{2}{a^2L}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{x_m^n}{a}\right)^2\right]^{-1}J_{m+1}^{-2}(x_m^n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\cdot$$
$$\sin\frac{k\pi z}{L}\sin\frac{k\pi z'}{L}J_m\left(\frac{x_m^n}{a}\rho\right)J_m\left(\frac{x_m^n}{a}\rho'\right)$$

其中 x_m^n 是 m 阶 Bessel 方程的第 n 个根:$J_m(x_m^n)=0$.

3.13 用 Fourier 积分法求一维 Helmholtz 算子的基本解

$$\frac{\mathrm{d}^2G(x,x')}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2G(x,x')=-\delta(x,x'),\qquad \lambda^2>0.$$

3.14 用 Fourier 积分法求二维 Helmholtz 算子的基本解

$$\nabla^2G+\lambda^2G=-\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\qquad \lambda^2>0.$$

3.15 求球形区域内波动方程的含时 Green 函数

$$G_{tt}=a^2\nabla^2G+\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(t,t'),\qquad (r<R)$$
$$G|_{r=R}=0;\qquad G|_{t<t'}=0$$

提示:用球内 Laplace 算子的本征函数式(2.4.35)展开

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}g_{ln}(t,t')\psi_{lnm}(r,\theta,\varphi)$$

而 g_{ln} 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2g_{ln}(t,t')}{\mathrm{d}t^2}+(\lambda_n^l)^2g_{ln}(t,t')=-\delta(t,t')$$
$$g_{ln}(t,t')|_{t<t'}=0$$

然后用 Fourier 积分方法求解上述方程.

3.16 证明二维圆形区域内波动方程的含时 Green 函数

$$G_{tt}=a^2\nabla^2G+\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\delta(t,t'),\qquad (r<R)$$
$$G|_{r=R}=0;\qquad G|_{t<t'}=0$$

为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')=\frac{1}{\pi aR}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x_m^nJ_{m+1}^2(x_m^n)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}J_m\left(\frac{x_m^n}{R}r\right)J\left(\frac{x_m^n}{R}r'\right)\cdot$$
$$\sin\left[\frac{ax_m^n}{R}(t-t')\right]H(t-t')$$

其中 x_m^n 是 m 阶 Bessel 方程的第 n 个根：$J_m(x_m^n)=0$.

提示：过程与上题类似.

3.17 利用镜像法求二维平面第一象限内的 Green 函数

$$-\nabla^2 G=\delta(x,x')\delta(y,y'),\qquad x,x'>0,\qquad y,y'>0.$$

$$G|_{x=y=0}=0$$

第四章　变分近似方法

本章介绍用变分法求本征值问题及边值问题的近似解，此法在物理及工程技术中有十分重要的应用. 主要内容有：4.1 节介绍变分法的基本问题，是全章的基础；4.2 节讨论变分法在本征值问题中的应用；4.3 节关于变分法在边值问题中的应用. 最后，在 4.4 节介绍几个十分有用的变分近似方法，主要介绍最速下降法和共轭梯度法.

4.1　变分法的基本问题

变分法的基本问题是求泛函的极值问题. 因此，首先介绍泛函和泛函极值的基本概念，然后讨论各种情况下如何求泛函极值满足的必要条件.

4.1.1　泛函和泛函极值的基本概念

考虑著名的最速降线问题：如图 4.1.1，在垂直平面 $x-y$ 内给定两点 A 和 B，求通过 (A,B) 两点的曲线 $y=y(x)$，使一质点在重力 g 作用下从 A 滑到 B 所需时间最短(假定无摩擦). 显然，连接 (A,B) 两点的曲线有无数多条，因此，这是一个极值问题. 下面写出这个极值问题的数学表达式. 根据运动学，质点的速率 v 由下式决定

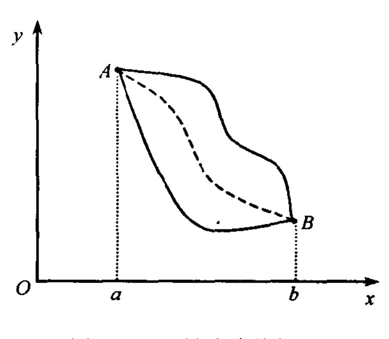


图 4.1.1　最速降线问题

$$v = \sqrt{2gy(x)} \tag{4.1.1}$$

故从 A 点到 B 点所需总时间为积分

$$T = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\mathrm{d}x \tag{4.1.2}$$

其中 $\mathrm{d}s$ 为曲线的弧长

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

于是我们的问题可归结为：求通过两定点的曲线 $y(x)$ 使积分 T 达到最小值. 极值问题式(4.1.2)的特点是：所求极值不是通常的函数极值，而是定积分的极值. 这个定积分随着函数 $y=y(x)$ 的不同而取不同的数值，称这种随给定函数取确定

值的对应关系为**泛函**. 式(4.1.2)中定积分 T 即是一个泛函, 像这种求泛函的极值问题, 称之为**变分问题**.

必须指出: 正如函数的极值(极大或极小)是在极值点的邻域内比较而言, 泛函的极值也是相对于某函数的邻域而言的. 以泛函式(4.1.2)为例, 来说明函数邻域的概念. 显然, 要使式(4.1.2)有意义, $y=y(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 至少必须要有连续的一阶导数, 即 y 属于 $C^1(a,b)$.

设泛函 T 在 $y=\xi(x)$ 处达到极值, 则 $y=\xi(x)$ 的**邻域**定义为: 对某一 $\varepsilon>0$, 满足条件

$$\begin{aligned}&|y(x)-\xi(x)|<\varepsilon, \qquad x\in(a,b)\\&|y'(x)-\xi'(x)|<\varepsilon, \qquad x\in(a,b)\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

的函数 $y(x)$ 称为属于 $\xi(x)$ 的**一阶 ε 邻域**. 于是泛函 T 在 $y=\xi(x)$ 处达到极值的意义是指: 对某一阶 ε 邻域中所有的 $y=y(x)$ 都使

$$T(\xi)\leqslant T(y)(\text{极小}); \qquad T(\xi)\geqslant T(y)(\text{极大}) \tag{4.1.4}$$

使 T 取极值的函数称为**极值函数**. 如果对全部可允许类函数恒有

$$T(\xi)\leqslant T(y) \quad \text{或} \quad T(\xi)\geqslant T(y)$$

则称泛函 T 在 $y=\xi(x)$ 达到最小值或最大值.

下面推出使式(4.1.2)中 T 取极小值的**必要条件**. 为一般起见, 式(4.1.2)写成

$$J(y)=\int_a^b f(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{4.1.5}$$

其中 f 是给定的函数. 设 $y=y(x)$ 使 J 取极值, 则对 $y=y(x)$ 邻域内的函数 $y^*(x)$, 应有

$$J(y)\geqslant J(y^*) \quad \text{或者} \quad J(y)\leqslant J(y^*)$$

取

$$y^*=y(x)+\alpha\eta(x) \tag{4.1.6}$$

因 $y(x)$ 及 $y^*(x)$ 都通过定点 (A,B), 故要求 $\eta(x)$ 满足端点条件

$$\eta(a)=\eta(b)=0 \tag{4.1.7}$$

当 α 足够小时 y^* 属于 $y(x)$ 的邻域. 考虑 J 在 y^* 的值

$$J(y^*)=\int_a^b f(x,y^*,y^{*\prime})\mathrm{d}x=\int_a^b f[x,y+\alpha\eta,y'(x)+\alpha\eta'(x)]\mathrm{d}x\equiv J(\alpha) \tag{4.1.8}$$

由于 $y(x)$ 及 $\eta(x)$ 给定后, J 是参数 α 的函数, 由假定 J 在 y 处取极值, 亦即 $\alpha=0$ 是 $J(\alpha)$ 的极值点. 根据函数极值的必要条件应有 $J'(\alpha)|_{\alpha=0}=0$. 由上式

$$\left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right]\mathrm{d}x=0$$

对第二项作分部积分

$$\left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}=\left.\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right]\right|_a^b+\int_a^b\eta(x)\left(f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}\right)\mathrm{d}x=0 \quad (4.1.9)$$

由式(4.1.7)

$$\left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_a^b\eta(x)\left(f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}\right)\mathrm{d}x=0 \quad (4.1.10)$$

因满足 $\eta(a)=\eta(b)=0$ 的函数 $\eta=\eta(x)$ 有无穷多，故要求式(4.1.10)恒成立必有

$$f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}=0 \quad (4.1.11)$$

展开后即有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad (4.1.12)$$

由上式知，要求 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微，且 f 关于其变数有相应的一阶和二阶的连续偏导数. 显然，积分式(4.1.2)或(4.1.5)有意义只要求 $y(x)$ 有连续的一阶导数就可以了. 因此式(4.1.11)仅仅是必要条件,称为泛函式(4.1.5)的 **Euler 方程**. 令

$$\delta J\equiv\left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\cdot\alpha=\left.[f_{y'}\delta y]\right|_a^b+\int_a^b\left(f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x \quad (4.1.13)$$

称 δy 为 $y(x)$ 的**一阶变分**，而 δJ 为泛函 $J(y)$ 的**一阶变分**. 类似于函数的一阶微分在极值点为零，泛函的一阶变分对极值函数也为零. 因要求式(4.1.5)中函数 $y=y(x)$ 通过固定的端点 (A,B)，故上述变分问题亦称为**固定端点的变分问题**.

对含多个函数或高阶导数的情形，讨论完全相似. 例如对泛函

$$J(y,z)=\int_a^b f(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x \quad (4.1.14)$$

设 $y(x)$ 和 $z(x)$ 使 $J(y,z)$ 取极值，在相应的一阶 ε 邻域中取 $y(x)+\alpha\eta(x)$ 和 $z(x)+\beta\xi(x)$，可得

$$\delta J=\left.[f_{y'}\delta y]\right|_a^b+\int_a^b\left(f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+\left.[f_{z'}\delta z]\right|_a^b+\int_a^b\left(f_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{z'}\right)\delta z\mathrm{d}x=0$$

因满足条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$ 和 $\xi(a)=\xi(b)=0$ 的函数有无穷多，故有

$$f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}=0;\qquad f_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{z'}=0 \quad (4.1.15)$$

方程(4.1.11)或(4.1.15)可有变分基本引理引出. 设函数 $\eta(x)\in C^1[a,b]$ 并且满足边界条件 $\eta(a)=\eta(b)=0$，如果对于 $y\in C^1[a,b]$，都有

$$\int_a^b y(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0 \quad (4.1.16)$$

则恒有 $y(x)\equiv0$, $x\in(a,b)$. 用反证法证明：假定存在某点 $\xi\in(a,b)$ 使

$y(\xi)\neq 0$,不妨假定 $y(\xi)>0$, 由 y 的连续性, 存在 ξ 的某个 δ 邻域$(\xi-\delta,\xi+\delta)$, 在该邻域有 $y(x)\geqslant C$(常数), 其中 $0<C<y(\xi)$. 作函数

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & a\leqslant x\leqslant \xi_1\\ (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2, & \xi_1<x<\xi_2\\ 0, & \xi_2\leqslant x\leqslant b\end{cases} \tag{4.1.17}$$

其中 $\xi_1=\xi-\delta,\xi_2=\xi+\delta$. 于是

$$\int_a^b y(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi_1}^{\xi_2}y(x)\eta(x)\mathrm{d}x\geqslant C\int_{\xi_1}^{\xi_2}\eta(x)\mathrm{d}x>0 \tag{4.1.18}$$

与式(4.1.16)矛盾! 故在(a,b)上恒有 $y(x)=0$.

对二元函数, 同样有变分基本引理: 设有限区域为 G, 边界∂G, 在 G 内 $u(x,y)$连续,如果对任何满足边界条件 $\eta(x,y)|_{\partial G}\in C^1$ 的函数 $\eta(x,y)$, 都有

$$\iint_G u(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{4.1.19}$$

则在 G 内恒有 $u(x,y)=0$. 该引理的证明与一元情况类似.

Euler 方程的一个特殊情况是, 如果 $f(x,y,y')$与 x 无关, 则式(4.1.11)可大大化简, 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'f_{y'}-f)=y''\frac{\partial f}{\partial y'}+y'\frac{\mathrm{d}f_{y'}}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial f}{\partial x}-y'\frac{\partial f}{\partial y}-y''\frac{\partial f}{\partial y'}=y'\left(\frac{\mathrm{d}f_{y'}}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$$

因此

$$y'f_{y'}-f=C(\text{常数}). \tag{4.1.20}$$

例 4.1.1 最速降线问题: 由式(4.1.2)

$$f(x,y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \tag{4.1.21}$$

可见 f 与 x 无关, 由式(4.1.20)

$$y'f_{y'}-f=y'\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}-\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}=\frac{-1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C(\text{常数}) \tag{4.1.22}$$

即

$$y(1+y'^2)=C(\text{常数}) \tag{4.1.23}$$

令 $y'=\tan t$ 代入上式得到 $y=C\sin^2 t$. 由

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=2C\sin^2 t\mathrm{d}t=C(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

得 $y(x)$的参数方程为

$$x=C\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C_1;\qquad y=\frac{C}{2}(1-\cos 2t) \tag{4.1.24}$$

常数 C 和 C_1 由 A 和 B 两点决定. 这是经过 A 和 B 两点的摆线.

例 4.1.2　求下列泛函的 Euler 方程，并要求 $y(x)$ 通过两定点 (A,B)

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_a^b\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q(x)y^2\right]\mathrm{d}x \tag{4.1.25}$$

由

$$\delta J(y) = \int_a^b\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y\delta y\right]\mathrm{d}x = \int_a^b\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + q(x)y\delta y\right]\mathrm{d}x$$

对第一项分部积分

$$\delta J(y) = [p(x)y'(x)\delta y]\Big|_a^b + \int_a^b\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y\right]\delta y\mathrm{d}x$$

因端点固定 $\delta y(a)=\delta y(b)=0$，故

$$\delta J(y) = \int_a^b\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)y\right]\delta y\mathrm{d}x$$

由 $\delta J=0$ 得 Euler 方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y(x) = 0 \tag{4.1.26}$$

显然上式是 Sturm-Liouville 型方程. 又因要求 $y(x)$ 通过定点 (A,B) 两点，故还有边界条件

$$y(x)\Big|_{x=a} = y(a); \qquad y(x)\Big|_{x=b} = y(b) \tag{4.1.27}$$

式(4.1.26)和(4.1.27)构成第一类边界条件的 Sturm-Liouville 边值问题 .

4.1.2　多个变量的变分问题

考虑二元函数 $u(x, y)$ 的泛函

$$J(u) = \iint_G F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1.28}$$

其中 F 是给定的函数. 假定有足够阶数的偏导(关于变元 x, y, u, u_x 及 u_y)，所谓足够阶偏导，意义见下面的讨论. 设 G 的边界为 ∂G，在 ∂G 上给定

$$u(x,y)\Big|_{\partial G} = u_0(x,y) \tag{4.1.29}$$

我们的问题是求满足上式的函数 $u(x,y)$，使泛函 $J(u)$ 取极值. 设 $u(x,y)$ 使 $J(u)$ 取极值，则在 $u(x,y)$ 的邻域内取比较函数 $u^*(x,y)$

$$u^*(x,y) = u(x,y) + \alpha\eta(x,y) \tag{4.1.30}$$

其中 α 是小参数. 因 $u(x,y)$ 和 $u^*(x,y)$ 在 ∂G 上都满足式(4.1.29)，故要求

$$\eta(x,y)\mid_{\partial G} = 0 \tag{4.1.31}$$

对 u^*，泛函 J 的值为

$$J(u^*) = \iint_G F(x,y,u^*,u_x^*,u_y^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_G F(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \equiv J(\alpha) \tag{4.1.32}$$

因 $J(u)$在 $u(x,y)$取极值，亦即 $\alpha=0$ 时 $J(\alpha)$取极值，于是由极值条件得

$$\left.\frac{\mathrm{d}J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \iint_G (F_u\eta + F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_G \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+ \iint_G \left[\frac{\partial(F_{u_x}\eta)}{\partial x} + \frac{\partial(F_{u_y}\eta)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1.33}$$

第二项可用平面 Green 公式化成∂G 上的积分

$$\iint_G \left[\frac{\partial(F_{u_x}\eta)}{\partial x} + \frac{\partial(F_{u_y}\eta)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial G}\eta(F_{u_y}\mathrm{d}y - F_{u_x}\mathrm{d}x)$$

利用式(4.1.31)，这个积分为零. 于是有

$$\iint_G \left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \equiv 0 \tag{4.1.34}$$

因 $\eta(x, y)$任意，故上式恒成立要求

$$F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} = 0 \tag{4.1.35}$$

上式即为泛函式(4.1.28)取极值的**必要条件**．由于上式是关于 $u(x,y)$的二阶偏微分方程，故要求 $u(x,y)\in C^2(G)$，又展开上式后知要求 F 关于所有的变量具有连续的二阶偏导数. 这些条件都是运算过程外加上去的. 事实上，只要$u(x,y)$具有连续的一阶导数，式(4.1.28)就有意义了.

对 n 个变量的情况，不难做类似运算，推出相应的 Euler 方程

$$J(u) = \iint_G F(x_1,\cdots,x_n;u,u_{x_1},\cdots,u_{x_n})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{4.1.36}$$

一阶变分

$$\delta J(u) = \iint_G \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_{x_1}}\delta u_{x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_{x_n}}\delta u_{x_n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$= \iint_G \left\{\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\right)\right]\delta u + \iint_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\delta u\right)\right\}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{4.1.37}$$

利用 n 维空间的 Green 公式

$$\iint_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(Fu_{x_i}\delta u)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^n \int_{\partial G} F_{u_{x_i}}\cos\theta_i\delta u\,\mathrm{d}S$$

又在边界上 $\delta u\big|_{\partial G}=0$，故上式代入式(4.1.37)得到

$$\delta J(u) = \iint_G\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\right)\right]\delta u \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \equiv 0$$

于是式(4.1.36)的 Euler 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_i}}\right) = 0. \tag{4.1.38}$$

例 4.1.3　求下列泛函的 Euler 方程

$$J(u) = \int_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau \tag{4.1.39}$$

$u(x,y,z)$在边界∂G 上给定

$$u(x,y,z)\Big|_{\partial G} = u_0(x,y,z) \tag{4.1.40}$$

由式(4.1.38)容易得 Euler 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{4.1.41}$$

上式是 Laplace 方程．因此，求泛函式(4.1.39)的极值问题化为求 Laplace 方程的第一类边值问题．

例 4.1.4　求下列泛函的 Euler 方程

$$J(u) = \int_G[p(\nabla u)^2 + (q - \lambda\rho)u^2]\mathrm{d}\tau \tag{4.1.42}$$

其中 u 在边界∂G 上给定．由式(4.1.38)得 Euler 方程为

$$-\nabla\cdot(p\nabla u) + qu = \lambda\rho u \tag{4.1.43}$$

如果泛函中含有高阶偏导数

$$J(u) = \iint_G F(x,y,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1.44}$$

其中 u 及其法向导数在 G 的边界∂G 上给定

$$u(x,y)\Big|_{\partial G} = u_0(x,y);\qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{\partial G} = u_1(x,y) \tag{4.1.45}$$

可以推出相应的 Euler 方程为

$$F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_{u_{xx}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{u_{xy}}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_{u_{yy}}}{\partial y^2} = 0. \tag{4.1.46}$$

例 4.1.5　求下列泛函的 Euler 方程

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_G(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1.47}$$

其中 $u(x,y)$及其法向导数在 G 的边界∂G 上给定．由式(4.1.46)得 Euler 方程

为

$$F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_{u_{xx}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{u_{xy}}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_{u_{yy}}}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_{yy}}{\partial y^2} = 0 \tag{4.1.48}$$

即得双调和方程

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0. \tag{4.1.49}$$

4.1.3 变端点问题和自然边界条件

以上考虑固定端点(或者固定边界)的变分,本节讨论自由端点(或边界)问题.这时存在所谓**自然边界条件**. 首先考虑泛函式(4.1.5)

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')\mathrm{d}x$$

但假定 $y(x)$在端点(A,B)的值 $y(a)$和 $y(b)$不固定,于是由式(4.1.13)得一阶变分

$$\delta J(y) = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right]\Big|_a^b + \int_a^b \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}\right)\delta y \mathrm{d}x$$

此时,由于 $\delta y(a)$、$\delta y(b)$及 $\delta y(x)$都是独立变分,因此从 $\delta J = 0$ 可推得

$$f_y - \frac{\mathrm{d}f_{y'}}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{4.1.50}$$

以及在端点的边界条件

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_a = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_b = 0 \tag{4.1.51}$$

式(4.1.50)为 Euler 方程,而上式则是要求满足的边界条件,这样的边界条件称之为**自然边界条件**.

对两个变数的泛函式(4.1.28)

$$\begin{aligned}
&\delta J(u)\\
&= \iint_G \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint_G \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial G}[F_{u_x}\cos(n, x) + F_{u_y}\cos(n, y)]\delta u \mathrm{d}S
\end{aligned}$$

由于边界上 $u(x, y)$自由,故边界上 $\delta u(x, y)$也是独立变分,于是由 $\delta J = 0$ 推得

$$F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} = 0 \tag{4.1.52}$$

及自然边界条件

$$F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)=0. \tag{4.1.53}$$

例 4.1.6　对泛函

$$J(u)=\int_G[(\nabla u)^2+2fu]\mathrm{d}\tau$$

可推得 Euler 方程为 Possion 方程

$$\nabla^2 u=f \tag{4.1.54}$$

而自然边界条件则为第二类齐次边界条件.

例 4.1.7　求下面泛函的 Euler 方程及自然边界条件

$$J(u)=\int_G[p(\nabla u)^2+qu^2-2fu]\,\mathrm{d}\tau-\iint_{\partial G}p(2gu-hu^2)\mathrm{d}S \tag{4.1.55}$$

其中 G 为三维或二维区域，∂G 为其边界. 一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta J(u)&=2\int_G[p(\nabla u)\cdot\nabla\delta u+qu\delta u-f\delta u]\mathrm{d}\tau-2\iint_{\partial G}p(g\delta u-hu\delta u)\mathrm{d}S\\&=2\iint_{\partial G}p\frac{\partial u}{\partial n}\delta u\mathrm{d}S+2\int_G[-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu-f]\delta u\mathrm{d}\tau\\&\quad-2\iint_{\partial G}p(g\delta u-hu\delta u)\mathrm{d}S\\&=2\int_G[-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu-f]\delta u\mathrm{d}\tau+2\iint_{\partial G}\left[p\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu-g\right)\right]\delta u\mathrm{d}S\end{aligned}$$

于是由 $\delta J=0$ 得 Euler 方程

$$-\nabla\cdot(p\nabla u)+qu=f \tag{4.1.56}$$

及自然边界条件

$$\left.\left(hu+\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=g \tag{4.1.57}$$

利用 Green 公式，式(4.1.55)可写成下列形式

$$J(u)=-\int_G[u\nabla\cdot(p\nabla u)-qu^2+2fu]-2\iint_{\partial G}pgu\mathrm{d}S \tag{4.1.58}$$

其中已经利用式(4.1.57). 如令 $\mathbf{L}=-\nabla\cdot(p\nabla)+q$，则上式可写成内积的形式

$$J(u)=(u,\mathbf{L}u)-2(f,u)-2\iint_{\partial G}pgu\mathrm{d}S. \tag{4.1.59}$$

4.1.4　泛函的条件极值问题

在许多实际问题中，要求泛函在一定约束条件下的极值问题. 下面考虑两种不同约束条件下如何求泛函的极值问题.

约束条件为函数方程：这样的问题叫**测地线问题**. 典型的例子是求位于曲面

$$G(x,y,z)=0 \tag{4.1.60}$$

上通过两固定点(x_0,y_0,z_0)和(x_1,y_1,z_1)的曲线$\{z=z(x),y=y(x)\}$使泛函

$$J(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',z,z')\mathrm{d}x \tag{4.1.61}$$

取极值. 显然函数 $y(x)$与 $z(x)$不是独立的，通过约束条件式(4.1.60)相关. 如果能从式(4.1.60)中解出 $y=\varphi(x,z)$或者 $z=\varphi(x,y)$,代入上式，问题即化为4.1.1小节讨论过的情形. 但问题是一般很难从式(4.1.60)解出 y 或 z，故必须寻求其他办法. 由式(4.1.61)，在端点固定条件下，J 的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta J(y,z)&=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z'\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y+\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\delta z\right\}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.1.62}$$

由于 δy 和 δz 不是独立变分，不能直接推出 Euler 方程. 但由式(4.1.60)两边取变分可得 $G_y\delta y+G_z\delta z=0$. 假定 $G_z\neq0$，可求得变分 δz 和 δy 的关系

$$\delta z=-\frac{G_y}{G_z}\delta y$$

代入式(4.1.62)得

$$\delta J(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\left(-\frac{G_y}{G_z}\right)\right\}\delta y\mathrm{d}x$$

因 δy 是独立变分，故由 $\delta J=0$ 可推出 Euler 方程

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\left(-\frac{G_y}{G_z}\right)=0 \tag{4.1.63}$$

上式即是要求的方程，它是泛函式(4.1.61)在约束条件式(4.1.60)下取极值满足的**必要条件**.

为了进一步引出所谓的 Lagrange 乘子法，把式(4.1.63)写成(设 $G_y\neq0$, $G_z\neq0$)

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)}{G_y}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)}{G_z}$$

令上式左右边等于同一函数 $-\lambda(x)$则有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial F}{\partial y}+\lambda(x)G_y\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\\&\left[\frac{\partial F}{\partial z}+\lambda(x)G_z\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0\end{aligned} \tag{4.1.64}$$

其中函数 $\lambda(x)$仍是未知，但再利用约束方程，联立式(4.1.60)就可求得 $\lambda(x)$, $y=y(x)$和 $z=z(x)$. 显然,式 (4.1.64)是下列泛函 $J(y,z)$的 Euler 方程

$$\tilde{J}(y,z) = J(y,z) + \int_{x_0}^{x_1} \lambda(x) G(x,y,z) \mathrm{d}x \tag{4.1.65}$$

于是，我们只要构成新的泛函 $\tilde{J}(y,z)$，则泛函 $J(y,z)$ 在约束式(4.1.60)下的极值问题等价于新泛函 $\tilde{J}(y,z)$ 的极值问题. 对新泛函，δy 和 δz 都是独立变分. 这种方法称为 **Lagrange 乘子法** . $\lambda(x)$ 称为 Lagrange 乘子. 上述结果可推广到 n 个变量函数的泛函

$$J(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n; y'_1, y'_2, \cdots, y'_n) \mathrm{d}x$$

$$G_m(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0, \qquad m = 1, 2 \cdots, p \qquad (p < n) \tag{4.1.66}$$

的极值问题. 作新泛函 $\tilde{J}$

$$\begin{aligned} \tilde{J}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = & J(y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ & + \sum_{m=1}^{p} \int_{x_0}^{x_1} \lambda_m(x) G_m(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.1.67}$$

则泛函在约束条件下的极值问题等价于求新泛函 $\tilde{J}$ 的无约束条件极值问题，于是可求得 Euler 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'_i} - \left[F_{y_i} + \sum_{m=1}^{p} \lambda_m(x) \frac{\partial G_m}{\partial y_i} \right] = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{4.1.68}$$

上式有 n 个方程，但有 $(n+p)$ 个未知函数 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 及 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$，另外 p 个方程即为约束方程.

例 4.1.8 求圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 上两点 P_1 及 P_2 之间长度最短的曲线. 设空间曲线的参数方程为

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \tag{4.1.69}$$

约束条件为

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \tag{4.1.70}$$

建立泛函

$$J(x,y,z) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \mathrm{d}t \tag{4.1.71}$$

其中 t_1 和 t_2 分别对应于二点 P_1 和 P_2. 由式(4.1.67)

$$\tilde{J}(x,y,z) = J(x,y,z) + \int_{t_1}^{t_2} \lambda(x)(x^2 + y^2 - R^2) \mathrm{d}t \tag{4.1.72}$$

注意到在圆柱面上 $x = R\cos t$；$y = R\sin t$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$，于是上式化简为

$$\tilde{J}(x,y,z) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2 + \dot{z}^2} \mathrm{d}t \tag{4.1.73}$$

Euler 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{R^2+\dot{z}^2}}\right)=0 \tag{4.1.74}$$

积分后得到 $z=C_1t+C_2$，其中常数 C_1 和 C_2 由点 P_1 与 P_2 决定，因此所求极值曲线为圆柱螺旋线

$$x=R\cos t;\quad y=R\sin t;\quad z=C_1t+C_2\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \tag{4.1.75}$$

约束条件是积分形式：这种问题通常称为**等周问题**. 典型的例子是求一条通过固定两点(P_0,P_1)，长度固定为 l 的曲线 $y=y(x)$，使面积

$$S=\int_{x_0}^{x_1}y(x)\mathrm{d}x \tag{4.1.76}$$

取极大值. 这个问题可表达为在条件

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=l(\text{常数})$$

下求泛函的极值. 考虑较一般的情况：设 $y(x)$通过(P_0,P_1)两点，满足广义的等周条件

$$J_1(y)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=l\ (\text{常数}) \tag{4.1.77}$$

求 $y=y(x)$使泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{4.1.78}$$

取极值的必要条件. 与 4.1.1 小节类似，把泛函的条件极值问题化为普通函数的条件极值问题. 设 $y(x)$满足式(4.1.77)且使式(4.1.78)取极值，在 $y(x)$的邻域内，可取比较函数 $y^*(x)$

$$y^*(x)=y(x)+\alpha\eta_1(x)+\beta\eta_2(x) \tag{4.1.79}$$

其中 α 和β 都是小参数，η_1 和 η_2 满足端点条件

$$\eta_1(x_0)=\eta_1(x_1)=0;\qquad \eta_2(x_0)=\eta_2(x_1)=0$$

与 4.1.1 小节不同的是，比较函数 $y^*(x)$中多引进了一个参数，这是由于在讨论函数的条件极值问题时，函数至少必须是二元的，才有可能同时满足极值条件和约束条件. 把式(4.1.79)代入式(4.1.77)和(4.1.78)

$$J_1(\alpha,\beta)\equiv J_1(y^*)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y+\alpha\eta_1+\beta\eta_2,y'+\alpha\eta'_1+\beta\eta'_2)\mathrm{d}x=l$$

$$J(\alpha,\beta)\equiv J(y^*)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\alpha\eta_1+\beta\eta_2,y'+\alpha\eta'_1+\beta\eta'_2)\mathrm{d}x \tag{4.1.80}$$

因 $y(x)$是在条件式(4.1.77)下使泛函 $J(y)$取极值的函数，当 $\alpha=\beta=0$ 时，

$y^* = y$,故 $J(\alpha,\beta)$在约束条件 $J_1(\alpha,\beta) = l$ 下，当 $\alpha = \beta = 0$ 时取极值. 因此，我们把求约束条件下泛函极值问题，化成了求约束条件下普通函数的极值问题. 根据 Lagrange 乘子法，应有

$$\left[\frac{\partial J(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial J_1(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = 0$$

$$\left[\frac{\partial J(\alpha,\beta)}{\partial \beta} + \lambda \frac{\partial J_1(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = 0 \tag{4.1.81}$$

注意：这里 λ 是常数. 把式(4.1.80)和(4.1.81)代入后即得

$$\int_{x_0}^{x_1}[(F_y + \lambda G_y)\eta_1 + (F_{y'} + \lambda G_{y'})\eta'_1]\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[(F_y + \lambda G_y)\eta_2 + (F_{y'} + \lambda G_{y'})\eta'_2]\mathrm{d}x = 0 \tag{4.1.82}$$

上两式第二项分部积分并且利用端点条件，得到

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[(F_y + \lambda G_y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'} + \lambda G_{y'})\right]\eta_1\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[(F_y + \lambda G_y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'} + \lambda G_{y'})\right]\eta_2\mathrm{d}x = 0 \tag{4.1.83}$$

故可推知

$$F_y + \lambda G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'} + \lambda G_{y'}) = 0 \tag{4.1.84}$$

上式是关于 $y(x)$的二阶常微分方程. 这个方程的通解中共含三个参数：两个积分常数和 λ. 积分常数可由端点条件决定，而 λ 则可由约束条件式(4.1.77)求得. 显然式(4.1.84)是泛函 $\tilde{J}(y)$在没有附加条件下的 Euler 方程

$$\tilde{J}(y) = J(y) + \lambda\int_{x_0}^{x_1}G\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}(F + \lambda G)\mathrm{d}x \tag{4.1.85}$$

这个结果可以推广到多个变数情形下求泛函条件极值的 Euler 方程. 与前面一样，这种方法也称为 Lagrange 乘子法 .

例 4.1.9　固定两点(A,B)悬挂长度为 l 的铁链，求在重力作用下铁链的形状. 在重力作用下，势能为

$$J(y) = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x \tag{4.1.86}$$

约束条件为

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = l \tag{4.1.87}$$

在重力作用下势能极小，故问题变成在约束条件下求 $J(y)$的极小. 由式(4.1.85)

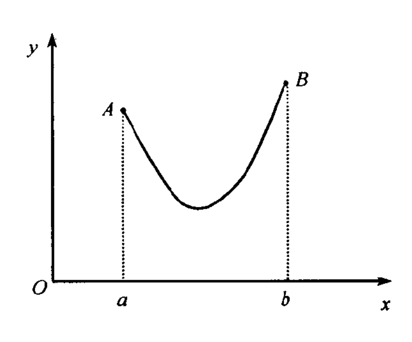


图 4.1.2　悬链线问题

$$\tilde{J}(y) = \int_a^b (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{4.1.88}$$

进一步，由式(4.1.20)得到

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - (y+\lambda)\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

于是 $y+\lambda = C_1\sqrt{1+y'^2}$，令 $y' = \sinh t$，则

$$y+\lambda = C_1\cosh t \tag{4.1.89}$$

因此

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\sinh t} = C_1\mathrm{d}t$$

于是 $x = C_1 t + C_2$，与式(4.1.89)一起消去 t

$$y+\lambda = C_1\cosh\left(\frac{x-C_2}{C_1}\right) \tag{4.1.90}$$

上式表示一族悬链线，其中(λ, C_1, C_2)由 A 和 B 坐标以及约束条件决定.

例 4.1.10　在约束条件

$$\int_G \rho u^2 \mathrm{d}\tau = 1 \tag{4.1.91}$$

下，使泛函

$$J(u) = \int_G F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z)\mathrm{d}\tau \tag{4.1.92}$$

取极值的函数 u 满足的 Euler 方程

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} - \frac{\partial F_{u_z}}{\partial z} = \lambda\rho u \tag{4.1.93}$$

当 F 取下列形式

$$F = \frac{1}{2}[p(\nabla u)^2 + qu^2]$$

时，式(4.1.93)即为

$$-\nabla\cdot(p\nabla u) + qu = \lambda\rho u \tag{4.1.94}$$

显然上式是本征值方程. 因此本征值问题与泛函的条件极值问题相关联，相应的 Lagrange 乘子即为**本征值**，而约束条件式(4.1.91)相当于**归一化条件**.

4.1.5　Hamilton 原理与最小位能原理

Hamilton 原理是指任何力学系统，若给定时刻 $t = t_1$ 的初始状态和时刻 $t = t_2$ 的终结状态，则从 t_1 到 t_2 的一切可能的运动状态中，**真实运动使泛函**

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t \tag{4.1.95}$$

的变分 $\delta J = 0$，其中 $L = T - U$ 称为 **Lagrange 函数**，T 和 U 分别是系统在 t 时刻的动能和位能. 对连续分布的力学系统，$L = T - U$、T 和 U 分别为系统的 Lagrange 密度函数、动能密度和位能密度，因此

$$J = \int_{t_1}^{t_2}\int_G L \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \tag{4.1.96}$$

其中 G 为系统占有的区域.

对与时间无关的静力学问题，一切可容许位移中，真实的平衡位置使位能的变分 $\delta U = 0$，如果平衡状态是稳定的，则 U 取极小.

例 4.1.11　考虑两端固定的弦，设弦长为 l，密度分布为 $\rho(x)$，内部张力分布为 $\tau(x)$，在外力作用下做横向振动. 设位移分布为 $u(x,t)$，则在 $x \to x + \mathrm{d}x$ 段具有动能 $\mathrm{d}T$

$$\mathrm{d}T = \frac{1}{2}\rho(x) u_t^2 \mathrm{d}x$$

而位能

$$\mathrm{d}U = \tau(x)\left(\sqrt{1 + u_x^2}\mathrm{d}x - \mathrm{d}x\right) \approx \frac{1}{2}\tau(x) u_x^2 \mathrm{d}x$$

于是系统的 Lagrange 函数 $L(t)$ 为

$$L(t) = \frac{1}{2}\int_0^l [\rho(x) u_t^2 - \tau(x) u_x^2] \mathrm{d}x \tag{4.1.97}$$

根据 Hamilton 原理，真实运动 $u(x,t)$ 使泛函 $J(u)$ 取极值

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\rho(x) u_t^2 - \tau(x) u_x^2] \mathrm{d}x \tag{4.1.98}$$

于是由 $\delta J(u) = 0$ 可得波动方程

$$\rho(x) u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}[\tau(x) u_x] = 0. \tag{4.1.99}$$

例 4.1.12　膜的横振动，设膜的张力 $\tau(x,y)$，密度 $\rho(x,y)$. 考虑膜在垂直于 x-y 平面上某有界域 G 的外力作用下做微小横振动. 记外力密度为 $f(x,y,t)$，膜垂直于 x-y 平面的位移 $u(x,y,t)$，系统的 Lagrange 函数 L_1 为

$$L_1 = \int_{t_1}^{t_2}\int_G \left[\frac{\rho}{2} u_t^2 - \frac{\tau}{2}(u_x^2 + u_y^2) + f u\right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}t \tag{4.1.100}$$

如果在 G 的边界 ∂G 上还有线密度 $p(s)$ 的外力作用，并设 $\sigma(s)$ 是膜的弹性系数，则边界 ∂G 上的 Lagrange 函数为

$$L_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G} \left[p(s) u - \frac{1}{2}\sigma(s) u^2\right] \mathrm{d}s \mathrm{d}t \tag{4.1.101}$$

根据 Hamilton 原理，真实运动应使泛函

$$J(u)=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}\left[\frac{\rho}{2}u_t^2-\frac{\tau}{2}(u_x^2+u_y^2)+fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}\left[p(s)u-\frac{1}{2}\sigma(s)u^2\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

取极值 .$J(u)$的一阶变分

$$\delta J(u)=\int_{t_1}^{t_2}\int_{G}\left[\rho u_t\frac{\partial\delta u}{\partial t}-\tau\left(u_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+u_y\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right)+f\delta u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}[p(s)-\sigma(s)u]\delta u\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{4.1.102}$$

对上式第一项作分部积分

$$\int_G\int_{t_1}^{t_2}\left(\rho u_t\frac{\partial\delta u}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_G\left[\rho u_t\delta u\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\delta u\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1.103}$$

对时间变量 $\delta u(x,y,t_1)=\delta u(x,y,t_2)\equiv0$，故有

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_G\left(\rho u_t\frac{\partial\delta u}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\int_G(\rho u_{tt}\delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

式(4.1.102)中第二项用 Green 公式则可得

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_G\tau\left(u_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+u_y\frac{\partial\delta u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_G\left[\frac{\partial(\tau u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau u_y)}{\partial y}\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_G\left[\frac{\partial(\tau u_x\delta u)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau u_y\delta u)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_G\left[\frac{\partial(\tau u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau u_y)}{\partial y}\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}\tau[u_x\cos(n,x)+u_y\cos(n,y)]\delta u\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

代入式(4.1.103)得

$$\delta J(u)=\int_{t_1}^{t_2}\int_G[-\rho u_{tt}+\nabla\cdot(\tau\nabla u)+f]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial G}\left[p(s)-\sigma(s)u-\tau\frac{\partial u}{\partial n}\right]\delta u\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{4.1.104}$$

由 $\delta J\equiv0$ 得 Euler 方程

$$\rho u_{tt}-\nabla\cdot(\tau\nabla u)=f(x,y,t) \tag{4.1.105}$$

及自然边界条件(力平衡方程)

$$\tau\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)u=p(s) \tag{4.1.106}$$

因此，求泛函的极值问题化为求波动方程(4.1.105)的第三类边值问题．如

果外力密度与时间无关，即为 $f(x,y)$，于是可以得到膜的平衡方程为

$$\nabla \cdot (\tau \nabla u) = f(x,y). \tag{4.1.107}$$

4.2　变分法在本征值问题中的应用

变分法求解本征值问题及边值问题的基本原理是：把一个微分方程的本征值问题或边值问题与一个泛函的极值问题等价起来，使原来的方程是这个泛函的 Euler 方程，然后用其他方法，如 Ritz 法，求出使泛函取极值的函数．本节讨论变分法在本征值问题中的应用．

4.2.1　Hermite 算子本征值问题与泛函极值问题的等价

设 L 是作用在 Hilbert 空间上的 Hermite 算子，即有

$$(\mathbf{L}\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \mathbf{L}\varphi_2) \tag{4.2.1}$$

或者

$$\int_G (\mathbf{L}\varphi_1)^* \varphi_2 \mathrm{d}\tau = \int_G \varphi_1^* (\mathbf{L}\varphi_2) \mathrm{d}\tau \tag{4.2.2}$$

下面寻找一泛函 $\lambda(\varphi)$，它的极值问题的 Euler 方程恰好是本征方程

$$\mathbf{L}\varphi = \lambda \rho \varphi \tag{4.2.3}$$

为此上式两边乘 φ^* 并积分，定义泛函 $\lambda(\varphi)$

$$\lambda(\varphi) = \frac{\int_G \varphi^* \mathbf{L}\varphi \mathrm{d}\tau}{\int_G \rho\varphi^* \varphi \mathrm{d}\tau} \tag{4.2.4}$$

设 A 和 B 分别为

$$A \equiv \int \varphi^* \mathbf{L}\varphi \mathrm{d}\tau; \qquad B \equiv \int \rho\varphi^* \varphi \mathrm{d}\tau$$

则

$$\lambda(\varphi) = \frac{A}{B} \tag{4.2.5}$$

考虑泛函 $\lambda(\varphi)$ 的极值问题：$\lambda(\varphi)$ 的一阶变分为

$$\delta\lambda(\varphi) = \frac{1}{B^2}(B\delta A - A\delta B) = \frac{1}{B}(\delta A - \lambda \delta B)$$

因

$$\delta A = \int_G \varphi^* \mathbf{L}\delta\varphi \mathrm{d}\tau + \int_G \delta\varphi^* \mathbf{L}\varphi \mathrm{d}\tau; \qquad \delta B = \int_G \rho(\varphi^* \delta\varphi + \delta\varphi^* \varphi) \mathrm{d}\tau$$

故

$$\delta\lambda(\varphi) = \frac{1}{B}\left[\int_G \delta\varphi^* \mathbf{L}\varphi \mathrm{d}\tau + \int_G \varphi^* \mathbf{L}\delta\varphi \mathrm{d}\tau - \lambda\left(\int_G \rho\varphi^* \delta\varphi \mathrm{d}\tau + \int_G \rho\delta\varphi^* \varphi \mathrm{d}\tau\right)\right]$$

$$= \frac{1}{B}\left[\int_G \delta\varphi^* (\mathbf{L}\varphi - \lambda\rho\varphi)\mathrm{d}\tau + \int_G \varphi^* (\mathbf{L}\varphi - \lambda\rho)\delta\varphi \mathrm{d}\tau\right] \quad (4.2.6)$$

利用 $\mathbf{L}$ 的 Hermite 性，上式第二项变成

$$\int_G \varphi^* (\mathbf{L} - \lambda\rho)\delta\varphi \mathrm{d}\tau = \int_G \delta\varphi[(\mathbf{L} - \lambda\rho)\varphi]^* \mathrm{d}\tau = \left[\int_G \delta\varphi^* (\mathbf{L}\varphi - \lambda\rho\varphi)\mathrm{d}\tau\right]^*$$

于是

$$\delta\lambda(\varphi) = \frac{2}{B}\mathrm{Re}\left[\int_G (\mathbf{L} - \lambda\rho)\varphi\delta\varphi^* \mathrm{d}\tau\right] \quad (4.2.7)$$

因 $\delta\varphi^*$ 是独立变分，可得到 $\lambda(\varphi)$取极值时满足的 Euler 方程，即为式(4.2.3)，故泛函式(4.2.4)的 Euler 方程为本征值方程．从上式可以得到定理：如果函数 φ 满足方程(4.2.3)，则对任意的变分

$$\delta\lambda(\varphi) = 0 \quad (4.2.8)$$

反之，如果函数 φ 满足式(4.2.8)，它必是方程(4.2.3)的解．结论的正面是显然的，因为由式(4.2.7)和(4.2.3)直接可推出式(4.2.8)．反之，如果设 φ 满足式(4.2.8)，但不满足式(4.2.3)

$$(\mathbf{L} - \lambda\rho)\varphi = \psi \neq 0$$

这时可取 $\delta\varphi = \varepsilon\psi$，而 ε 足够小，使 $\varepsilon\psi$ 是 φ 的邻域且 $\varepsilon > 0$，代入式(4.2.7)

$$\delta\lambda(\varphi) = \frac{2\varepsilon}{B}\int_G |\psi|^2 \mathrm{d}\tau \geqslant 0$$

因此只有当 $\psi \equiv 0$(几乎处处)时才有 $\delta\lambda(\varphi) = 0$，故当 $\delta\lambda(\varphi) = 0$ 时必有$(\mathbf{L} - \lambda\rho)\varphi = 0$．由于式(4.2.8)是泛函 $\lambda(\varphi)$取极值的必要条件，这样我们就把本征值问题与求 $\lambda(\varphi)$的极值问题等价起来了．如果我们用其他方法，如 Ritz 法，求得 $\lambda(\varphi)$的极值问题的解，也就求得了本征值问题的解．

设 $\mathbf{L}$ 的本征值依大小排列成(假定 λ_1 有限)

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \cdots \quad (4.2.9)$$

相应的本征函数为

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \cdots \quad (4.2.10)$$

可以证明定理：(1) $\lambda(\varphi)$的最小值(注意与极小值之区别)等于 λ_1，这里 φ 为属于允许函数类中的任意函数；(2) 当 $\lambda(\varphi)$在 $\varphi = \varphi_1$ 处达到它的最小值 λ_1 时，即为对应于 λ_1 的本征函数．所谓允许函数类中的函数是指 φ 必须具有方程(4.2.3)中出现的各阶连续导数，并且满足相应的齐次边界条件．

此定理的证明可直接用上面得到的结论：事实上，由于 φ_i 是使泛函 $\lambda(\varphi)$达到极值(极小值)的函数

$$\delta\lambda(\varphi)|_{\varphi=\varphi_i} = 0$$

即本征值是泛函 $\lambda(\varphi)$ 的极小值，又 λ_1 是 λ_i 中最小者，因此 λ_1 是最小值

$$\lambda_1 = \min[\lambda(\varphi)]$$

并且当 $\varphi = \varphi_1$ 时 $\lambda(\varphi)$ 取得最小值 λ_1.

进一步，可以得到结论：

(1) 在正交于 φ_1 的所有 φ 中(φ 属于允许函数类中函数)，$\lambda(\varphi)$ 的最小值为 λ_2，且使 $\lambda(\varphi)$ 取得最小值 λ_2 的函数 φ 即为本征函数 φ_2；

(2) 一般定义在正交于($\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}$)所构成的子空间的函数 φ 上，泛函 $\lambda(\varphi)$ 取最小值为 λ_n，而达到最小值的 φ 即为本征函数 φ_n.

例 4.2.1 考虑简单的一维情形，在端点满足第一类齐次边界条件

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = \lambda\varphi, \qquad x \in (0, l); \qquad \varphi\mid_{x=0} = \varphi\mid_{x=l} = 0 \tag{4.2.11}$$

上式严格解为

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x; \qquad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

最小本征值为 $\lambda_1 = \pi^2/l^2 = 9.8596/l^2$. 另一方面，根据前面的讨论，泛函

$$\lambda(\varphi) = \frac{1}{\int_0^l \varphi^* \varphi \mathrm{d}x}\left(-\int_0^l \varphi^* \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x\right) \tag{4.2.12}$$

对任一允许类函数 φ 应有 $\lambda(\varphi) \geqslant \lambda_1$，取 φ 如下

$$\varphi(x) = x(l - x) \tag{4.2.13}$$

显然 $\varphi(x)$ 具有连续的二阶导数，且在端点 $x = 0$ 和 $x = l$ 上 $\varphi = 0$，上式代入式(4.2.12)

$$\lambda(\varphi) = \frac{2\int_0^l x(l-x)\mathrm{d}x}{\int_0^l x^2(l-x)^2\mathrm{d}x} = \frac{10}{l^2} > \lambda_1$$

如果把 $\lambda = 10/l^2$ 作为 λ_1 的近似值，则相对误差为

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_1} \approx 1.4\%$$

这是一个很好的近似.

例 4.2.2 考虑一般形式的 Sturm-Liouville 本征值问题

$$\mathrm{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + q(x); \qquad p(x) > 0, \qquad q(x) \geqslant 0$$

本征方程为

$$\mathbf{L}\varphi_i = \lambda\rho\varphi_i \tag{4.2.14}$$

$$\left(\alpha_1\varphi_i-\beta_1\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=0}=0;\qquad\left(\alpha_2\varphi_i+\beta_2\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=l}=0\quad(4.2.15)$$

相应地有

$$\begin{aligned}A&=\int_0^l\varphi\mathbf{L}\varphi\mathrm{d}x=-\int_0^l\left[\varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)-q\varphi^2\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^l\left[p\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2+q\varphi^2\right]\mathrm{d}x+\left(p\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=0}-\left(p\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=l}\end{aligned}\quad(4.2.16)$$

如果式(4.2.15)是第一或第二类边界条件，则

$$A=\int_0^l\varphi\mathbf{L}\varphi\mathrm{d}x=\int_0^l\left[p\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2+q\varphi^2\right]\mathrm{d}x\quad(4.2.17)$$

设 $\varphi(x)$二次连续可微且满足边界条件，则 $\varphi(x)$可展成$\{\varphi_i(x)\}$的广义 Fourier 级数

$$\varphi(x)\approx\sum_{i=1}^{\infty}a_i\varphi_i(x);\qquad a_i=\int_0^l\rho(x)\varphi_i^*(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\quad(4.2.18)$$

把式(4.2.18)代入式(4.2.16)，并假定$\{\varphi_i(x)\}$已归一化

$$\begin{aligned}A&=\int_0^l\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*\varphi_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j\mathbf{L}\varphi_j\right)\mathrm{d}x=\sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_ia_i^*a_j\int_0^l\rho\varphi_i^*\varphi_j\mathrm{d}x\\&=\sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_ia_i^*a_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|a_i|^2\end{aligned}$$

而

$$B=\int_0^l\rho|\varphi|^2\mathrm{d}x=\int_0^l\rho\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*\varphi_i^*\sum_{j=1}^{\infty}a_j\varphi_j\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2$$

于是

$$\lambda(\varphi)=\frac{A}{B}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2\lambda_i}{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2}\geqslant\frac{\lambda_1\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2}{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2}=\lambda_1$$

因此 $\lambda(\varphi)\geqslant\lambda_1$. 如果 φ 正交于 φ_1，则 $a_1=0$，于是

$$\lambda(\varphi)=\frac{A}{B}=\frac{\sum_{i=2}^{\infty}|a_i|^2\lambda_i}{\sum_{i=2}^{\infty}|a_i|^2}\geqslant\frac{\lambda_2\sum_{i=2}^{\infty}|a_i|^2}{\sum_{i=2}^{\infty}|a_i|^2}=\lambda_2$$

如果 φ 正交于$(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$,则 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=0$，于是

$$\lambda(\varphi)=\frac{A}{B}=\frac{\sum_{i=n}^{\infty}|a_i|^2\lambda_i}{\sum_{i=n}^{\infty}|a_i|^2}\geqslant\lambda_n$$

这与前面得到的结果是一致的.

4.2.2 完备性定理的证明

利用 4.2.1 小节结果，证明下述完备性定理. 设 Hermite 算子 $\mathbf{L}$ 的本征值可数

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\cdots$$

相应的本征函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 正交归一. 如果

(1) 最小本征值 λ_1 有限,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$,

则本征函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 构成允许函数类中的完备系，即如果 φ 属于允许函数类，则可展成广义 Fourier 级数

$$\varphi(\boldsymbol{r})\approx\sum_{i=1}^{\infty}a_i\varphi_i(\boldsymbol{r})\tag{4.2.19}$$

其中广义 Fourier 系数为

$$a_i=\int_G\rho\varphi_i^*(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=(\varphi_i,\varphi)\tag{4.2.20}$$

式(4.2.19)在平均收敛意义下成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_G\left|\varphi(\boldsymbol{r})-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(\boldsymbol{r})\right|^2\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=0$$

证明：设

$$R_n=\varphi(\boldsymbol{r})-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(\boldsymbol{r})\tag{4.2.21}$$

则以 $\rho(\boldsymbol{r})\varphi_i^*(\boldsymbol{r})$ 乘上式两边并积分可得

$$\int_G\varphi_i^*(\boldsymbol{r})R_n\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\int_G\varphi_i^*(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\rho\mathrm{d}\tau-a_i=0$$

故 R_n 正交于 $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$ 构成的子空间：$R_n\perp(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$. 其次考虑

$$\lambda(R_n)=\frac{\int_G R_n^*\mathbf{L}R_n\mathrm{d}\tau}{\int_G\rho R_n^*R_n\mathrm{d}\tau}\tag{4.2.22}$$

因为 R_n 正交于 $(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$，故由 4.2.1 小节的讨论，得

$$\lambda(R_n)\geqslant\lambda_{n+1}\tag{4.2.23}$$

把式(4.2.21)代入式(4.2.22),得

$$\int_G R_n^* \mathbf{L} R_n \mathrm{d}\tau = \int_G \left[\varphi^*(\boldsymbol{r}) - \sum_{i=1}^n a_i^* \varphi_i^*(\boldsymbol{r})\right] \mathbf{L} \left[\varphi(\boldsymbol{r}) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(\boldsymbol{r})\right] \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_G \varphi^*(\boldsymbol{r}) \mathbf{L} \varphi(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau - \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \lambda_i$$

利用式(4.2.23)

$$\frac{\int_G \varphi^*(\boldsymbol{r}) \mathbf{L} \varphi(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau - \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \lambda_i}{\int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau} \geqslant \lambda_{n+1}$$

即

$$\int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left[\int_G \varphi^* \mathbf{L} \varphi \mathrm{d}\tau - \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \lambda_i\right] \tag{4.2.24}$$

根据条件，最小本征值 λ_1 有限，故存在某个 $\lambda_m \geqslant 0$，并且对所有 $i > m$，$\lambda_i \geqslant 0$，对不等式(4.2.24)右边进行放大，即去掉所有正本征值的项

$$\int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left[\int_G \varphi^* \mathbf{L} \varphi \mathrm{d}\tau - \sum_{i=1}^m |a_i|^2 \lambda_i\right]$$

如果所有本征值 $\lambda_i \geqslant 0$，则上式为

$$\int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} \int_G \varphi^* \mathbf{L} \varphi \mathrm{d}\tau$$

当 $n \to \infty$，由条件 $\lambda_{n+1} \to \infty$ 得

$$\lim_{n \to \infty} \int_G \rho |R_n|^2 \mathrm{d}\tau = 0$$

因此式(4.2.19)平均收敛到 $\varphi(\boldsymbol{r})$，于是完备性得证.

例 4.2.3 根据第二章讨论，算子 $\mathbf{L} = -\nabla[p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$ 在满足边界条件

$$\left(\alpha\varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0$$

的函数类中是 Hermite 算子，当 $p(\boldsymbol{r}) > 0$ 和 $q(\boldsymbol{r}) \geqslant 0$，$\mathbf{L}$ 是正算子，本征值 $\lambda_i > 0$，如果还满足 $\lambda_{n+1} \to \infty$ $(n \to \infty)$，则本征函数系是完备的.

4.2.3 极值定理

利用 4.2.1 小节的结果求第 $(n+1)$ 个本征值 λ_{n+1} 时，需要知道前 n 个本征函数 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$，这是十分不方便的. 极值定理(亦称为 maximum-minimum 原理)，允许我们直接求第 $(n+1)$ 个本征值，而无需知道前 n 个本征函数. 假定：

(1) $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是定义在 G 上的正交函数集合(不一定是 $\boldsymbol{L}$ 的本征函数)；

(2) $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$满足∂G上的边界条件；

(3) φ属允许函数类且正交于$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$

$$\int_G \rho f_i \varphi \mathrm{d}\tau = 0, \qquad (i = 1,2\cdots,n) \tag{4.2.25}$$

则对每一个集合$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，可得一个$\lambda(\varphi)$的极小值$\min[\lambda(\varphi)]$．变化所有可能的集合$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，我们可以得到一系列的极小值$\min[\lambda(\varphi)]$.

极值定理告诉我们：这一系列极小值中的最大值恰好为第$(n+1)$个本征值.如果记相对于$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$的极小值为$\mathrm{m}(f_1,f_2,\cdots,f_n)=\min[\lambda(\varphi)]$则极值定理可表示为

$$\max[\mathrm{m}(f_1,f_2,\cdots,f_n)] = \lambda_{n+1}. \tag{4.2.26}$$

证明：设$\mathbf{L}$的本征值问题$\mathbf{L}\varphi_i=\lambda_i\rho\varphi_i$，记$\varphi$为

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \varphi_i \tag{4.2.27}$$

并要求φ正交于$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$

$$(\varphi,f_j) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(\varphi_i,f_i) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{4.2.28}$$

因上式有$(n+1)$个未知数a_i，而方程只有n个，故解有无穷多. 于是式(4.2.27)的φ总能正交于$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$. 因为

$$\mathbf{L}\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \mathbf{L}\varphi_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_i\lambda_i\rho\varphi_i \tag{4.2.29}$$

故

$$\int_G \varphi^* \mathbf{L}\varphi \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \lambda_i \tag{4.2.30}$$

又

$$\int_G \rho\varphi^* \varphi \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \tag{4.2.31}$$

上二式代入式(4.2.4)

$$\lambda(\varphi) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \lambda_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2} = \lambda_{n+1}$$

因此$\mathrm{m}(f_1,f_2,\cdots,f_n)=\min[\lambda(\varphi)]\leqslant\lambda_{n+1}$. 故$\mathrm{m}(f_1,f_2,\cdots,f_n)$的最大值不能大于$\lambda_{n+1}$. 现在证明$\mathrm{m}(f_1,f_2,\cdots,f_n)$最大值达到值$\lambda_{n+1}$. 事实上，只要取

$$(f_1,f_2,\cdots,f_n) = (\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$$

由4.2.1小节结论知：$\mathrm{m}(f_1,f_2,\cdots,f_n)=\lambda_{n+1}$. 因此一般有

$$\max[\mathrm{m}(f_1,f_2,\cdots,f_n)] = \lambda_{n+1}.$$

下面考虑一个有趣的现象：即本征值与区域 G 的依赖关系，用此关系可以估计本征值的上限和下限．假定在 G 内 $\mathbf{L}$ 的本征函数及本征值分别为 φ 和 λ

$$\mathbf{L}\varphi_i = \lambda_i\rho\varphi_i, \qquad \boldsymbol{r} \in G; \qquad \varphi|_{\partial G} = 0 \tag{4.2.32}$$

另一方面，设 G' 是 G 的一个内部区域(可以与 G 有一部分重合，$\partial G'$ 是 G' 的边界．在 G' 内 $\mathbf{L}$ 的本征函数及本征值分别为 φ' 和 λ'

$$\mathbf{L}\,\varphi'_i = \lambda'_i\rho\,\varphi'_i, \qquad \boldsymbol{r} \in G'; \qquad \varphi'|_{\partial G'} = 0 \tag{4.2.33}$$

设 λ 和 λ' 均可数，并排列成

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots; \qquad \lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \lambda'_3 \leqslant \cdots$$

则对所有的 n，不等式成立

$$\lambda'_n \geqslant \lambda_n \tag{4.2.34}$$

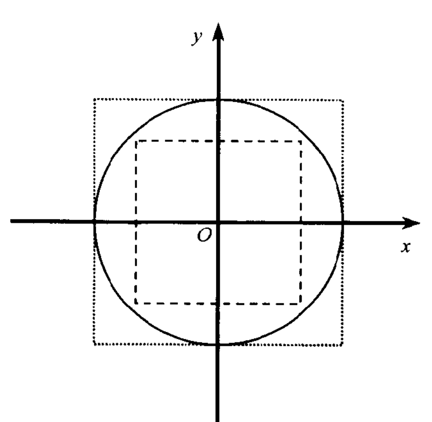


图 4.2.1　单位圆的内、外接正方形

下面仅仅说明 $n=1$ 的情况，对普遍的 n 证明较复杂，故略去．事实上，因

$$\lambda'_1 = \min[\lambda(\varphi')]; \qquad \lambda_1 = \min[\lambda(\varphi)]$$

首先取 φ 如下

$$\varphi = \begin{cases} \varphi', & x \in G' \\ 0, & x \in \partial G' \text{ 和 } \partial G \text{ 之间区域} \end{cases}$$

则对满足上式的所有可能的 φ：$\min[\lambda(\varphi)] = \min[\lambda(\varphi')] = \lambda'_1$，但因 φ 仍有选择余地，通过进一步的选择，可能找到 φ 使 $\lambda(\varphi)$ 比 λ'_1 更小，于是 $\lambda_1 = \min[\lambda(\varphi)] \leqslant \lambda'_1$．利用上述结果，可对本征值进行估计．

例 4.2.4　如图 4.2.1，考虑半径为 1 的圆内问题，本征方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \lambda\varphi = 0\ ; \qquad \varphi(r,\theta)|_{r=1} = 0 \tag{4.2.35}$$

其中 $r \in (0,1)$，$\theta \in [0,2\pi]$．根据第二章讨论，本征值由 Bessel 函数的零点给出

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0 \tag{4.2.36}$$

最小本征值是零级 Bessel 函数的第一个根 α_{10} 的平方

$$\lambda_{10} = \alpha_{10}^2 \approx 5.76 \tag{4.2.37}$$

另一方面分别考虑单位圆的外接正方形 G' 和内接正方形 G''(如图 4.2.1)上本征方程的解．对外接正方形 G'，易求得最小本征值为

$$\tilde{\lambda}_{11} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2} \approx 4.93 \tag{4.2.38}$$

而对内接正方形 G''，最小本征值为

$$\bar{\lambda}_{11}=2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2=\pi^2\approx 9.86 \tag{4.2.39}$$

因 G' 包含 G，故应有 $\lambda_{10}\geqslant\tilde{\lambda}_{11}$；而 G 包含 G''，应有 $\bar{\lambda}_{11}\geqslant\lambda_{10}$，即

$$\tilde{\lambda}_{11}\leqslant\lambda_{10}\leqslant\bar{\lambda}_{11}$$

由式(4.2.37)～(4.2.39)，这显然是成立的.

例 4.2.5　如图 4.2.2，考虑四分之一椭圆区域内的本征值问题

$$\nabla^2\varphi+\lambda\varphi=0;\qquad \varphi|_{\partial G}=0 \tag{4.2.40}$$

首先用 4.2.1 小节的方法来估计最小本征值 $\lambda_1\leqslant\lambda(\varphi)$，取允许函数

$$\varphi=xy\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{4.2.41}$$

显然 φ 有连续的二阶导数，且在 G 的边界上 $\varphi|_{\partial G}=0$

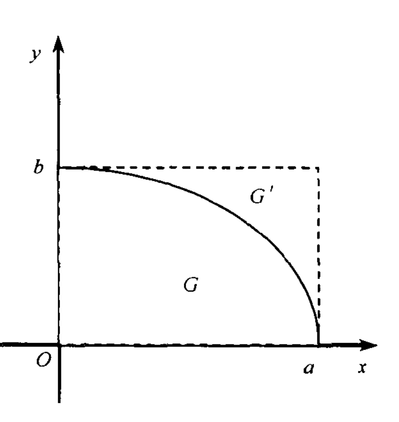


图 4.2.2　第一象限椭圆和外接矩形

$$\mathbf{L}\varphi=6\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)xy$$

$$\begin{aligned}\iint_G\varphi\mathbf{L}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=6\iint_G\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)x^2y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=6\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)a^2b^2r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi(1-r^2)abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{\pi}{64}a^2b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\end{aligned}$$

$$\iint_G\varphi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_G x^2y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{960}a^2b^2$$

于是

$$\lambda_1\leqslant\frac{\iint_G\varphi\mathbf{L}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_G\varphi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\equiv\lambda_1^{(1)}$$

然后用本节的方法，考虑长为 b，宽为 a 的矩形区域 G'，在 G' 内最小本征值

$$\bar{\lambda}_1^{(1)}=\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}=9.86\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

因 G' 包含 G，故 $\bar{\lambda}_1^{(1)}\leqslant\lambda_1$. 于是应有 $\bar{\lambda}_1^{(1)}\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_1^{(1)}$，即

$$9.86\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\leqslant \lambda_1 \leqslant 15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

上述问题严格求解是困难的，利用这种方法，可以估计最小本征值的大小.

4.2.4 Ritz 和 Galerkin 法解本征值问题

Ritz 法求泛函问题的基本原理：设 φ 属于允许函数类且 φ 使泛函 $J(\varphi)$ 达到极小值 m，即

$$\min[J(\varphi)] = m$$

由于精确求解 φ 困难，现在的问题是：能否找到一个 $\bar{\varphi}$(属允许函数类)，使 $J(\bar{\varphi})$ 之值极为接近 m，可以指望 $\bar{\varphi}$ 是精确解 φ 的很好近似. 进一步，如果我们能找到一个序列 $\bar{\varphi}_n$(属允许函数类)，并且有

$$\lim_{n\to\infty} J(\bar{\varphi}_n) = m$$

则有理由相信序列 $\{\bar{\varphi}_n\}$ 在某种意义上收敛于解 φ，即

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\varphi}_n = \varphi$$

为了求得 $\bar{\varphi}$，Ritz 提出方法：考虑依赖于参数 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的函数族

$$\varphi = \Phi(\boldsymbol{r}, a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{4.2.42}$$

对于任意 $\{a_i\}$，Φ 都属允许函数类. 我们在 Φ 中找出一个使泛函 $J(\varphi)$ 取极小值的函数 $\bar{\varphi} = \Phi(\boldsymbol{r}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_n)$，则 $\bar{\varphi}$ 可视为我们所要求的近似值. 把式(4.2.42)代入 $J(\varphi)$ 积分，可得 $J \equiv J(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，求 J 的极小值得到方程组

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{4.2.43}$$

于是可求得 $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_n)$. 一般 J 与 $\{a_i\}$ 的关系是二次式，则式(4.2.43)是线性方程组，当 n 不是很大时，容易求解.

但存在的问题是，在何种条件下 $\bar{\varphi}$ 确是精确解 φ 的较好近似？为此，考虑一系列函数族

$$\varphi = \Phi_n(\boldsymbol{r}, a_1, a_2, \cdots, a_n), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{4.2.44}$$

由于 a_k 个数的增加，每一族都比前一族来得大. 假定 $\bar{\varphi}_i$ 是第 i 次近似，即 $\bar{\varphi}_i$ 在 Φ_i 中给出 $J(\varphi)$ 的最小值，由于 Φ_{i+1} 包含 Φ_i，故有

$$J(\bar{\varphi}_i) \geqslant J(\bar{\varphi}_{i+1})$$

因此，当 i 增加时，$J(\bar{\varphi}_i)$ 变小. 可以证明 $\{J(\bar{\varphi}_i)\}$ 趋于真正的极小

$$\lim_{i=\infty} J(\bar{\varphi}_i) = \min[J(\varphi)] = m$$

的充分条件是：对于任一个具有 l 阶连续偏导且属于允许函数的函数 φ，以及正数 $\varepsilon > 0$，可以找到这样的 n 和式(4.2.44)的第 n 族函数

$$\varphi_n = \Phi_n(\boldsymbol{r}, a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

使

$$|\varphi_n - \varphi| < \varepsilon; \qquad \left|\frac{\partial^k \varphi_n}{\partial x_i^k} - \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_i^k}\right| < \varepsilon, \qquad (k = 1,2,\cdots,l) \quad (4.2.45)$$

其中 l 是$J(\varphi)$中出现的最高阶偏导数．式(4.2.45)的意义是，对任意一个可取函数及其 l 阶偏导数，可以用给定的函数族中的函数任意精确地逼近．在实际问题中，总取函数族式(4.2.44)为完备函数系的线性组合．设$\{\varphi_i^R\}$为完备系(指在 H_0 空间中的完备性，内积为带算子内积$(\mathbf{L}u,v)$，详细讨论见 4.3 节)，并且 φ_i^R 本身也属于允许函数类(即满足可微和边界条件)，则函数族可取为

$$\bar{\varphi}^n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i^R \qquad (4.2.46)$$

考虑 Hermite 算子 $\mathbf{L}$ 的本征值问题

$$\mathbf{L}\varphi = \lambda\rho\varphi \qquad (4.2.47)$$

显然上式与泛函 $J(\varphi)$的极值问题等价

$$J(\varphi) = \int_G (\varphi^* \mathbf{L}\varphi - \lambda\varphi\varphi^* \rho)\mathrm{d}\tau \qquad (4.2.48)$$

把近似解式(4.2.46)代入上式，且取式(4.2.46)中 a_i 为实数(否则可归入 φ_i^R)

$$J(\bar{\varphi}^n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \left[\int_G \varphi_i^{*R} \mathbf{L}\varphi_j^R \mathrm{d}\tau - \lambda\int_G \varphi_i^{*R}\varphi_j^R \rho \mathrm{d}\tau\right] \qquad (4.2.49)$$

令

$$\alpha_{ij}^R = \int_G \varphi_i^{*R}\mathbf{L}\varphi_j^R \mathrm{d}\tau; \qquad \gamma_{ij}^R = \int_G \varphi_i^{*R}\varphi_j^R \rho\mathrm{d}\tau$$

于是

$$J(\varphi^n) = \sum_{i,j=1}^{n} [\alpha_{ij}^R a_i a_j - \lambda\gamma_{ij}^R a_i a_j] \qquad (4.2.50)$$

求 $J(\bar{\varphi}^n)$的极值

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial a_i} = \sum_{j=1} [\alpha_{ij}^R - \lambda\gamma_{ij}^R] a_j = 0, \quad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (4.2.51)$$

上式是 $n\times n$ 的齐次线性方程组，故 a_i 有解的条件是

$$\det|\alpha_{ij} - \lambda\gamma_{ij}| = 0 \qquad (4.2.52)$$

由上式可求得前 n 个本征值$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$(第一个本征值 λ_1 即为最小本征值)以及一套系数 $\bar{a}_j$，它们对应于前 n 个本征函数$\{\bar{\varphi}_n^i\}$．当式(4.2.46)只取一项 $\bar{\varphi} = a_1\varphi_1^R$，可求得最小本征值的近似值

$$\lambda_1 \approx \frac{\int_G \varphi_1^{*R}\mathbf{L}\varphi_1^R \mathrm{d}\tau}{\int_G \varphi_1^R \varphi_1^{*R}\rho\mathrm{d}\tau}$$

Galerkin 的基本思想：假定要求方程

$$\mathbf{L}(\varphi) = 0 \tag{4.2.53}$$

的解(其中 L 是任意线性或非线性算子)，将问题的近似解取成形式

$$\bar{\varphi}^n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i^G \tag{4.2.54}$$

其中$\{\varphi_i^G\}$构成完备系(指在 H 空间中的完备性，详细讨论见 4.3 节)，且属允许函数类. 要使 $\bar{\varphi}^n$ 是式(4.2.53)的精确解，$\mathbf{L}(\bar{\varphi}^n)$ 应恒等于零，即等价于 $\mathbf{L}(\bar{\varphi}^n)$与完备系$\{\varphi_i^G\}$的一切函数正交

$$\int_G \mathbf{L}(\bar{\varphi}^n)\varphi_i^G \mathrm{d}\tau = 0, \qquad (i = 1,2,\cdots)$$

但现在只有 n 个常数$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，一般只能满足 n 个正交条件

$$\int_G \varphi_j^{*G} \mathbf{L}(\bar{\varphi}^n)\mathrm{d}\tau = \int_G \mathbf{L}\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i^G\Big)\varphi_j^{*G}\mathrm{d}\tau = 0, \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{4.2.55}$$

于是可求得 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$. 这就是 Galerkin 方法的基本思想.

从上讨论可知，Galerkin 方法没有用到方程与变分问题的等价关系，所以此法十分通用. 当考虑与变分问题有关的方程时，Galerkin 方法与 Ritz 法有密切的关系. 在一般情况下，两者可等价，而且 Galerkin 方法的计算要简单得多.

对本征值问题式(4.2.47)，改写成 $\mathbf{L}\varphi - \lambda\rho\varphi = 0$，根据 Galerkin 方法，取近似解式(4.2.54)应有

$$\int_G [\mathbf{L}(\bar{\varphi}^n) - \lambda\rho\bar{\varphi}^n]\varphi_i^{*G}\mathrm{d}\tau = 0 \tag{4.2.56}$$

最后得到

$$\sum_j [\alpha_{ij}^G - \lambda\gamma_{ij}^G]c_j = 0, \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.2.57}$$

其中

$$\alpha_{ij}^G = \int_G \varphi_i^{*G}\mathbf{L}\varphi_j^G \mathrm{d}\tau; \qquad \gamma_{ij}^G = \int_G \varphi_i^{*G}\varphi_j^G\rho\mathrm{d}\tau \tag{4.2.58}$$

上式与式(4.2.51)有相同的形式，但完备系$\{\varphi_i^G\}$不同于$\{\varphi_i^R\}$，收敛意义不同. 详细讨论见 4.3 节.

例 4.2.6 考虑零阶 Bessel 方程的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) + \lambda r\varphi = 0, \qquad r \in (0,a); \qquad \varphi|_{r=a} = 0 \tag{4.2.59}$$

取满足边界条件的完备系

$$\varphi_1 = \cos\frac{\pi r}{2a}; \qquad \varphi_2 = \cos\frac{3\pi r}{2a}; \qquad \varphi_3 = \cos\frac{5\pi r}{2a}; \qquad \cdots \tag{4.2.60}$$

第一次近似 $\bar{\varphi} = a_1\varphi_1$，由

$$\int_0^a \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda r\bar{\varphi}\right]\cos\frac{\pi}{2a}r\,\mathrm{d}r = 0$$

积分得

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\right)-\lambda a^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\right)=0$$

由此得 $\lambda_1=5.83/a^2$. 另一方面，由 Bessel 函数得到严格解为 $\lambda_1=5.76/a^2$，故第一次近似的相对误差为 1.2%. 取第二次近似

$$\varphi(r) = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \tag{4.2.61}$$

可得 a_1 和 a_2 的方程

$$\begin{cases}(1.7337-0.29736\lambda a^2)a_1+(0.20264\lambda a^2-1.5)a_2=0\\(0.20264\lambda a^2-1.5)a_1+(11.603-0.47748\lambda a^2)a_2=0\end{cases}$$

由系数行列式为零可得

$$0.10092\lambda^2a^4-3.6701\lambda a^2+17.866=0 \tag{4.2.62}$$

最小根 $\lambda_1=5.79/a^2$，故第二次近似的相对误差只有 0.5%.

4.3　变分法在边值问题中的应用

本节介绍变分法求边值问题的近似解. 首先讨论边值问题与泛函极值问题的等价关系，然后讨论用 Ritz 法或 Galerkin 法求近似解.

4.3.1　边值问题与泛函极值问题的等价

仍考虑作用在 Hilbert 空间上的 Hermite 算子 L，求解下列边值问题

$$\mathbf{L}\varphi = f,\qquad \boldsymbol{r}\in G;\qquad \left.\left(\alpha\varphi+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0 \tag{4.3.1}$$

假定边界条件是齐次的. 否则，可对它进行齐次化处理.

首先证明惟一性定理：如果 L 是正算子，即对所有属于允许函数类 φ，内积

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi)>0 \tag{4.3.2}$$

则式(4.3.1)至多只有一个解. 证明：设式(4.3.1)有两个解 φ_1 和 φ_2，则 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$应满足齐次方程 $\mathbf{L}\varphi=0$，于是有

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi)=0 \tag{4.3.3}$$

而 L 是正算子，根据假定，如果 $\varphi\neq0$，应有$(\mathbf{L}\varphi,\varphi)>0$，故由上式 $\varphi\equiv0$(几乎处处)即 $\varphi_1\equiv\varphi_2$，于是惟一性得证.

例 4.3.1　一维算子

$$\mathbf{L}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x),\qquad x\in(0,l) \tag{4.3.4}$$

$$\left(\alpha_1\varphi - \beta_1\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=0} = 0;\qquad \left(\alpha_2\varphi + \beta_2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=l} = 0 \tag{4.3.5}$$

由

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}\varphi,\varphi) &= \int_0^l\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) + q\varphi\right]\varphi\mathrm{d}x\\ &= \int_0^l\left[p\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q\varphi^2\right]\mathrm{d}x + \left[p(0)\varphi(0)\frac{\mathrm{d}\varphi(0)}{\mathrm{d}x} - p(l)\varphi(l)\frac{\mathrm{d}\varphi(l)}{\mathrm{d}x}\right]\\ &= \int_0^l\left[p\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q\varphi^2\right]\mathrm{d}x + \frac{\alpha_1}{\beta_1}p(0)\varphi^2(0) + \frac{\alpha_2}{\beta_2}p(l)\varphi^2(l)\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

因此，如果 $p(x)>0$，$q(x)\geqslant 0, \alpha_1/\beta_1>0$ 以及 $\alpha_2/\beta_2>0$，$\mathbf{L}$ 是正算子，于是式(4.3.1)有惟一解.

例 4.3.2 三维算子

$$\mathbf{L} = -\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r});\qquad \left(\alpha\varphi + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0 \tag{4.3.7}$$

由

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}\varphi,\varphi) &= \int_G[-\nabla\cdot(p\nabla\varphi^*) + q\varphi^*]\varphi\mathrm{d}\tau\\ &= \int_G(p|\nabla\varphi|^2 + q|\varphi|^2)\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G}p\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}\mathrm{d}S\\ &= \int_G(p|\nabla\varphi|^2 + q|\varphi|^2)\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G}\frac{\alpha}{\beta}p|\varphi|^2\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

因此，如果 $p(\boldsymbol{r})>0, q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$ 以及 $\alpha/\beta>0$，$\mathbf{L}$ 是正算子，于是式(4.3.1)有惟一解.

进一步，可以证明正算子 $\mathbf{L}$ 的定理：设 $\mathbf{L}$ 是正的 Hermite 算子，若式(4.3.1)有解，则此解必使泛函

$$J(\varphi) = (\mathbf{L}\varphi,\varphi) - [(\varphi,f) + (f,\varphi)] \tag{4.3.9}$$

取极小值；反之，若允许函数类中函数 φ 使上式取极小值，则 φ 必定是式(4.3.1)的解. 证明分两步：

(1) 如果 φ 满足方程(4.3.1)，那么 φ 使 $J(\varphi)$ 取极小值. 事实上，取 φ 的一阶变分为 $\delta\varphi$，则 $J(\varphi)$ 的变化

$$\Delta J(\varphi) = \delta J(\varphi) + \delta^2 J(\varphi)$$

其中 $\delta J(\varphi)$ 为 J 的一阶变分

$$\delta J(\varphi) = (\mathbf{L}\delta\varphi,\varphi) + (\mathbf{L}\varphi,\delta\varphi) - [(\delta\varphi,f) + (f,\delta\varphi)] \tag{4.3.10}$$

利用 $\mathbf{L}$ 的 Hermite 性

$$\begin{aligned}\delta J(\varphi) &= (\delta\varphi,\mathbf{L}\varphi) + (\mathbf{L}\varphi,\delta\varphi) - [(\delta\varphi,f) + (f,\delta\varphi)]\\ &= (\mathbf{L}\varphi,\delta\varphi)^* + (\mathbf{L}\varphi,\delta\varphi) - [(f,\delta\varphi)^* + (f,\delta\varphi)]\\ &= \mathrm{Re}[(\mathbf{L}\varphi - f,\delta\varphi)]\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

而二阶变分为 $\delta^2 J(\varphi)=(\mathbf{L}\delta\varphi,\delta\varphi)$. 当 φ 满足式(4.3.1)时，显然 $\delta J(\varphi)=0$，故 $J(\varphi)$ 取极值，又 $\mathbf{L}$ 是正算子，$\delta\varphi$ 属允许函数类，故 $(\mathbf{L}\delta\varphi,\delta\varphi)>0$ 和 $\delta^2 J(\varphi)>0$，因此 $J(\varphi)$ 取极小值.

(2) 反过来也是容易证明的，设 φ 使 $J(\varphi)$ 取极小值，则对 φ 的任意变分 $\delta\varphi$ 应有 $\Delta J(\varphi)>0$，而

$$\Delta J(\varphi) = \mathrm{Re}[(\mathbf{L}\varphi - f,\delta\varphi)] + (\mathbf{L}\delta\varphi,\delta\varphi) > 0$$

因 $\delta\varphi$ 任意(在允许函数中)，上式恒成立的条件是

$$(\mathbf{L}\varphi - f,\delta\varphi) = 0$$

即 $\mathbf{L}\varphi=f$，于是定理得证.

例 4.3.3 对一维算子式(4.3.4)和(4.3.5)，由式(4.3.6)和(4.3.9)，泛函 $J(\varphi)$ 为

$$\begin{aligned} J(\varphi) = & \int_0^l \left[p\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q\varphi^2 \right]\mathrm{d}x + \frac{\alpha_1}{\beta_1}p(0)\varphi^2(0) \\ & + \frac{\alpha_2}{\beta_2}p(l)\varphi^2(l) - 2\int_0^l f\varphi\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

如果 $\beta_1=\beta_2=0$，则

$$J(\varphi) = \int_0^l \left[p\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q\varphi^2 \right]\mathrm{d}x - 2\int_0^l f\varphi\mathrm{d}x.$$

例 4.3.4 对三维算子式(4.3.7)，由式(4.3.8)和(4.3.9)，泛函 $J(\varphi)$ 为

$$\begin{aligned} J(\varphi) = & \int_G (p|\nabla\varphi|^2 + q|\varphi|^2)\mathrm{d}\tau \\ & - \int_G (\varphi^* f + f^* \varphi)\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} \frac{\alpha}{\beta} p|\varphi|\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

如果 $\beta=0$，则

$$J(\varphi) = \int_G (p|\nabla\varphi|^2 + q|\varphi|^2)\mathrm{d}\tau - \int_G (\varphi^* f + f^* \varphi)\mathrm{d}\tau$$

至此，我们一般考虑二阶方程，下面举一个高阶方程的例子.

例 4.3.5 考虑四阶方程的边值问题

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[E(x)I(x)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \right] = q(x), \qquad x \in (0,l) \\ & u(0) = u(l) = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u(l)}{\mathrm{d}x} = 0 \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

上式描述棒的弯曲振动，物理上要求 $E(x)>0$ 和 $I(x)>0$. $\mathbf{L}$ 取下列形式

$$\mathbf{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[E(x)I(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \right]$$

下面证明 $\mathbf{L}$ 在函数类：(1) 满足边界条件，(2) 有连续的四阶导数，是正算子

$$(\mathbf{L}u,v)=\int_0^l v\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x=v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)\Bigg|_0^l-\int_0^l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x=-EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Bigg|_0^l+\int_0^l EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^l EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x$$

同理

$$(u,\mathbf{L}v)=\int_0^l u\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^l EI\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x$$

故$(u,\mathbf{L}v)=(\mathbf{L}u,v)$，即 $\mathbf{L}$ 是 Hermite 算子，而

$$(\mathbf{L}u,u)=\int_0^l E(x)I(x)\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x\geqslant 0$$

当上式等于零时 $u_{xx}=0$，故 $u(x)=C_1+C_2x$，由式(4.3.14)中边界条件知 $C_1=C_2=0$,故对所有允许函数 $u(x)\neq 0$:$(\mathbf{L}u,u)>0$．因此 $\mathbf{L}$ 是正的 Hermite 算子．相应的泛函 $J(u)$为

$$J(u)=\int_0^l\left[E(x)I(x)\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2-2qu\right]\mathrm{d}x \tag{4.3.15}$$

物理上，上式积分中第一项相当于棒弯曲振动中的位能，而 qu 是外力做的功，故泛函 $J(u)$表示能量．于是 $J(u)$极小相当于位能最小，这与物理上的位能极小原理是一致的．

考虑式(4.3.13)中 $p\equiv 1,q=0,\beta=0$,取 f 为实函数，则

$$J(\varphi)=\int_G(|\nabla\varphi|^2-2f\varphi)\mathrm{d}\tau \tag{4.3.16}$$

相应的 Euler 方程为 Poisson 方程

$$-\nabla^2\varphi=f$$

设 φ 是静电场，式(4.3.16)第一项积分表示静电场的能量，而第二项积分表示源与场的相互作用能量．故 $J(\varphi)$极小即能量极小．因此上述方法也称为**能量极小法**．

4.3.2 变分解的存在性与广义解

在 4.3.1 小节中，我们证明了求解边值问题式(4.3.1)与求泛函 $J(\varphi)$极小值问题的等价性,在允许函数类中，如果存在 φ 满足式(4.3.1)，则必使 $J(\varphi)$取极小值；反过来，假定在允许函数类中存在 φ 使$J(\varphi)$取极小值,则它必满足方程．当然，我们的目的是要在允许函数类中找到 φ 使$J(\varphi)$取极小值．问题是：这个 φ 是否确实存在？事实上，如果允许函数类中元素不是足够多，有可能找不到 φ 使 $J(\varphi)$取极小值．因此，有必要扩充 φ 的定义域，使 $J(\varphi)$在新的定义域内存在极

小值. 为此对算子 L 有更强的限制条件，即要求 L 是正定的.

所谓正定是指：对任一允许函数类中函数 φ，存在常数 $\gamma>0$，成立不等式

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi) \geqslant \gamma^2(\varphi,\varphi) \tag{4.3.17}$$

则称 L 为**正定算子**.

为了讨论方便，定义新的 Hilbert 空间 H_0：

(1) 对所有允许函数类中函数，定义新的内积为带算子内积

$$\langle u|\mathbf{L}|v\rangle = (\mathbf{L}u,v) \tag{4.3.18}$$

因 L 是正算子，容易证明上式满足内积的公理，而新的模为

$$\|u\|_{\mathbf{L}}^2 = \langle u|\mathbf{L}|u\rangle = (\mathbf{L}u,u); \tag{4.3.19}$$

(2) 定义了内积式(4.3.18)后，允许函数类即成为一个新的内积空间，但是这个内积空间不一定完备，即这个内积空间中的 Cauchy 序列有可能收敛到一个元素 φ_0，而 φ_0 不属允许函数类. 如果我们把所有这些极限元素补充到这个内积空间中来，则可以构成一个完备的内积空间，亦即 Hilbert 空间，这个 Hilbert 空间记为 H_0. 于是有定理：如果 L 是正定的，则泛函 $J(\varphi)$在 Hilbert 空间 H_0 内必取得极小值，即在 H_0 中总存在一个元素 φ 使$J(\varphi)$取极小值(证明略).

由上可知，由于 H_0包含极限元素，故使 $J(\varphi)$取极小值的元素 φ 不一定属于允许函数类(也可能恰好是极限元素). 具体地说，可能发生下列情况：

(1) 它不属于允许函数类，不满足式(4.3.1)中的边界条件；

(2) 对算子 L 没有意义，即 φ 可能不充分可导，但可引入广义导数.

因此，用 $J(\varphi)$极小得到的解不一定在古典意义下满足方程和边界条件，这种解也称为**广义解**.

例 4.3.6　一维算子

$$\mathbf{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)$$

设 φ 满足第一类边界条件且最小值 $\min[p(x)] = p_m>0$，$\min[q(x)] = q_m>0$，则 L 是正定的. 证明如下：

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi) = \int_0^l\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q(x)\varphi^2\right]\mathrm{d}x \geqslant \int_0^l\left[p_m\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q_m\varphi^2\right]\mathrm{d}x$$

下面来证明不等式

$$\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{l^2}\int_0^l\varphi^2(x)\mathrm{d}x$$

因 $\varphi(x)$可表示为

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

即有

$$\varphi^2(x) = \left[\int_0^x \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \left[\int_0^x 1^2\mathrm{d}t\right]\cdot\left[\int_0^x\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t\right]$$

因$[\varphi_t(t)]^2$在$(0,l)$内非负，于是

$$\varphi^2(x) \leqslant \left[\int_0^x 1^2\mathrm{d}x\right]\cdot\int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2\mathrm{d}t = x\int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2\mathrm{d}t$$

两边积分

$$\int_0^l \varphi^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{l^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2\mathrm{d}t$$

利用此不等式，显然有

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi) \geqslant \frac{2p_m}{l^2}\int_0^l\varphi^2(x)\mathrm{d}x + q_m\int_0^l\varphi^2(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{2p_m}{l^2}+q_m\right)\int_0^l\varphi^2\mathrm{d}x$$

即

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi) \geqslant \gamma^2(\varphi,\varphi)$$

其中$\gamma^2 = 2p_m/l^2 + q_m$. 故正定性得证.

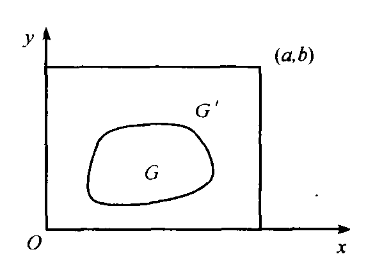


图 4.3.1 矩形区域 G'包含 G

例 4.3.7 二维 Laplace 算子

$$\mathbf{L} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \qquad (x,y)\in G$$

在第一类边界条件下是正定的. 设 G 在第一象限，如图 4.3.1，作矩形区域

$$G':[0\leqslant x\leqslant a;0\leqslant y\leqslant b]$$

G'包含 G 在内，扩大 φ 的定义域 G 到 G',在∂G 和$\partial G'$之间 $\varphi=0$. 设$(x_1,y_1)\in G'$，则

$$\int_0^{x_1}\frac{\partial\varphi(x,y_1)}{\partial x}\mathrm{d}x = \varphi(x_1,y_1)$$

于是有

$$\varphi^2(x_1,y_1) = \left[\int_0^{x_1}\frac{\partial\varphi(x,y_1)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left[\int_0^{x_1}1^2\mathrm{d}x\right]\cdot\int_0^{x_1}\left[\frac{\partial\varphi(x,y_1)}{\partial x}\right]^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant a\int_0^a\left[\frac{\partial\varphi(x,y_1)}{\partial x}\right]^2\mathrm{d}x$$

在 G'上对上式两边积分

$$\iint_{G'}\varphi^2(x_1,y_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \leqslant a\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^b\mathrm{d}y_1\int_0^a\left[\frac{\partial\varphi(x,y_1)}{\partial x}\right]^2\mathrm{d}x$$
$$= a^2\int_0^b\mathrm{d}y_1\int_0^a\left[\frac{\partial\varphi(x,y_1)}{\partial x}\right]^2\mathrm{d}x = a^2\iint_{G'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式右边进一步放大，即有

$$\iint_{G'} \varphi^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant a^2 \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因在∂G 和$\partial G'$之间 $\varphi=0$,故有

$$\iint_{G} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{1}{a^2}\iint_G \varphi^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi) = \iint_{G} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{1}{a^2}\iint_G \varphi^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{a^2}(\varphi,\varphi)$$

故 **L** 是正定的. 可以证明,在第二和第三类边界条件下, 二维 Laplace 算子也是正定的.

例 4.3.8　对三维算子式(4.3.7), 可以证明: 当 $\alpha/\beta>0, p(\boldsymbol{r})>0, q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$ 时, **L** 是正定的. 当 $\beta=0$ 时,证明方法同上例一样: 作包含 G' 的长方体G':$[0\leqslant x \leqslant a;0\leqslant y\leqslant b;0\leqslant z\leqslant c]$,取 $(x_1,y_1,z_1)\in G'$

$$\varphi(x_1,y_1,z_1) = \int_0^{x_1} \frac{\partial \varphi(x,y_1,z_1)}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$\varphi^2(x_1,y_1,z_1) = \left[\int_0^{x_1} \frac{\partial \varphi(x,y_1,z_1)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant a\int_0^a \left[\frac{\partial \varphi(x,y_1,z_1)}{\partial x}\right]^2 \mathrm{d}x$$

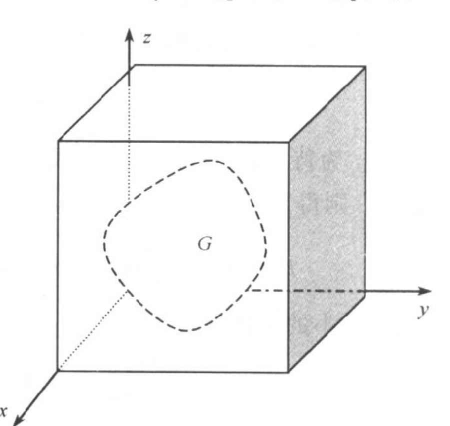


图 4.3.2　长方体区域 G'

两边对(x_1,y_1,z_1)在 G'内积分

$$\int_{G'} \varphi^2 \mathrm{d}\tau \leqslant a^2 \int_{G'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}\tau$$

同样有

$$\int_{G'} \varphi^2 \mathrm{d}\tau \leqslant b^2 \int_{G'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}\tau; \qquad \int_{G'} \varphi^2 \mathrm{d}\tau \leqslant c^2 \int_{G'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \mathrm{d}\tau$$

于是

$$\int_{G'} \varphi^2 \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}} \int_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau$$

因在∂G 和$\partial G'$之间 $\varphi=0$, 故

$$\int_{G} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}\tau \geqslant (a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})\int_G \varphi^2 \mathrm{d}\tau$$

另一方面, 设 $p(\boldsymbol{r})$和 $q(\boldsymbol{r})$的最小值分别为 $p_m, q_m>0$, 则

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi) = \int_G [p(\boldsymbol{r})(\nabla\varphi)^2 + q(\boldsymbol{r})\varphi^2]\mathrm{d}\tau \geqslant \int_G [p_m(\nabla\varphi)^2 + q_m\varphi^2]\mathrm{d}\tau$$

$$\geqslant [p_m(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})+q_m]\int_G \varphi^2 d\tau = \gamma^2(\varphi,\varphi)$$

而 $\gamma^2 = p_m(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})+q_m>0$，故 $\mathbf{L}$ 正定. 对第二和第三类边界条件，因涉及到边界积分，证明较复杂，故略去.

4.3.3 Ritz 法解边值问题

在 4.3.1 和 4.3.2 小节中，我们已把正定算子方程 $\mathbf{L}\varphi=f$ 的求解问题，化为在 Hilbert 空间 H_0 内找一元素 φ，使泛函 $J(\varphi)$

$$J(\varphi) = (\mathbf{L}\varphi,\varphi) - [(f,\varphi)+(\varphi,f)] \tag{4.3.20}$$

取极小值问题. 而根据 4.2 节的讨论，可用 Ritz 法求解 $J(\varphi)$的极小值问题. 设算子 $\mathbf{L}$ 正定，在 H_0 中取完备系$\{\varphi_i^R\}$（在模 $\|\varphi\|^2=(\mathbf{L}\varphi,\varphi)$意义下的完备性），设$\{\varphi_i^R\}$线性独立，则 φ 的第 n 级近似

$$\bar{\varphi}^n = \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k^R \tag{4.3.21}$$

其中 a_k 为待定常数. 上式代入式(4.3.20)，并设 a_k 取实数，否则可把复指数归入 φ_i^R，则得

$$J(\bar{\varphi}^n) = \sum_{j,k=1}^n a_ja_k(\mathbf{L}\varphi_j^R,\varphi_k^R) - \sum_{j=1}^n a_j[(f,\varphi_j^R)+(\varphi_j^R,f)]$$

$J(\bar{\varphi}^n)$极小的条件是

$$\frac{\partial J(\bar{\varphi}^n)}{\partial a_j} = 0, \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.3.22}$$

于是得到决定常数 a_k 的方程

$$\sum_{k=1}^n a_k(\mathbf{L}\varphi_k^R,\varphi_j^R) = \frac{1}{2}[(f,\varphi_j^R)+(\varphi_j^R,f)], \qquad (j=1,2\cdots,n) \tag{4.3.23}$$

下面来证明上式解的惟一性. 为此只要证明齐次方程只有零解. 用反证法，假定存在非零解$\{\bar{a}_k\}$满足齐次方程

$$\sum_{k=1}^n \bar{a}_k(\mathbf{L}\varphi_k^R,\varphi_j^R) = 0, \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

即有

$$\left[\mathbf{L}\left(\sum_{k=1}^n \bar{a}_k\varphi_k^R\right),\varphi_j^R\right] = 0, \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.3.24}$$

故根据 Galerkin 方法

$$\bar{\varphi} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k\varphi_k^R$$

应是齐次方程 $\mathbf{L}\varphi=0$ 的近似解. 如果假定齐次方程 $\mathbf{L}\varphi=0$ 只有零解，则

$$\bar{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \varphi_k^R = 0$$

故$\{\varphi_1^R, \varphi_2^R, \cdots, \varphi_n^R\}$线性相关，而我们假定$\{\varphi_i^R\}$线性独立，因此只有$\bar{a}_i = 0$. 于是，式(4.3.23)只有惟一解.

例 4.3.9　考虑边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}x^2} = \cos x; \qquad \varphi(x)\big|_{x=0} = \varphi(x)\big|_{x=\pi} = 0 \tag{4.3.25}$$

上式可严格求解，不难求得

$$\varphi(x) = \cos x + \frac{2x}{\pi} - 1 \tag{4.3.26}$$

取满足边界条件的完备系$\{\varphi_i^R\}$

$$\varphi_i^R(x) = \sin 2ix, \qquad i = 1, 2, \cdots \tag{4.3.27}$$

上式中只取 $\sin 2ix$，而不取奇数周期函数 $\sin(2i+1)x$ 是考虑到问题关于 $\pi/2$ 对称. 首先求$(\mathbf{L}\varphi_j^R, \varphi_k^R)$

$$(\mathbf{L}\varphi_j^R, \varphi_k^R) = 4\int_0^{\pi} j^2 \sin 2jx \sin 2kx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 2\pi j^2, & k = j \end{cases} \tag{4.3.28}$$

而

$$(f, \varphi_j^R) = (\varphi_j^R, f) = \int_0^{\pi} \cos x \sin 2jx \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2j-1)x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2j+1)x \, \mathrm{d}x = \frac{4j}{4j^2 - 1} \tag{4.3.29}$$

由式(4.3.28)知，方程组(4.3.23)只有对角元素，很容易求得

$$a_j = \frac{(f, \varphi_j^R)}{(\mathbf{L}\varphi_j^R, \varphi_j^R)} = \frac{2}{\pi j(4j^2 - 1)} \tag{4.3.30}$$

于是第 n 次近似解为

$$\bar{\varphi}^n = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{\sin 2jx}{j(4j^2 - 1)} \tag{4.3.31}$$

事实上，容易证明当 $n \to \infty$时，上式左边是式(4.3.26)的 Fourier 级数

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} \bar{\varphi}^n = \cos x + \frac{2x}{\pi} - 1$$

得到上述结果并不是凑巧，这是因为选取的完备系$\{\varphi_i^R\}$中的元素 $\sin 2ix$ 恰好是算子 $\mathbf{L}$ 在式(4.3.25)中边界条件下的本征函数，因此解式(4.3.21)相当于作本征函数展开. 当$\{\varphi_i^R\}$是 $\mathbf{L}$ 的本征函数时(不一定归一化)，式(4.3.23)可简化成

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k (\varphi_k^R, \varphi_j^R) = \frac{1}{2}[(f, \varphi_j^R) + (\varphi_j^R, f)] \tag{4.3.32}$$

故

$$a_k = \frac{1}{2\lambda_k(\varphi_k^R, \varphi_k^R)}[(f, \varphi_k^R) + (\varphi_k^R, f)]$$

如果$(f, \varphi_k^R) = (\varphi_k^R, f)$，则

$$a_k = \frac{1}{\lambda_k(\varphi_k^R, \varphi_k^R)}(f, \varphi_k^R)$$

于是

$$\bar{\varphi}^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k(\varphi_k^R, \varphi_k^R)}(f, \varphi_k^R)\varphi_k^R \tag{4.3.33}$$

当 $n \to \infty$时，上式相当于作本征函数展开，故有 $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{\varphi}^n$.

例 4.3.10 考虑边值问题

$$-\nabla^2 u(x, y) = 2, \quad (x, y) \in G; \qquad u|_{\partial G} = 0$$

其中 G 为矩形区域$[-a \leqslant x \leqslant a; -b \leqslant y \leqslant b]$. 令

$$w(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

取

$$\varphi_1(x, y) = w(x, y); \qquad \varphi_2(x, y) = w(x, y)x^2$$

$$\varphi_3(x, y) = w(x, y)y^2; \qquad \varphi_4(x, y) = w(x, y)x^4$$

$$\varphi_5(x, y) = w(x, y)x^2y^2; \qquad \varphi_6(x, y) = w(x, y)y^4$$

…………

当 $n = 1$

$$(\mathbf{L}\varphi_1, \varphi_1) = \iint_G (w_x^2 + w_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[x^2(b^2 - y^2)^2 + y^2(b^2 - x^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{128}{45}a^3b^3(a^2 + b^2)$$

$$(\varphi_1, f) = \iint_G 2w(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{32}{9}a^3b^3$$

由 $a_1(\mathbf{L}\varphi_1, \varphi_1) = (\varphi_1, f)$，得到

$$a_1 = \frac{5}{4(a^2 + b^2)}$$

故一级近似解为

$$u(x, y) = \frac{5}{4}\frac{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}{a^2 + b^2}$$

由于问题的对称性，取 $n = 3$，于是可求得九个系数$(\mathbf{L}\varphi_i, \varphi_j)(i, j = 1,2,3)$和三个非齐次项$(\varphi_i, f)(i = 1,2,3)$，最后得到三个系数 $a_i(i = 1,2,3)$.

4.3.4 Galerkin 法及非齐次边值问题

Ritz 法的最大缺点是要求算子 $\mathbf{L}$ 正定，但 Galerkin 法无此限制. 取任一属于

允许函数类中的完备系：$\{\varphi_i^G\}$（这时完备性仅要求在模$(\varphi,\varphi)=\|\varphi\|^2$的意义下之完备性——与 Ritz 法之区别）

$$\bar{\varphi}^n=\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k^G \tag{4.3.34}$$

代入式(4.3.1)，并根据 Galerkin 法应有

$$\sum_{k=1}^n a_k(\mathbf{L}\varphi_k^G,\varphi_j^G)=(f,\varphi_j^G)\qquad(j=1,2,\cdots,n) \tag{4.3.35}$$

必须指出：上式与式(4.3.23)在$(f,\varphi_j^R)=(\varphi_j^R,f)$下有相同的形式,但有本质的差别. 式(4.3.21)中的完备系是在模$\|\varphi\|^2=(\mathbf{L}\varphi,\varphi)$意义下的完备性，即对任一属于$H_0$空间中的元素$\varphi$，总能展成$\{\varphi_i^R\}$的级数，在下述意义下收敛

$$\lim_{n\to\infty}\|\left(\varphi-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k^R\right)\|_{\mathbf{L}}^2=\lim_{n\to\infty}\left[\mathbf{L}\left(\varphi-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k^R\right),\left(\varphi-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k^R\right)\right]=0$$

而式(4.3.34)中的完备系$\{\varphi_i^G\}$的完备性指：任一属于允许类中元素φ总能展成$\{\varphi_i^G\}$的 Fourier 级数，且在下述意义下收敛

$$\lim_{n\to\infty}\|\left(\varphi-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k^G\right)\|^2=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\varphi-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k^G\right),\left(\varphi-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k^G\right)\right]=0$$

但在解决实际问题中，一般对所取函数系的完备性不进行深入的讨论. 如果不苛求函数系的完备性，Ritz 法和 Galerkin 法能给出同样的结果. 因此通称为 **Ritz-Galerkin 法**.

至此，我们主要讨论了 Ritz 法和 Galerkin 法在齐次边界问题中的应用，对非齐次边界问题

$$\mathbf{L}u=f,\qquad \boldsymbol{r}\in G;\qquad \mathbf{B}u=g,\qquad \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{4.3.36}$$

其中 $\mathbf{B}$ 是边界算子，一般我们先对边界条件进行齐次化处理，化为齐次问题. 如果找到函数u_0使$\mathbf{B}u_0=g$，可令$v=u-u_0$

$$\mathbf{L}v=f-\mathbf{L}u_0,\quad \boldsymbol{r}\in G;\qquad \mathbf{B}v=0,\quad \boldsymbol{r}\in\partial G \tag{4.3.37}$$

这样基函数的选择就比较简单了.

例 4.3.11　在[1,2]中解 Bessel 方程的边值问题

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-1)y=0;\qquad y|_{x=1}=1;\qquad y|_{x=2}=2 \tag{4.3.38}$$

利用变换$y=z+x$，上式变成齐次问题

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(x^2-1)z+x^3=0$$

$$z|_{x=1}=z|_{x=2}=0 \tag{4.3.39}$$

第一式化成 Sturm-Liouvill 形式

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{1-x^2}{x}z=x^2$$

故

$$\mathbf{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{1-x^2}{x}; \qquad f(x) = x^2$$

显然 $q(x)=(1-x^2)/x$,在区域(1,2)中 $q(x)\leqslant 0$, 故 Ritz 法不能应用. 而 Galerkin 方法不受限制. 取 $\varphi_1(x)=(x-1)(2-x)$, 并且令 $z_1=a_1\varphi_1$, 则 a_1 满足

$$\int_1^2\left[-2a_1x+(3-2x)a_1+\frac{x^2-1}{x}(x-1)(2-x)a_1+x^2\right](x-1)(2-x)\mathrm{d}x = 0$$

求得 $a_1=0.8110$, 于是第一次近似解为

$$y_1(x) = 0.8110(x-1)(x-2)+x \tag{4.3.40}$$

式(4.3.38)的精确解为

$$y(x) = 3.6072J_1(x)+0.75195Y_1(x) \tag{4.3.41}$$

比较上二式两者十分接近, 故第一次近似即得很好的结果.

例 4.3.12 非齐次两点边值问题

$$\mathbf{L}u \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+qu = f, \quad x\in(a,b)$$

$$u(a) = \alpha; \quad \left.\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} = \beta \tag{4.3.42}$$

为了使边界条件齐次化, 取

$$u_0(x) = \alpha+\frac{\beta(x-a)^2}{2(b-a)}$$

令 $v=u-u_0$, 于是上述非齐次两点边值问题化为求齐次两点边值问题

$$\mathbf{L}v = f-\mathbf{L}u_0 \equiv f_1, \qquad x\in(a,b)$$

$$v(a) = 0; \qquad \left.\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} = 0 \tag{4.3.43}$$

即求下列泛函的极小

$$J(v) = \int_a^b\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2+q(x)v^2\right]\mathrm{d}x-2(f_1,v)$$

$$\equiv A(v,v)-2(f-\mathbf{L}u_0,v) \tag{4.3.44}$$

其中双线性积分定义为

$$A(\varphi,\psi) = \int_a^b\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}+q(x)\varphi\psi\right]\mathrm{d}x = A(\psi,\varphi) \tag{4.3.45}$$

于是,一阶变分为

$$\delta J(v) = 2\int_a^b[p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+q(x)v\delta v]\mathrm{d}x-2\int_a^b f_1\delta v\mathrm{d}x$$

利用分部积分

$$\int_a^b p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\delta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \left[p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\delta v\right]\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]\delta v\mathrm{d}x$$

即

$$\delta J(v) = 2\left[p(b)\frac{\mathrm{d}v(b)}{\mathrm{d}x}\delta v(b) - p(a)\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}x}\delta v(a)\right] + 2\int_a^b\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)v - f_1\right]\delta v\mathrm{d}x \quad (4.3.46)$$

在端点 $x=a$，要求 $\delta v(a)=0$，而在端点 $x=b$，给出自然边界条件 $v'(b)=0$. 所以两个边界条件意义不同：$v(a)=0$ 要求在泛函极小过程中必须满足，而 $v'(b)=0$是泛函 $J(v)$极小的自然边界条件. 把 $v=u-u_0$ 代入

$$\begin{aligned} J(v) &= A(v,v) - 2(f-\mathbf{L}u_0, v) \\ &= A[(u-u_0),(u-u_0)] - 2(f-\mathbf{L}u_0, v) \quad (4.3.47) \\ &= A(u,u) + A(u_0,u_0) - 2A(u,u_0) - 2(f,v) + 2\int_a^b v\mathbf{L}u_0\mathrm{d}x \end{aligned}$$

不难证明上式中最后一项积分为

$$\int_a^b v\mathbf{L}u_0\mathrm{d}x = A(u_0,v) - \beta p(b)v(b)$$

代入式(4.3.47)

$$\begin{aligned} J(v) &= A(u,u) + A(u_0,u_0) - 2A(u,u_0) - 2(f,v) + 2A(u_0,v) - 2\beta p(b)v(b) \\ &= [A(u,u) - 2(f,u) - \beta p(b)u(b)] \\ &\quad - [A(u_0,u_0) - 2(f,u_0) - 2\beta p(b)u_0(b)] \\ &\equiv J_1(u) - J_2(u_0) \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

显然 $J_2(u_0)$是常数，因此 $J(v)$的极小即为 $J_1(u)$极小

$$J_1(u) = A(u,u) - 2(f,u) - 2\beta p(b)u(b) \quad (4.3.49)$$

可见自然边界条件在求极小时能自动给出，但 $u(a)=\alpha$ 必须强制满足，这样的边界条件称为**本质边界条件**.

设近似解为

$$u^n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x) \quad (4.3.50)$$

其中 $\varphi_i(a)=0$ 以及 $u_0(a)=\alpha$，上式代入式(4.3.49)并求极小，通过与得到式(4.3.23)类似的过程，得到决定 a_i 的代数方程

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{L}\varphi_i,\varphi_k) = (f,\varphi_k) + \beta p(b)\varphi_k(b) - (\mathbf{L}u_0,\varphi_k)(k=1,2\cdots,n) \quad (4.3.51)$$

最后叙述一下各种不同的区域，$\{\varphi_i\}$的取法. 以第一类边值问题为例：

(1) 一维 $x\in(0,l)$，$\varphi(0)=\varphi(l)=0$ 则可取$\{\varphi_i\}$为

$$\sin\frac{\pi}{l};\quad \sin\frac{2\pi}{l}x;\quad \cdots;\quad \sin\frac{n\pi}{l}x;\quad \cdots \tag{4.3.52}$$

或者取幂次函数

$$x(x-l);\quad x^2(x-l);\quad x^2(x-l)^2;\quad \cdots; \tag{4.3.53}$$

(2) 二维或三维，设边界面(或线)满足方程 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，可取 $\{\varphi_i\}$ 为

$$xg;\quad x^2g;\quad yg;\quad y^2g;\quad \cdots \tag{4.3.54}$$

例 4.3.13 G 为一矩形域：$[0\leqslant x\leqslant a;0\leqslant y\leqslant b]$，可取 $\{\varphi_i\}$

$$x(a^2-x^2)(b^2-y^2);\quad x^2(a^2-x^2)(b^2-y^2);\quad \cdots \tag{4.3.55}$$

例 4.3.14 G 为椭圆内部：$x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1$，则 $\{\varphi_i\}$ 可选为

$$x\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right);\quad y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right);\quad \cdots \tag{4.3.56}$$

如 G 为 1/4 椭圆内部：$x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 则 $\{\varphi_i\}$ 可取

$$xy\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right);\quad xy^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2;\quad \cdots \tag{4.3.57}$$

4.4 变分的其他近似方法

本节介绍其他几种方法：Kantorovich 法、最速下降法、最小平方法与 Courant 法，以及共轭梯度法. 重点介绍 Kantorovich 法、最速下降法和共轭梯度法.

4.4.1 Kantorovich 法

Kantorovich 法一般用于多自变量函数的泛函问题，但本质上与 Ritz 法相同. 以下列泛函极值问题为例

$$J(u)=\int_a^b\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y,u_x,u_y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{4.4.1}$$

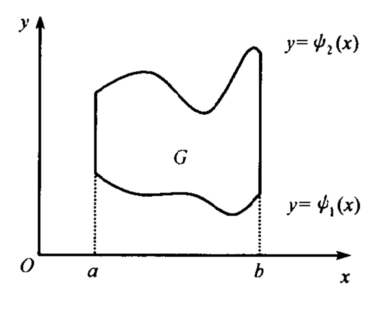


图 4.4.1 围成的区域 G

其中 $u(x,y)$ 的定义域为两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ 与两条曲线 $y=\psi_1(x)$ 和 $y=\psi_2(x)$ 围成的区域 G，如图 4.4.1.

取适当的完备系 $\{\varphi_i(x,y)\}$ 且线性独立，在 Ritz 法中把变分问题的第 n 级近似解 $u_n(x,y)$ 表示为

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x,y) \tag{4.4.2}$$

其中 a_k 为待定常数. Kantorovich 法与 Ritz 法不同之处为，把上述近似解中的待定常数改为待定函数

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\varphi_k(x,y) \tag{4.4.3}$$

代入式(4.4.1)

$$J(u_n) = \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f\left(x, y, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{4.4.4}$$

上式对 y 的积分可积出

$$J(u_n) = \int_a^b \Phi[x, a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x), a'_1(x), a'_2(x), \cdots, a'_n(x)]\mathrm{d}x \tag{4.4.5}$$

因此，原变分式(4.4.1)变成求 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 使上式极小. 由式(4.1.15)得到上式的 Euler 方程

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \Phi}{\partial a'_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.4.6}$$

这组 Euler 方程的解包含 $2n$ 个积分常数，这些常数由 $u_n(x,y)$ 在两端点 $x=a$ 和 b 的边界条件决定. 由于式(4.4.3)中函数 $a_k(x)$ 的选择余地比式(4.4.2)中常数 a_k 的选择余地大得多，因此，即使选取同样的展开函数 $\{\varphi_i(x,y)\}$ 以及同样的展开项数 n，Kantorovich 法比 Ritz 法得到的变分近似解更精确.

例 4.4.1　用变分法求矩形区域 $G:[-a\leqslant x\leqslant a; -b\leqslant y\leqslant b]$ 中二维 Poisson 方程的第一边值问题的近似解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1, \qquad (x,y) \in G; \qquad u|_{\partial G} = 0 \tag{4.4.7}$$

相应的泛函为

$$J(u) = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.4.8}$$

考虑到问题的对称性质，取 $\varphi_1(x,y) = b^2 - y^2$，第一阶近似为

$$u_1(x,y) = \zeta(x)\varphi_1(x,y) \tag{4.4.9}$$

代入式(4.4.8)得到

$$J(u_1) = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[(b^2-y^2)^2\zeta'^2(x) + 4y^2\zeta^2(x) - 2(b^2-y^2)\zeta(x)]\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

上式对 y 积分后可得到

$$J(u_1) = \int_{-a}^{a}\left[\frac{16b^5}{15}\zeta'^2(x) + \frac{8b^3}{3}\zeta^2(x) - \frac{8b^2}{3}\zeta(x)\right]\mathrm{d}x \tag{4.4.10}$$

相应的 Euler 方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{5}{2b^2}\zeta(x) = -\frac{5}{4b^2} \tag{4.4.11}$$

该常微分方程的解为

$$\zeta(x) = C_1\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b} + C_2\sinh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b} + \frac{1}{2} \tag{4.4.12}$$

其中积分常数由 $u_1(-a,y)=u_1(a,y)=0$ 决定

$$u_1(-a,y) = (b^2-y^2)\left[C_1\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b} - C_2\sinh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$u_1(a,y) = (b^2-y^2)\left[C_1\cosh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b} + C_2\sinh\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\right] = 0 \tag{4.4.13}$$

于是

$$C_1 = -\frac{1}{2}\cosh^{-1}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b};\qquad C_2 = 0 \tag{4.4.14}$$

因此第一阶近似解为

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2}(b^2-y^2)\left[1 - \frac{\cosh\sqrt{5/2}(x/b)}{\cosh\sqrt{5/2}(a/b)}\right]. \tag{4.4.15}$$

例 4.4.2 用变分法求

$$G:\left[y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x; x = b\right]$$

围成的三角形区域(如图 4.4.2)中二维 Poisson 方程第一边值问题的近似解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \tag{4.4.16}$$

在三角形的边界 $u=0$. 相应的泛函为

$$J(u) = \int_0^b\int_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{4.4.17}$$

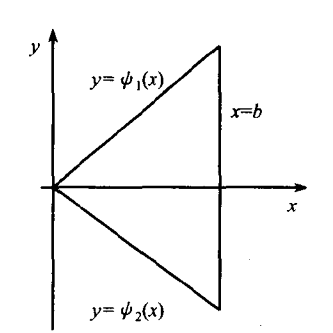


图 4.4.2 三角形区域

显然解应该关于 $y=0$ 对称, 因此取

$$\varphi_1(x,y) = y^2 - \frac{x^2}{3} \tag{4.4.18}$$

令

$$u_1(x,y) = \varphi_1(x,y)\zeta(x) \tag{4.4.19}$$

代入式(4.4.17)

$$J(u) = \int_0^b\int_{-x/\sqrt{3}}^{x/\sqrt{3}}\left\{\left[-\frac{2}{3}x\zeta + \left(y^2 - \frac{x^2}{3}\right)\zeta'\right]^2 + 4y^2\zeta^2 - 2\left(y^2 - \frac{x^2}{3}\right)\zeta\right\}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{405}\int_0^b[2x^5\zeta'^2+10x^4\zeta\zeta'+30x^3\zeta^2+15x^3\zeta]\mathrm{d}x \qquad (4.4.20)$$

上述泛函的 Euler 方程为

$$x^2\zeta''+5x\zeta'-5\zeta=\frac{15}{4} \qquad (4.4.21)$$

该方程的通解为

$$\zeta(x)=C_1x+C_2\frac{1}{x^5}-\frac{3}{4} \qquad (4.4.22)$$

由于要求在 $x=0$ 处有限，故 $C_2=0$. 由 $u_1(b,y)=0$ 得 $C_1=3/(4b)$. 最后得到

$$u_1(x,y)=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right). \qquad (4.4.23)$$

4.4.2 最速下降法与有界正定算子

在 4.3 节中把求解算子方程

$$\mathbf{L}\varphi=f \qquad (4.4.24)$$

归结为求泛函 $J(\varphi)$的极小问题. 为简单，设 φ 和 f 都是实函数

$$J(\varphi)=\mathbf{L}(\varphi,\varphi)-2(\varphi,f) \qquad (4.4.25)$$

把 $J(\varphi)$看作 φ 空间中的一个曲面，则求 $J(\varphi)$的极小相当于求曲面上的最低点相对应的坐标 φ_0，即是式(4.4.24)的解. 可用逐次逼近法来求出 φ_0. 为此选初始点 φ_1，如果 $\mathbf{L}\varphi_1=f$，则 φ_1 即是 φ_0,但如果 $\mathbf{L}\varphi_1-f=v_1\neq0$,则可以把 φ_1 作为第一次近似解. 问题是以什么样的方式由 φ_1 向 φ_0 点的逼近最快呢? 想像三维曲面情形：由一点向另一点的逼近方式是多种多样的. 最速下降法的意义就是由 φ_1 向 φ_0 逼近方法是最快的!

由于 $v_1=\mathbf{L}\varphi_1-f$ 是$J(\varphi)$在点 φ_1 的梯度，我们知道函数在梯度方向变化速度最快，因此我们沿梯度方向进行搜索，取第二次近似解

$$\varphi_2=\varphi_1+t_1v_1$$

其中 $v_1=\mathbf{L}\varphi_1-f\neq0$. 如果 $\varphi_2=\varphi_0$ 则 $\varphi_0-\varphi_1=t_1v_1$，因此 t_1v_1 表示第一次近似解与真解的"距离". 设 $\varphi_2\neq\varphi_0$，则 t_1 表示向真解 φ_0 逼近的速度. 最速下降法即是求 t_1 使 φ_2 向 φ_0 逼近的速度最快.

把第二次近似解 φ_2 代入式(4.4.25)，选取 t_1 使 $J(\varphi_2)$极小

$$\begin{aligned}J(\varphi_2)&=J(\varphi_1+t_1v_1)=[\mathbf{L}(\varphi_1+t_1v_1),\varphi_1+t_1v_1]-2(f,\varphi_1+t_1v_1)\\&=\mathbf{L}(\varphi_1,\varphi_1)+2t_1(\mathbf{L}\varphi_1,v_1)+t_1^2(\mathbf{L}v_1,v_1)-2(f,\varphi_1)-2t_1(f,v_1)\end{aligned} \qquad (4.4.26)$$

其中利用了 $\mathbf{L}$ 的 Hermite 性:$(\mathbf{L}\varphi_1,v_1)=(\varphi_1,\mathbf{L}v_1)$. 一旦 φ_1 选定,v_1 也决定，上

式中 $J(\varphi_2)$是 t_1 的函数，求极小

$$\frac{\mathrm{d}J(\varphi_2)}{\mathrm{d}t_1} = 2(\mathbf{L}\varphi_1, v_1) - 2(f, v_1) + 2t_1(\mathbf{L}v_1, v_1) = 0 \tag{4.4.27}$$

即求得

$$t_1 = -\frac{(\mathbf{L}\varphi_1 - f, v_1)}{(\mathbf{L}v_1, v_1)} = -\frac{(v_1, v_1)}{(\mathbf{L}v_1, v_1)} \tag{4.4.28}$$

如果 $\mathbf{L}$ 正定

$$\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}t_1^2} = 2(\mathbf{L}v_1, v_1) > 0$$

故式(4.4.28)的 t_1 精确使 $J(\varphi_2)$取极小. 于是选 t_1 满足式(4.4.28)，第二次近似解

$$\varphi_2 = \varphi_1 + t_1 v_1 \tag{4.4.29}$$

向精确解 φ_0 逼近速度最快. 如果 $\mathbf{L}\varphi_2 - f = v_2 \neq 0$，可取第三次近似解

$$\varphi_3 = \varphi_2 + t_2 v_2 \tag{4.4.30}$$

同样，可求得

$$t_2 = -\frac{(v_2, v_2)}{(\mathbf{L}v_2, v_2)} \tag{4.4.31}$$

一般，如果第 n 个近似解为 φ_n，$\mathbf{L}\varphi_n - f = v_n \neq 0$,可取$(n+1)$次近似解

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + t_n v_n \tag{4.4.32}$$

而 t_n 由下式决定

$$t_n = -\frac{(v_n, v_n)}{(\mathbf{L}v_n, v_n)} \tag{4.4.33}$$

因此可以得到一个近似解的序列$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots\}$. 问题是在什么条件下，$\{\varphi_n\}$收敛到精确解 φ_0?

可以证明，如果算子 $\mathbf{L}$ 正定且有界，即对任一允许函数 φ，存在正数 $m > 0$ 和 $M > 0$，满足

$$m\|\varphi\|^2 \leqslant (\mathbf{L}\varphi, \varphi) \leqslant M\|\varphi\|^2 \tag{4.4.34}$$

则序列$\{\varphi_n\}$收敛到精确解 φ_0，收敛速度估计如下

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_0\| \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_0\| \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^n \tag{4.4.35}$$

由于最速下降法要求算子 $\mathbf{L}$ 正定且有界，故通常 $\mathbf{L}$ 是积分算子，即式(4.4.24)是积分方程. 积分方程的理论将在第五章介绍，这里给出一个上述方法应用的例子.

例 4.4.3 在 $L^2(0,\pi)$上考虑积分方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^\pi \sin(x + s)\varphi(s)\mathrm{d}s = f(x) \tag{4.4.36}$$

其中 $f(x)\in L^2(0,\pi)$. 显然算子 $\mathbf{L}$ 有形式

$$\mathbf{L}\varphi = \varphi(x) - \lambda\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)\mathrm{d}s \tag{4.4.37}$$

内积$(\mathbf{L}\varphi_1,\varphi_2)$定义为(见第五章)

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}\varphi_1,\varphi_2) &= \int_0^\pi\left[\varphi_1(x) - \lambda\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi_1(s)\mathrm{d}s\right]\varphi_2(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi \varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi_1(x)\varphi_2(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi\left[\varphi_2(x) - \lambda\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi_2(s)\mathrm{d}s\right]\varphi_1(x)\mathrm{d}x = (\varphi_1,\mathbf{L}\varphi_2)\end{aligned}$$

故 $\mathbf{L}$ 是 Hermite 算子. 下面证明 $\mathbf{L}$ 正定且有界: 因$(\mathbf{L}\varphi,\varphi)$由下式决定

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi) = \int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)\varphi(x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{4.4.38}$$

利用 Schwartz 不等式, 对任意 $f,g\in L^2(0,\pi)$有关系

$$\left[\int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^\pi g^2(x)\mathrm{d}x \tag{4.4.39}$$

取

$$f(x) = \int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)\mathrm{d}s;\qquad g(x) = \varphi(x)$$

则

$$\begin{aligned}&\left\{\int_0^\pi\left[\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)\mathrm{d}s\right]\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}^2 \leqslant \int_0^\pi\left[\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)\mathrm{d}s\right]^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x\\ &\qquad\leqslant \int_0^\pi\left[\int_0^\pi \sin^2(x+s)\mathrm{d}s\cdot\int_0^\pi \varphi^2(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x\cdot\int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}\left[\int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x\right]^2\end{aligned}$$

得到第二步不等式, 再一次利用 Schwartz 不等式. 于是有

$$\left[\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right]^2 \leqslant \frac{\pi^2}{2}\left[\int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

或者

$$\left|\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x \tag{4.4.40}$$

由式(4.4.38)

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}\varphi,\varphi) &\geqslant \int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x - \lambda\left|\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|\\ &\geqslant \int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x - \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x = \left(1 - \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right)(\varphi,\varphi)\end{aligned} \tag{4.4.41}$$

另一方面

$$(\mathbf{L}\varphi,\varphi) \leqslant \int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \lambda\left|\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant\int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x = \left(1 + \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right)(\varphi, \varphi) \tag{4.4.42}$$

故从式(4.4.41 和(4.4.42)可得

$$\left(1 - \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right)\|\varphi\|^2 \leqslant (\mathbf{L}\varphi, \varphi) \leqslant \left(1 + \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right)\|\varphi\|^2 \tag{4.4.43}$$

比较式(4.4.34)，显然有

$$m = \left(1 - \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right); \qquad M = \left(1 + \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right)$$

故当 $\lambda<\sqrt{2}/\pi$，$\mathbf{L}$ 正定且有界，可用最速下降法．如果 $\lambda>\sqrt{2}/\pi$

$$(\mathbf{L}\varphi, \varphi) \geqslant k\|\varphi\|^2$$

其中 $k = 1 - \lambda\pi\sqrt{2} < 0$，称 $\mathbf{L}$ 具有下界．

回到我们的问题，用最速下降法解式(4.4.36)．取 $\lambda = 0.1$ 和 $f(x) = 1$

$$\varphi(x) - 0.1\int_0^\pi \sin(x + s)\varphi(s)\mathrm{d}s = 1 \tag{4.4.44}$$

因上式第二项系数为 0.1 可看作小项，于是取第一次近似解 $\varphi_1(x) = 1$ 则

$$v_1 = \mathbf{L}\varphi_1 - f = 1 - 0.1\int_0^\pi \sin(x + s)\mathrm{d}s - 1 = -0.2\cos x$$

$$t_1 = -\frac{(v_1, v_1)}{(\mathbf{L}v_1, v_1)} = \frac{-0.04\int_0^\pi \cos^2 x\mathrm{d}x}{(\mathbf{L}v_1, v_1)} = -\frac{0.02\pi}{(\mathbf{L}v_1, v_1)}$$

容易求得 $(\mathbf{L}v_1, v_1) = 0.02\pi$，故 $t_1 = -1$，于是第二次近似解为

$$\varphi_2 = \varphi_1 + t_1 v_1 = 1 + 0.2\cos x$$

则

$$v_2 = \mathbf{L}\varphi_2 - f = 0.01\pi\sin x$$

而

$$t_2 = -\frac{(v_2, v_2)}{(\mathbf{L}v_2, v_2)} = 1$$

故第三次近似解为

$$\varphi_3 = \varphi_2 + t_2 v_2 = 1 + 0.2\cos x + 0.01\pi\sin x \tag{4.4.45}$$

可以求得(见第五章)式(4.4.44)的严格解为

$$\varphi(x) = 1 + \frac{0.2}{1 - 0.0025\pi^2}\cos x + \frac{0.01\pi}{1 - 0.0025\pi^2}\sin x \tag{4.4.46}$$

可见,第三次迭代后近似解就相当接近严格解了．

4.4.3 最小平方法及 Courant 法

最小平方法的基本思想如下：如果 φ 是 $\mathbf{L}\varphi = f$ 的解，则模数 $\|\mathbf{L}\varphi - f\|^2$ 应

恒等于零，即

$$\| \mathbf{L}\varphi - f \|^2 \equiv 0. \tag{4.4.47}$$

设$\{\varphi_i\}$是 H_0 中的完备系(仍假定 $\mathbf{L}$ 是正定的)，取 n 级近似解

$$\bar{\varphi}^n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{4.4.48}$$

因 $\bar{\varphi}_n$ 是近似解，故 $\| \mathbf{L}\bar{\varphi}_n - f \|^2$ 不可能恒等于零，但我们选择 a_k，使 $\| \mathbf{L}\bar{\varphi}_n - f \|^2$取极小

$$\| \mathbf{L}\bar{\varphi}_n - f \|^2 = \min \tag{4.4.49}$$

于是可求得式(4.4.48)中的系数 a_k. 把式(4.4.48)代入$\| \mathbf{L}\bar{\varphi}_n - f \|^2$ 得

$$\begin{aligned} \| \mathbf{L}\bar{\varphi}_n - f \|^2 &= (\mathbf{L}\bar{\varphi}_n, \mathbf{L}\bar{\varphi}_n) - 2(\mathbf{L}\bar{\varphi}_n, f) + (f, f) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (\mathbf{L}\varphi_i, \mathbf{L}\varphi_j) - 2\sum_{j=1}^{n} a_j (\mathbf{L}\varphi_j, f) + (f, f) \end{aligned}$$

由$\| \mathbf{L}\bar{\varphi}_n - f \|^2$ 极小得 a_i 的方程组

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{L}\varphi_i, \mathbf{L}\varphi_j) a_j = (\mathbf{L}\varphi_j, f), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.4.50}$$

于是可求得一组 a_j.

Courant 法则是 Ritz 法和最小平方法的结合. 由 Ritz 法知道，$\mathbf{L}\varphi = f$ 的解对应于$J(\varphi)$取极小. 于是构成新的泛函 $\bar{J}(\varphi)$

$$\bar{J}(\varphi) = J(\varphi) + \| \mathbf{L}\varphi - f \|^2 \tag{4.4.51}$$

当 $\varphi = \varphi_0$ 是 $\mathbf{L}\varphi = f$ 的解时，显然 $\bar{J}(\varphi_0)$应取极小，故 $\mathbf{L}\varphi = f$ 的解也对应于$\bar{J}(\varphi)$取极小. Courant 法的优点在于有较好的收敛性.

4.4.4 共轭梯度法

首先介绍 $\mathbf{L}$ 正交及 $\mathbf{L}$ 正交序列概念. 在 4.3 节中，定义带算子 $\mathbf{L}$ 内积

$$\langle u \mid \mathbf{L} \mid v \rangle = (\mathbf{L}u, v) = (u, \mathbf{L}v) \tag{4.4.52}$$

其中 $\mathbf{L}$ 是 Hermite 算子，新的范数为

$$\| u \|_{\mathbf{L}}^2 = \langle u \mid \mathbf{L} \mid u \rangle = (\mathbf{L}u, u) \tag{4.4.53}$$

对函数序列$\{p_1, p_2, \cdots\}$，如果带算子内积正交

$$\langle p_i \mid \mathbf{L} \mid p_j \rangle = 0 \qquad (i \neq j) \tag{4.4.54}$$

这样的序列称为 $\mathbf{L}$ 正交序列或**共轭方向序列**. 如果序列$\{e_1, e_2, \cdots\}$线性独立但不 $\mathbf{L}$ 正交，则可以通过 Gram-Schmidt 过程求得 $\mathbf{L}$ 正交序列

$$p_1 = e_1$$

$$p_2 = e_2 - \frac{\langle e_2 \mid \mathbf{L} \mid p_1 \rangle}{\langle p_1 \mid \mathbf{L} \mid p_1 \rangle} p_1$$

…………

$$p_n = e_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle e_n \mid \mathbf{L} \mid p_k \rangle}{\langle p_k \mid \mathbf{L} \mid p_k \rangle} p_k; \qquad (n > 1) \tag{4.4.55}$$

事实上，令

$$p_n = e_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k p_k, \qquad n > 1$$

上式用 p_j 两边求带算子内积

$$\langle p_j \mid \mathbf{L} \mid p_n \rangle = \langle p_j \mid \mathbf{L} \mid e_n \rangle + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \langle p_j \mid \mathbf{L} \mid p_k \rangle$$

当 $j < n$，要求$\langle p_j | \mathbf{L} | p_n \rangle = 0$，同样 $j \neq k$ 时$\langle p_j | \mathbf{L} | p_k \rangle = 0$，因此从上式可求得

$$a_k = -\frac{\langle p_k \mid \mathbf{L} \mid e_n \rangle}{\langle p_k \mid \mathbf{L} \mid p_k \rangle} \tag{4.4.56}$$

即得到式(4.4.55).

考虑定义在 Hilbert 空间上的泛函

$$J(u) = (\mathbf{L}u, u) - 2(f, u) \tag{4.4.57}$$

如果 $\mathbf{L}$ 是 Hermite 算子且正定有界，即对任一允许函数 φ，存在正数 $m > 0$ 和 $M > 0$，满足式(4.4.34)，那么使 J 取极小的惟一函数 u_0 是方程

$$\mathbf{L}u_0 = f \tag{4.4.58}$$

的惟一解. 设想通过迭代过程逼近使泛函 $J(u)$极小的真解 u_0，也就是上式的解. 迭代初始点假定为 u_1，显然 $v_1 = \mathbf{L}u_1 - f \neq 0$,否则 u_1 即为真解 u_0. 取第 n 次近似解为

$$u_{n+1} = u_n + t_n p_n \tag{4.4.59}$$

在最速下降法中，搜索方向为 $J(u)$在点 u_n 的梯度方向 $p_n = v_n = \mathbf{L}u_n - f$，下降速度取为式(4.4.33). 事实上，最速下降方向仅仅代表了 $J(u)$的局部性质，局部来说，最速下降方向确实是 $J(u)$下降数值最快的方向，但从全局来看，最速下降法并不是收敛速度最快的方向. 特别是当 u_n 逼近真解 u_0 时，收敛速度更慢.

共轭梯度法的基本思想是把共轭性与最速下降法相结合，利用已知点处的梯度构造一组共轭方向，并沿此组方向进行搜索，求出 $J(u)$的极小点.

假定搜索产生的函数序列为$\{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$，相应的梯度方向为$\{v_1, v_2, \cdots v_n, \cdots\}$(其中 $v_n = \mathbf{L}u_n - f$)，我们用 Gram-Schmidt 过程来生成一组 $\mathbf{L}$ 共轭的方向序列$\{p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots\}$

$$p_1 = v_1 = \mathbf{L}u_1 - f \tag{4.4.60}$$

$$p_2 = v_2 + a_2 p_2 \tag{4.4.61}$$

…………

$$p_n = v_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k p_k \tag{4.4.62}$$

由式(4.4.56)得到

$$a_k = -\frac{\langle p_k \mid \mathbf{L} \mid v_n \rangle}{\langle p_k \mid \mathbf{L} \mid p_k \rangle} \tag{4.4.63}$$

注意：p_n 的生成仅依赖于$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 把 p_n 作为搜索方向代入式(4.4.59)，然后求逼近速度. 由

$$\begin{aligned} J(u_{n+1}) = J(u_n + t_n p_n) &= [\mathbf{L}(u_n + t_n p_n), u_n + t_n p_n] - 2(f, u_n + t_n p_n) \\ &= (\mathbf{L}u_n, u_n) + 2t_n(\mathbf{L}u_n, p_n) + t_n^2(\mathbf{L}p_n, p_n) \\ &\quad - 2(f, u_n) - 2t_n(f, p_n) \end{aligned} \tag{4.4.64}$$

的极小条件

$$\frac{\mathrm{d}J(u_n)}{\mathrm{d}t_n} = 2(\mathbf{L}u_n, p_n) - 2(f, p_n) + 2t_n(\mathbf{L}p_n, p_n) = 0 \tag{4.4.65}$$

即求得

$$t_n = -\frac{(\mathbf{L}u_n - f, p_n)}{(\mathbf{L}p_n, p_n)} = -\frac{(v_n, p_n)}{(\mathbf{L}p_n, p_n)} = -\frac{(v_n, p_n)}{\langle p_n | \mathbf{L} | p_n \rangle} \tag{4.4.66}$$

因此，共轭梯度法的过程可总结为：

(1) 选定初始函数 u_1，求 $J(u)$在点 u_1 的梯度 $p_1 = v_1 = \mathbf{L}u_1 - f$ 作为 $\mathbf{L}$ 共轭的方向序列$\{p_i\}$的第一个元 p_1. 由式(4.4.59)，求 $u_2 = u_1 + t_1 p_1$，其中 t_1 由式(4.4.66)决定

$$t_1 = -\frac{(v_1, p_1)}{\langle p_1 \mid \mathbf{L} \mid p_1 \rangle} \tag{4.4.67}$$

(2) 求 $J(u)$在点 u_2 的梯度 $v_2 = \mathbf{L}u_2 - f$，然后由式(4.4.61)求 $\mathbf{L}$ 共轭的方向序列$\{p_i\}$的第二个元 p_2

$$p_2 = v_2 - \frac{\langle p_1 | \mathbf{L} | v_2 \rangle}{\langle p_1 | \mathbf{L} | p_1 \rangle} \tag{4.4.68}$$

(3) 由式(4.4.59)，求 $u_3 = u_2 + t_2 p_2$，其中 t_2 由式(4.4.66)决定

$$t_2 = -\frac{(v_2, p_2)}{\langle p_2 | \mathbf{L} | p_2 \rangle} \tag{4.4.69}$$

(4) 一般如果求得 u_n，然后求梯度 $v_n = \mathbf{L}u_n - f$，于是 u_{n+1}由以下两式决定

$$u_{n+1} = u_n + \frac{(v_n, p_n)}{\langle p_n | \mathbf{L} | p_n \rangle} p_n \tag{4.4.70}$$

$$p_n = v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle p_k | \mathbf{L} | v_n \rangle}{\langle p_k | \mathbf{L} | p_k \rangle} p_k. \tag{4.4.71}$$

可以证明序列$\{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$收敛到真解 u_0. 共轭梯度法所需总计算量略大于最速下降法，但在收敛速度方面却有显著的改进.

习 题 四

4.1 求泛函

$$J(y)=\int_0^1 (12xy+yy'+y'^2)\mathrm{d}x$$

的极值函数，使其通过二连接点.

4.2 求泛函

$$J(y)=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\mathrm{d}x$$

的 Euler 方程.

4.3 设泛函

$$J(\varphi)=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_a^b\varphi^2(s)\mathrm{d}s-2\int_a^b\varphi(s)f(s)\mathrm{d}s$$

其中 $K(s,t)=K(t,s)$. 证明上述泛函取极值的必要条件为：$\varphi(t)$满足积分方程(见第五章)

$$\varphi(t)+\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(t).$$

4.4 求下列泛函的 Euler 方程

(a) $J(u)=\iint_G [a(x,y)u_x^2+b(x,y)u_y^2+c(x,y)u^2+2fu]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(b) $J(u)=\int_G \sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

4.5 求泛函

$$J(u)=\iint_G [(\nabla^2 u)^2-2f(x,y)u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\int_{\partial G}p(s)u\mathrm{d}s+\int_{\partial G}q(s)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$$

的 Euler 方程和自然边界条件.

4.6 求下列泛函的 Euler 方程

(a) $J(u)=\iint_G [(u_{xx}+u_{yy})^2-2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

(b) $J(u)=\iint_G [(u_{xx}+u_{yy})^2-2(1-\sigma)(u_{xx}-u_{yy}-u_{xy}^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 μ 和 σ 为常数. 注意：参数 μ 和 σ 在 Euler 方程中的作用.

4.7 证明二阶偏微分算子

$$\mathbf{L}u\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+q(x,y)u,\qquad (x,y)\in G$$

是自共轭算子，即证明$(\mathbf{L}u,v)=(u,\mathbf{L}v)+\mathbf{B}(u,v)$，其中 $\mathbf{B}$ 为边界积分算子.

4.8 考虑单位球内的本征值问题

$$\nabla^2\psi+\lambda\psi=0,\qquad x^2+y^2+z^2<1$$

$$\psi|_{x^2+y^2+z^2=1}=0$$

证明最小本征值为 $\lambda_{\min}=\pi^2$；利用 $\psi_1(r,\theta,\varphi)=1-r$ 估计最小本征值.

4.9　考虑本征值问题

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi=0,\qquad 0<x<\pi$$

$$\varphi'(0)=\varphi(\pi)=0$$

证明最小本征值为 $\lambda_0=0.25$，而第二个本征值为 $\lambda_1=2.25$. 利用

$$\varphi_1(x)=\pi^2-x^2;\qquad \varphi_2(x)=\pi^3-x^3$$

估计最小本征值 λ_0 和第二个本征值 λ_1.

4.10　估计本征值问题

$$\nabla^2\varphi+\lambda\varphi=0,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\qquad a<b$$

$$\varphi=0,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

最小本征值的大小.

4.11　用 Ritz 法求下列边值问题的第 n 项近似

$$\frac{d^4u}{dx^4}=1,\quad x\in(0,l)$$

$$u\Big|_{x=0,l}=\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=0,l}=0$$

提示：$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2dx-\int_0^l u\,dx$；取 $\varphi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$.

4.12　用 Galerkin 法求下列边值问题的二级近似

$$\nabla^4u=1,\qquad (x,y)\in G$$

$$u\Big|_{\partial G}=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G}=0$$

其中区域 G 为环域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$. 提示：取

$w=(x^2+y^2-1)[4-(x^2+y^2)],u(x,y)=w^2[a_1+a_2(x^2+y^2)]$.

4.13　设 G 是 $y=kx$ 及 $x=a$ 和 $x=b$ 围成的梯形，用 Kantorovich 法解边值问题

$$\nabla^2u=-1,\qquad (x,y)\in G;\qquad u\Big|_{\partial G}=0.$$

第五章　积分方程基本理论

本章介绍积分方程的基本理论，主要内容有：5.1 节介绍积分方程的形成和分类，讨论 Abel 方程的解，以及第一类积分方程的适定性问题；5.2 节介绍解积分方程的两种基本技术，即迭代法和有限秩近似；5.3 节讨论 $L^2[a,b]$空间中积分方程的基本理论，介绍用迭代法和有限秩近似的结合解具有平方可积核的积分方程；最后，5.4 节从积分方程的角度讨论积分变换以及应用积分变换求解特殊形状的积分方程．

5.1　积分方程的形成及分类

由第三章，我们知道利用 Green 函数可以把各种微分方程的定解问题化成积分方程．从许多实际的物理问题，也可直接得到各种形式的积分方程．本节列举若干典型的例子，讨论各种积分方程的形成及其分类．

5.1.1　Volterra 积分方程的形成

考虑二阶线性常微分方程的 Cauchy 问题

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x), \qquad x > 0 \tag{5.1.1}$$

$$y|_{x=0} = 0; \qquad y'|_{x=0} = 0 \tag{5.1.2}$$

设 $f(x)$和 $a_i(x)(i=0,1)$是连续函数，并且 $a_i(x)$有连续的一阶导数．对方程(5.1.1)积分二次并利用方程(5.1.2)得到

$$y(x) + \int_0^x\int_0^\xi\left[a_1(t)\frac{dy(t)}{dt} + a_0(t)y(t)\right]dt d\xi = \int_0^x\int_0^\xi f(t)dt d\xi \tag{5.1.3}$$

上式中积分相当于在三角形区内作二重积分，如图 5.1.1，交换积分次序可得

$$\int_0^x\int_0^\xi f(t)dt d\xi = \int_0^x f(t)\int_t^x d\xi dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt \equiv g(x)$$

$$\int_0^x\int_0^\xi a_1(t)\frac{dy(t)}{dt}dt d\xi = \int_0^x a_1(t)y(t)dt - \int_0^x y(t)\frac{da_1(t)}{dt}dt\int_t^x d\xi$$

$$= \int_0^x y(t)\left[a_1(t) - (x-t)\frac{da_1(t)}{dt}\right]dt$$

$$\int_0^x\int_0^\xi a_0(t)y(t)dt d\xi = \int_0^x a_0(t)y(t)\int_t^x d\xi dt = \int_0^x (x-t)a_0(t)y(t)dt$$

于是式(5.1.3)变成

$$y(x)+\int_0^x\left[a_1(t)-(x-t)\frac{\mathrm{d}a_1(t)}{\mathrm{d}t}+a_0(t)(x-t)\right]y(t)\mathrm{d}t=g(x) \tag{5.1.4}$$

令

$$k(x,t)\equiv\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\frac{\partial^k[a_k(t)(x-t)]}{\partial t^k}$$

于是式(5.1.4)变成

$$y(x)+\int_0^x k(x,t)y(t)\mathrm{d}t=g(x) \tag{5.1.5}$$

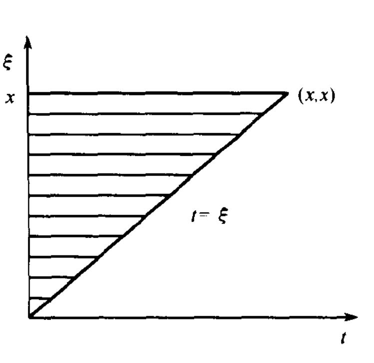


图 5.1.1　交换积分次序

其中 $k(x,t)$称为**积分核**. 因此，我们把 Cauchy 问题化成了积分方程(5.1.5). 其意义很明显，因为方程(5.1.5)的讨论要比方程(5.1.1)容易得多(例如解的存在性讨论往往这样做). 形如方程(5.1.5)的积分方程称为**第二类 Volterra 积分方程**. 与此对应，称具有下列形式的方程

$$\int_0^x k(x,t)y(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{5.1.6}$$

为**第一类 Volterra 积分方程**，其中 $k(x,t)$和 $f(x)$已知，而 $y(t)$未知. 具有式(5.1.6)形式的积分方程的最简单例子可有下列物理问题推得.

例 5.1.1　如图5.1.2，设一质点 M 由于重力的作用，由(ξ,η)点在垂直平面内运动到$(\xi_0,0)$点$(\eta>0,\xi_0>0)$. 显然运动所需时间是 η 的函数 $t=t(\eta)$. 如果已知 $t=t(\eta)$，求 M 运动的轨迹 $x=x(y)$.

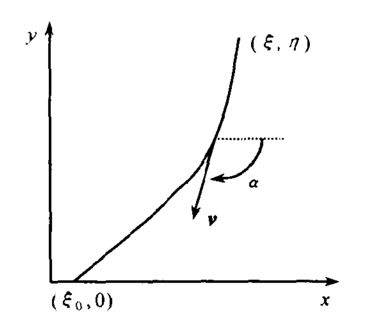


图 5.1.2　质点由(ξ,η)运动到$(\xi_0,0)$

M 运动的速度大小 v 满足

$$v^2=2g(\eta-y),\qquad 0\leqslant y\leqslant\eta$$

其中 g 为重力加速度. 设 $\alpha(x,y)$是速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴的夹角，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=v\sin\alpha$$
$$=\sqrt{2g(\eta-y)}\sin\alpha$$

即

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2g(\eta - y)}\sin\alpha}\mathrm{d}y$$

两边积分并令

$$\varphi(y) = \left[\frac{1}{\sin\alpha(x,y)}\right]\Bigg|_{x=x(y)}$$

得到

$$t(\eta) = \int_{\eta}^{0}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{2g(\eta - y)}}\mathrm{d}y = -\int_{0}^{\eta}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{2g(\eta - y)}}\mathrm{d}y$$

令 $f(\eta) = -\sqrt{2g}t(\eta)$得积分方程

$$\int_{0}^{\eta}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{\eta - y}}\mathrm{d}y = f(\eta) \tag{5.1.7}$$

一旦从上式求得 $\varphi(y)$，则利用

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cot\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = \sqrt{\varphi^2(y) - 1}$$

可求得 M 运动的曲线 $x = x(y)$. 方程(5.1.7)是第一类 Volterra 积分方程，具有积分核 $k(\eta,y) = 1/\sqrt{(\eta - y)}$. 它是更普遍的一类方程，即 Abel 方程的特例

$$\int_{0}^{x}\frac{\varphi(y)}{(x - y)^{\alpha}}\mathrm{d}y = f(x) \tag{5.1.8}$$

其中 $0<\alpha<1$, $f(x)$是连续函数，满足自恰条件：$f(0) = 0$.

一般第一类 Volterra 方程比第二类 Volterra 方程更难求解. 但在一定条件下，第一类方程可化成第二类方程. 考虑 $k(x,y)$和 $f(x)$连续可导，对式(5.1.6)两边求导

$$k(x,x)\varphi(x) + \int_{0}^{x}\frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\varphi(y)\mathrm{d}y = f'(x)$$

设 $k(x,x)\neq 0$，两边除以 $k(x,x)$

$$\varphi(x) + \int_{0}^{x}k_1(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \frac{f'(x)}{k(x,x)}$$

因此式(5.1.6)化成了式(5.1.5)的形式，其中新核为

$$k_1(x,y) = \frac{1}{k(x,x)}\frac{\partial k(x,y)}{\partial x}$$

显然上述方法不适合于 Abel 方程，因为 $k(x,x)\to\infty$，但 Abel 方程可用其他方法求解(见 5.1.3 小节的讨论).

第一类 Volterra 积分方程的另一个例子是信号处理中具有卷积核的方程

$$y(t) = \int_{0}^{t}h(t - \tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.1.9}$$

其中 $x(t)$是 t 时刻输入系统的信号，$h(t - \tau)$是线性系统的脉冲响应，$y(t)$是输

出．现在已知 $y(t)$和 $h(t-\tau)$求 $x(t)$．

5.1.2　Fredholm 积分方程的形成

具有下列形式的积分方程称为**第二类 Fredholm 积分方程**

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.1.10}$$

其中 $f(x)$和 $k(x,y)$为已知函数，λ 为常数，而 $\varphi(x)$待求．与此相应，**第一类 Fredholm 积分方程**定义为

$$\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x) \tag{5.1.11}$$

其中 $f(x)$和 $k(x,y)$为已知函数，而 $\varphi(x)$待求．

利用 Green 函数，常微分方程的边值问题一般可化成第二类 Fredholm 积分方程．

例 5.1.2　考虑边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2} - \lambda\rho(x)\varphi(x) = h(x), \qquad x\in(0,l)$$

$$\varphi|_{x=0} = a; \qquad \varphi|_{x=l} = b$$

为了把边界条件齐次化，作变换：$\varphi(x)=g(x)+y(x)$，其中 $g(x)=a+(b-a)x/l$，于是 y 满足

$$-\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} - \lambda\rho(x)y = h(x) + \lambda\rho(x)g(x) \equiv f_1(x)$$

$$y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0 \tag{5.1.12}$$

上式的 Green 函数为

$$G(x,\xi) = \frac{1}{l}\begin{cases} x(l-\xi) & 0\leqslant x\leqslant \xi \\ \xi(l-x) & \xi\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

于是式(5.1.12)化成下列积分方程

$$y(x) = f(x) + \lambda\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$f(x) = \int_0^l G(x,\xi)f_1(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5.1.13}$$

假如 $\rho(x)>0$，令 $\psi=\sqrt{\rho(x)}\,y(x)$，$k(x,\xi)=G(x,\xi)\sqrt{\rho(\xi)\rho(x)}$，于是得第二类积分方程

$$\psi(x) = F(x) + \lambda\int_0^l k(x,\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5.1.14}$$

其中 $F(x)=f(x)\sqrt{\rho(x)}$．因 $G(x,\xi)=G(\xi,x)$，故 $k(x,\xi)=k(\xi,x)$，上式称为具有对称核的积分方程．当 $F(x)=0$ 时，下列方程称为**本征方程**

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.1.15}$$

与微分方程的本征值问题一样，上式并不是对所有的 λ 都有非零解，只有对某些特定的 λ_n 值才有非零解，λ_n 称为**本征值**，而相应的非零解称为**本征函数**. 下面将看到式(5.1.14)中 λ 是否等于本征值 λ_n，对方程解的性质有很大的影响.

第一类 Fredholm 方程熟悉的例子是 Fourier 积分

$$\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\varphi(x)\mathrm{d}x, \qquad y \in (-\infty,\infty) \tag{5.1.16}$$

其中 $\psi(y)$可看作已知函数. 当 $\psi(y)$平方可积时,式(5.1.16)的解为逆 Fourier 变换

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\mathrm{d}y \tag{5.1.17}$$

第二个例子是 Hilbert 变换

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t-x}\mathrm{d}t = u(x), \qquad x \in (-\infty,\infty) \tag{5.1.18}$$

上式在色散理论和数据处理中有十分重要的应用. 在实际问题中,$u(x)$与 $v(x)$是一个复值函数的实部和虚部. 因此,Hilbert 变换把复值函数的实部和虚部联系在一起，如果实验测得实部 $u(x)$，可由式(5.1.18)解得虚部 $v(x)$

$$v(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t-x}\mathrm{d}t \tag{5.1.19}$$

式(5.1.18)和(5.1.19)称为 Hilbert 变换对，其中积分是在主值意义下的积分. 我们将在 5.4 节中证明式(5.1.19)并讨论 Hilbert 变换的基本性质.

值得指出的是，第一类 Fredholm 方程的讨论比第二类方程要复杂得多. 事实上，方程(5.5.11)一般是不适定的，对 Volterra 积分方程也可得到同样的结论(见 5.1.3 小节). 因此，本章主要讨论第二类积分方程.

为方便，把式(5.1.10)和(5.1.11)写成算子方程的形式

$$\varphi = f + \lambda\mathbf{K}\varphi; \qquad \mathbf{K}\varphi = g \tag{5.1.20}$$

其中 $\mathbf{K}$ 为积分算子

$$\mathbf{K}\varphi \equiv \int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.1.21}$$

而称下列方程

$$\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi \tag{5.1.22}$$

为算子 $\mathbf{K}$ 的本征方程. 上式还可以写成

$$\mathbf{K}\varphi = \mu\varphi; \qquad \mu = 1/\lambda \tag{5.1.23}$$

显然，积分方程(5.1.8)或(5.1.18)的核作为二元函数在直线 $y=x$ 有奇性. 一般如果积分方程的核函数具有形式

$$k(x,y)=\frac{H(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}$$

其中 $H(x,y)$为有界函数，称为**奇性核**. 当$0<\alpha<1$时，称这种核的积分方程为**弱奇性**积分方程，它的解具有较好的性质，具备 Fredholm 型积分方程的一切特性和结论. 当 $\alpha=1$ 时，例如式(5.1.18)，称为**奇性积分方程**，其积分只有在主值积分下才有意义，以后将不作专门讨论.

5.1.3 Abel 方程及第一类积分方程的适定性

与微分方程定解问题的适定性一样，如果一个积分方程的解存在，且惟一，并且在某种意义上来说是稳定的，则称这个积分方程是适定的. 如果有一个条件不满足，则称为不适定的. 下面阐明第一类积分方程是不适定的.

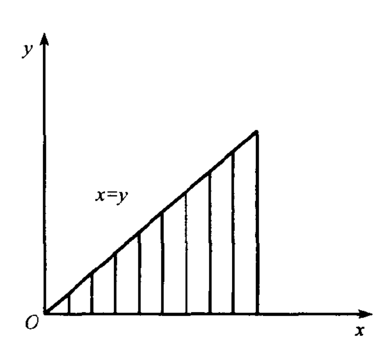


图 5.1.3 积分交换次序

考虑 Abel 方程(5.1.8)，首先求出它的解，然后证明解对 $f(x)$的微小变动是不稳定的. 对式(5.1.8)两边乘$(z-x)^{-\beta}$并对x从0到z积分

$$\int_0^z\int_0^x\frac{\varphi(y)}{(x-y)^{\alpha}}\mathrm{d}y\,\frac{1}{(z-x)^{\beta}}\mathrm{d}x=\int_0^z\frac{f(x)}{(z-x)^{\beta}}\mathrm{d}x$$

左式积分变换次序，先对 x 求积分，再对 y 求积，如图 5.1.3

$$\int_0^z\left[\int_y^z\frac{\mathrm{d}x}{(x-y)^{\alpha}(z-x)^{\beta}}\right]\varphi(y)\mathrm{d}y=\int_0^z\frac{f(x)}{(z-x)^{\beta}}\mathrm{d}x$$

令 $x=y+(z-y)u$，则

$$\int_y^z\frac{\mathrm{d}x}{(x-y)^{\alpha}(z-x)^{\beta}}=\int_0^1\frac{(z-y)\mathrm{d}u}{(z-y)^{\alpha}u^{\alpha}(z-y)^{\beta}(1-u)^{\beta}}$$
$$=(z-y)^{-\alpha-\beta+1}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha}(1-u)^{\beta}}=(z-y)^{-\alpha-\beta+1}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}$$

因此

$$\int_0^z(z-y)^{1-\alpha-\beta}\varphi(y)\mathrm{d}y=\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_0^z\frac{f(x)}{(z-x)^{\beta}}\mathrm{d}x \quad (5.1.24)$$

如取 $\beta=1-\alpha$，则上式变成

$$\int_0^z\varphi(y)\mathrm{d}y=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^z\frac{f(x)}{(z-x)^{1-\alpha}}\mathrm{d}x=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^z\frac{f(y)}{(z-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y \quad (5.1.25)$$

两边求导即得 Abel 方程的解 $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y \tag{5.1.26}$$

其中利用了 Γ 函数的性质:$\Gamma(1)=1$ 和 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin\alpha\pi$. 下面来说明上式对 $f(x)$ 的微小变化是不稳定的. 设 $\tilde{f}(x)$

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \delta f \tag{5.1.27}$$

而相应的解为 $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)+\delta\varphi$, 取

$$\delta f(x) = \eta^{(1-\alpha)/3}\sin\frac{x}{\eta}$$

由式(5.1.26)

$$\delta\varphi(x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{\eta^{(1-\alpha)/3}\sin(y/\eta)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y \tag{5.1.28}$$

设 $x\in[0,1]$, 容易看出

$$\| \tilde{f}(x) - f(x) \| = \| \delta f \| \leqslant \eta^{(1-\alpha)/3} \tag{5.1.29}$$

而解的变化可证明为

$$\| \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x) \| = \| \delta\varphi \| \geqslant \frac{1}{2}\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\eta^{(1-\alpha)/3}} \tag{5.1.30}$$

由上两式可看出, 当 $\eta\to 0$ 时 $\|\delta f\|\to 0$, 但 $\|\delta\varphi\|\to\infty$. 因此解式(5.1.26)对 $f(x)$ 的变动是不稳定的. 于是,Abel 方程在古典意义上是不适定的.

对第一类 Fredholm 方程也可作相似的讨论. 考虑第一类 Fredholm 方程

$$\int_0^1 k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = u(x), \qquad (0\leqslant x\leqslant 1) \tag{5.1.31}$$

设

$$\tilde{u}(x) = u(x) + N\int_0^1 k(x,y)\sin(\eta y)\mathrm{d}y$$

则解 $\tilde{\varphi}(x)$ 为

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + N\sin(\eta x)$$

显然对于任意固定的 N, 只要 η 取得足够大

$$\| u(x) - u(x) \| = |N|\sqrt{\int_0^1\left[\int_0^1 k(x,y)\sin(\eta y)\mathrm{d}y\right]^2\mathrm{d}y} \tag{5.1.32}$$

就可任意小, 但解的偏差

$$\| \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x) \| = |N|\int_0^1 \sin(\eta x)\mathrm{d}x = \frac{|N|}{2}\left(1-\frac{\sin 2\eta}{\eta}\right)\to\frac{|N|}{2} \tag{5.1.33}$$

却可任意大. 因此, 第一类 Fredholm 方程是不适定的.

第一类积分方程的不稳定性是不难理解的. 以方程(5.1.31)为例，左边的积分起到平滑作用，积分后形成的函数较光滑，而右边函数如果不满足一定的光滑性是不可能等于左边的.

5.1.4 非线性积分方程的形成

从式(5.1.21)可看出，算子 **K** 是线性算子，即具有性质

$$\mathbf{K}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\mathbf{K}\varphi_1 + \beta\mathbf{K}\varphi_2$$

故 Fredholm 方程(5.1.20)是线性方程. 当物理问题涉及到非线性效应时，往往可推得非线性积分方程. 非线性积分方程有各种不同的形式，例如

$$\varphi(x) + \int_a^b k(x,y)F[y,\varphi(y)]\mathrm{d}y = 0 \tag{5.1.34}$$

其中 $k(x,y)$和 F 为已知函数，而 F 关于 φ 是非线性的. 上式称为 **Hammerstein 方程**. 更一般的非线性方程为 **Urysohn 方程**

$$\varphi(x) + \int_a^b k[x,y,\varphi(x)]\mathrm{d}y = g(x) \tag{5.1.35}$$

其中非线性项直接出现在积分核中. 导致 Hammerstein 积分方程的一个简单例子是非线性边值问题.

例 5.1.3 考虑非线性边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2} = F[x,\varphi(x)] + f_1(x)$$

$$\varphi\big|_{x=0} = \varphi\big|_{x=l} = 0 \tag{5.1.36}$$

利用 Green 函数

$$G(x,y) = \frac{1}{l}\begin{cases} x(l-y), & 0 \leqslant x \leqslant y \\ y(l-x), & y \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{5.1.37}$$

可把式(5.1.36)化成

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^l F[y,\varphi(y)]G(x,y)\mathrm{d}y$$

$$f(x) = \int_0^l G(x,y)f_1(y)\mathrm{d}y. \tag{5.1.38}$$

例 5.1.4 单摆振动方程

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} - \alpha^2\sin\varphi(t) = g_1(t) \tag{5.1.39}$$

式中 t 表示时间变量. 如果 $g_1(t)$是周期为 2 的奇函数，我们要求上式周期为 2 的解，这个条件等价于边界条件 $\varphi\big|_{t=0} = \varphi\big|_{t=1} = 0$. 于是，$F[t,\varphi(t)] = \alpha^2\sin\varphi(t)$，代入式(5.1.38)

$$\varphi(t) = g(t) + \alpha^2\int_0^1 \sin\varphi(y)G(t,y)\mathrm{d}y$$

$$g(t) = \int_0^1 G(t,y)g_1(y)\mathrm{d}y \tag{5.1.40}$$

令 $\psi = \varphi(t) - g(t)$，则 ψ 满足下列 Hammerstein 方程

$$\psi(t) = \alpha^2\int_0^1 \sin[g(y) + \psi(y)]G(t,y)\mathrm{d}y. \tag{5.1.41}$$

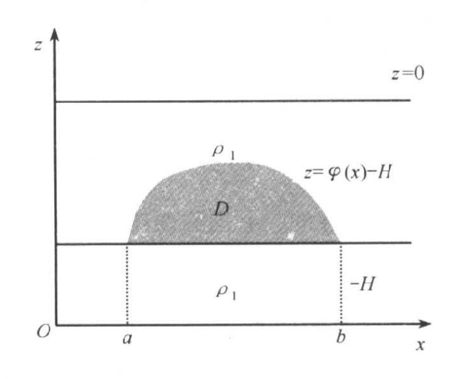


图 5.1.4 地球物理中场的反演

例 5.1.5 考虑不均匀地质的二维分布，如图 5.1.4 所示，在 $z = -H$ 附近有一地质密度的分界面，在 D 区密度为 ρ_2，而在其他区域密度为 ρ_1，其中 D 的分界线为 $z = \varphi(x) - H$. 现在的问题是,已测得地面 $z = 0$ 处由于地质不均匀引起的重力变化情况

$$\Delta g = -\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{5.1.42}$$

要推出分界面的形状 $z = \varphi(x) - H$. 由于不均匀性 $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ 产生的场满足二维 Poisson 方程

$$\nabla^2 v = -4\pi\Delta\rho \tag{5.1.43}$$

利用 Green 函数

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

式(5.1.43)的解为

$$v = \frac{1}{2\pi}\int_D \Delta\rho\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

由式(5.1.42)得到

$$\Delta g = -\Delta\rho\left[\frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_{-H}^{-H+\varphi(\xi)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{\Delta\rho}{2\pi}\int_a^b \ln\frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + [H-\varphi(\xi)]^2}\mathrm{d}\xi$$

令 $u(x) = 2\pi\Delta g/\Delta\rho$ 即得到关于 $\varphi(\xi)$ 的积分方程

$$\int_a^b \ln\frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + [H-\varphi(\xi)]^2}\mathrm{d}\xi = u(x)$$

显然上式具有 Urysohn 方程的形式. 研究表明上式解关于 $u(x)$ 的微小变化不稳定，而 $u(x)$ 表示物理测量的量，总存在一定的误差. 初看起来上述问题似乎没有多大的意义，但实际问题却存在. 这种不适定问题的讨论是目前应用数学的一个

重要方向，产生了一套求解不适定问题的理论和方法，我们将在第七章中作初步介绍.

5.2　积分方程的迭代法和有限秩近似

本节讨论积分方程的两种基本解法：迭代法和有限秩近似. 主要讨论第二类 Fredholm 积分方程，而第二类 Volterra 方程可看作第二类 Fredholm 积分方程的特例，因为只要令下列方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.1}$$

的积分核为

$$\bar{k}(x,y) = \begin{cases} 0, & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b \\ k(x,y), & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

式(5.2.1)即可变成第二类 Volterra 方程.

5.2.1　第二类 Fredholm 方程的迭代法

考虑式(5.2.1)或算子方程

$$\varphi = f + \lambda\mathbf{K}\varphi \tag{5.2.2}$$

当 λ 足够小(含义见后讨论)时，设想上式的解可表示成小参数 λ 的幂级数

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(x) \tag{5.2.3}$$

代入式(5.2.2)，比较 λ 的同次幂系数可得

$$\varphi_0(x) = f$$

$$\varphi_1(x) = \mathbf{K}\varphi_0 = \mathbf{K}f$$

$$\varphi_2(x) = \mathbf{K}\varphi_1 = \mathbf{K}(\mathbf{K}\varphi_0) = \mathbf{K}^2 f$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) = \mathbf{K}\varphi_{n-1} = \mathbf{K}^n f \tag{5.2.4}$$

如果定义第 n 次迭代核

$$k_1(x,y) = k(x,y)$$

$$k_2(x,y) = \int_a^b k(x,y_1)k(y_1,y)\mathrm{d}y_1 = \int_a^b k_1(x,y_1)k(y_1,y)\mathrm{d}y_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$k_n(x,y) = \int_a^b k_{n-1}(x,y_1)k(y_1,y)\mathrm{d}y_1 \tag{5.2.5}$$

第 n 次迭代解可表示成

$$\varphi_n(x) = \int_a^b k_n(x,y)f(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.6}$$

代入式(5.2.3)得形式解

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b k_{n+1}(x,y)\lambda^n f(y)\mathrm{d}y \\ &= f(x) + \lambda\int_a^b R(x,y,\lambda)f(y)\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n \mathbf{K}^n f\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

其中

$$R(x,y,\lambda) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}k_{n+1}(x,y)\lambda^n \tag{5.2.8}$$

一般称式(5.2.7)为 **Born 级数或 Neumann 级数**. 由于 $R(x,y,\lambda)$不依赖于 $f(x)$,故称为式(5.2.2)的**解核**. 现在的问题是,在什么条件下式(5.2.7)或(5.2.8)中无穷级数收敛且收敛到方程(5.2.2)的解? 设$|k(x,y)|$的最大值为有限的正数 M

$$|k(x,y)| \leqslant M < \infty$$

于是,由式(5.2.6)

$$|k_1(x,y)| = |k(x,y)| < M$$

$$|k_2(x,y)| \leqslant M\int_a^b |k_1(x,y)|\mathrm{d}y \leqslant M^2(b-a)^1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|k_n(x,y)| \leqslant M^n(b-a)^{n-1}$$

式(5.2.8)中无穷级数收敛的条件是

$$\frac{|k_{n+1}(x,y)\lambda^n|}{|k_n(x,y)\lambda^{n-1}|} = \frac{|M^{n+1}(b-a)^n\lambda^n|}{|M^n(b-a)^{n-1}\lambda^{n-1}|} < 1$$

即 $M(b-a)|\lambda|<1$, 因此当 λ 满足

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{5.2.9}$$

式(5.2.8)关于 λ 的幂级数绝对且一致收敛. 但上式仅仅是充分条件,并非必要条件. 可举两例来证明之.

例 5.2.1 设 $k(x,y)=\alpha(x)\beta(y)$, 其中 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$是两个任意连续函数且满足正交条件

$$\int_a^b \alpha(x)\beta(x)\mathrm{d}x = 0$$

这时

$$\mathbf{K}f = \int_a^b k_1(x,y)f(y)\mathrm{d}y = \alpha(x)\int_a^b \beta(y)f(y)\mathrm{d}y \equiv C\alpha(x)$$

$$\mathbf{K}^2 f = \int_a^b k_2(x,y)f(y)\mathrm{d}y = C\alpha(x)\int_a^b \beta(y)\alpha(y)\mathrm{d}y = 0$$

…………

$$\mathbf{K}^n f = \mathbf{K}^{n-2}(\mathbf{K}^2 f) = 0$$

其中 C 为常数. 于是式(5.2.7)中只有前两项，故方程有解

$$\varphi(x) = f(x) + \mathbf{K}f(x) = f(x) + \lambda C\alpha(x)$$

无需用到条件式(5.2.9).

例 5.2.2　Volterra 核

$$\bar{k}(x,y) = \begin{cases} 0, & a \leqslant x \leqslant y \leqslant b \\ k(x,y), & a \leqslant y \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

记

$$M = \max|k(x,y)|; \qquad A = \int_a^b |f|\mathrm{d}x$$

这时有

$$|\mathbf{K}f| = \left|\int_a^x k(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant AM$$

$$|\mathbf{K}^2 f| = \left|\int_a^x k(x,y)(\mathbf{K}f)\mathrm{d}y\right| \leqslant A\int_a^x M^2\mathrm{d}y = AM^2(x-a)$$

用归纳法可证明，一般有

$$|\mathbf{K}^n f| \leqslant AM^n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n = 1,2,\cdots) \tag{5.2.10}$$

事实上，当 $n=1$ 和 2 时上式成立，设 $n=k$ 时成立

$$|\mathbf{K}^k f| \leqslant AM^k \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}$$

对 $n=k+1$

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}^{k+1} f| &= |\mathbf{K}^k(\mathbf{K}f)| = |\mathbf{K}(\mathbf{K}^k f)| \\ &\leqslant \int_a^x AM^k \frac{(y-a)^{k-1}}{(k-1)!} M\mathrm{d}y = AM^{k+1}\frac{(x-a)^k}{k!} \end{aligned}$$

即有

$$|\mathbf{K}^{k+1} f| \leqslant AM^{k+1} \frac{(x-a)^{(k+1)-1}}{[(k+1)-1]!}$$

故当 $n=k+1$ 时式(5.2.10)也成立. 于是对任意 n,式(5.2.10)均成立.

因此，级数式(5.2.7)存在对任何 $M<\infty$ 都收敛的控制级数

$$\lambda AM + \lambda^2 AM^2(b-a) + \cdots + \lambda^n AM^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \tag{5.2.11}$$

第$(n+1)$项与 n 项之比

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\lambda^{n+1}AM^{n+1}(b-a)^n}{n!}}{\dfrac{\lambda^n AM^n(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda M(b-a)}{n}=0$$

因此式(5.2.11)作为 λ 的幂级数收敛半径为无穷大，即对任何 λ，第二类 Volterra 方程总有解式(5.2.7).

5.2.2 Banach 空间第二类 Fredholm 方程的迭代技术

5.2.1 小节的讨论受到一个很严格的条件限制，即要求

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)} \tag{5.2.12}$$

如果积分区间无穷大或半无穷大，上式要求 $|\lambda|<0$，显然这是不可能的. 因此没有核能满足式(5.2.12). 对于无穷区间问题来说，用 $M=\max|k(x,y)|$ 来代替 $k(x,y)$，对式(5.2.7)和(5.2.8)作收敛讨论是过分粗糙的近似. 下面我们将要证明式(5.2.12)可被宽得多的条件来代替. 例如，如果我们把问题限制在 Hilbert 空间，具体说在 $L^2[a,b]$中讨论，则式(5.2.12)可被下式来代替

$$|\lambda|\cdot\int_a^b\int_a^b|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<1 \tag{5.2.13}$$

其中区间可是无穷或半无穷，故只要求 $k(x,y)$平方可积就可以了.

为了进行下面的讨论，首先介绍几个基本概念：

(1) Banach 空间：在第二章中，我们定义 Hilbert 空间为**完备的内积向量空间**,特别是 $L^2[a,b]$函数空间. 内积的引进具有十分重要的意义，它使我们可以讨论两个向量之间的“夹角”，由内积引出的“范数” $\|u\|^2=(u,u)$则使我们可以讨论向量“长度”. 我们把一个向量的长度称为“范数”(假如存在的话). 有的向量空间不能定义内积，但仍然可以定义“长度”即可引进“范数”. 向量空间 V 的范数定义为一个实数，它对应于 V 的任一元素 f，存在 $\|f\|$ 满足下列三条公理：

(a) 对所有 $f,g\in V$ 有 $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$；

(b) $\|f\|\geqslant 0$，当且仅当 $f=0$ 时等号成立；

(c) 对于数域(V 在它上面定义)中的任何纯量 a：$\|af\|=|a|\cdot\|f\|$.

能够定义范数的向量空间称为**赋范向量空间**，例如 $L^2[a,b]$空间即是赋范向量空间，范数可由内积导出

$$\|f\|^2=(f,f)=\int_a^b|f|^2\mathrm{d}x$$

在向量空间上定义了范数，就可讨论向量序列的收敛性问题. 对于赋范向量空间 V 中的一个序列$\{f_n\}$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0\qquad(f\in V)$$

则称$\{f_n\}$按范数收敛于f. 如果$\{f_n\}$对给定的任意$\varepsilon>0$, 存在一个正整数N, 只要$m>N, n>N$, 都有

$$\| f_n - f_m \| < \varepsilon$$

那么称$\{f_n\}$为一个**柯西序列**(Cauchy sequences). 进一步, 如果一个赋范向量空间的每个Cauchy序列都收敛到此空间中的一个元素, 则称V为完备的赋范向量空间,亦称为**Banach 空间**. 一个熟悉的Banach空间的例子是$[a,b]$上的连续函数空间$C[a,b]$, 范数可以定义为

$$\| f \| = \max | f(x) |, \qquad x \in [a,b] \tag{5.2.14}$$

显然, 所有的Hilbert空间, 范数可有内积引出$\| f \| = (f,f)$.

(2) 有界线性变换: 对作用于赋范向量空间V的变换(或算子)$\mathbf{K}$, 若满足:

(a) 对于所有$f,g \in V, \mathbf{K}(f+g) = \mathbf{K}f + \mathbf{K}g$;

(b) 对于所有$f,g \in V$, 以及数域(V在它上面定义)中的所有纯量a

$$\mathbf{K}(af) = a\mathbf{K}f;$$

(c) 存在一个常数M, 使对于所有的$f \in V$, $\| \mathbf{K}f \| \leqslant M \| f \|$.

称$\mathbf{K}$为**有界线性变换(或有界线性算子)**.

如果$\mathbf{K}$是作用于V的有界线性变换, 满足$\| \mathbf{K}f \| \leqslant M \| f \|$的最小正数$M$称为**算子$\mathbf{K}$的范数**, 记作$\| \mathbf{K} \|$

$$\| \mathbf{K} \| = \sup_{f \in V} \frac{\| \mathbf{K}f \|}{\| f \|} \tag{5.2.15}$$

可以证明由上式定义的$\| \mathbf{K} \|$确实满足范数的三条公理, 事实上

$$\| (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) f \| = \| \mathbf{K}_1 f + \mathbf{K}_2 f \| \leqslant \| \mathbf{K}_1 f \| + \| \mathbf{K}_2 f \|$$
$$\leqslant \| \mathbf{K}_1 \| \cdot \| f \| + \| \mathbf{K}_2 \| \cdot \| f \| = (\| \mathbf{K}_1 \| + \| \mathbf{K}_2 \|) \| f \|$$

即有

$$\| \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \| \leqslant \| \mathbf{K}_1 \| + \| \mathbf{K}_2 \|$$

$\| \mathbf{K} \|$满足范数的其他公理是容易证明的. 事实上, 一个Banach空间上的所有有界线性变换的集合也构成一个完备的赋范向量空间, 因而也是一个Banach空间. 引入算子$\mathbf{K}$的范数后, 也可讨论算子序列的收敛性问题, 对于一个算子序列$\{\mathbf{K}_n\}$, 当

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{K}_n - \mathbf{K} \| = 0$$

我们说$\{\mathbf{K}_n\}$按范数收敛于算子$\mathbf{K}$.

介绍了上述几个概念, 特别是定义了算子的范数后, 我们可以讨论Banach空间中的迭代技术, 并给出十分简洁的结果, 而且讨论也适合于无穷区间情形. 把积分方程写成算子方程形式

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{K} \varphi \tag{5.2.16}$$

假定$\mathbf{K}$是作用于Banach空间B上的有界线性算子, $f \in B$, 上式的解写成

$$\varphi = \frac{1}{(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})} f \tag{5.2.17}$$

假如 $\lambda\mathbf{K}$ 在某种意义上足够小，则$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^{-1}$可展成 $\lambda\mathbf{K}$ 的级数

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^{-1} = \mathbf{I} + \lambda\mathbf{K} + \lambda^2\mathbf{K}^2 + \cdots + \lambda^n\mathbf{K}^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathbf{K}^n$$

于是从式(5.2.17)可得

$$\varphi = f + \lambda\mathbf{K}f + \lambda^2\mathbf{K}^2 f + \cdots + \lambda^n\mathbf{K}^n f + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathbf{K}^n f \tag{5.2.18}$$

上式与式(5.2.7)完全一致. 下面来证明式(5.2.18)确是方程(5.2.16)的解. 为此，首先证明部分和序列$\{\varphi_n\}$是个 Cauchy 序列. 令

$$\varphi_n = \sum_{m=0}^{n}\lambda^m\mathbf{K}^m f$$

设 $u < v$，则有

$$\| \varphi_v - \varphi_u \| = \left\| \sum_{m=u+1}^{v}\lambda^m\mathbf{K}^m f \right\| \leqslant \sum_{m=u+1}^{v} \| \lambda^m\mathbf{K}^m f \| \leqslant \sum_{m=u+1}^{v} \| \lambda^m\mathbf{K}^m \| \cdot \| f \| \tag{5.2.19}$$

利用关系

$$\| \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 f \| = \| \mathbf{K}_1(\mathbf{K}_2 f) \| \leqslant \| \mathbf{K}_1 \| \cdot \| \mathbf{K}_2 f \| \leqslant \| \mathbf{K}_1 \| \cdot \| \mathbf{K}_2 \| \cdot \| f \|$$

有

$$\| \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 \| \leqslant \| \mathbf{K}_1 \| \cdot \| \mathbf{K}_2 \|$$

作用 m 次后取 $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2$，则可推出

$$\| \mathbf{K}^m \| \leqslant \| \mathbf{K} \|^m \tag{5.2.20}$$

代入式(5.2.19)应有

$$\| \varphi_v - \varphi_u \| \leqslant \sum_{m=u+1}^{v}\lambda^m \| \mathbf{K} \|^m \| f \| = \| f \| \cdot \| \lambda\mathbf{K} \|^{u+1}\sum_{m=0}^{v-u-1} \| \lambda\mathbf{K} \|^m \tag{5.2.21}$$

假定 $\| \lambda\mathbf{K} \| < 1$ 则

$$\sum_{m=0}^{v-u-1} \| \lambda\mathbf{K} \|^m \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \| \lambda\mathbf{K} \|^m = \frac{1}{1 - \| \lambda\mathbf{K} \|}$$

代入式(5.2.21)最后得

$$\| \varphi_v - \varphi_u \| \leqslant \| f \| \cdot \| \lambda\mathbf{K} \|^{u+1}(1 - \| \lambda\mathbf{K} \|)^{-1} \tag{5.2.22}$$

故当 $\| \lambda\mathbf{K} \| < 1$ 时，只要 u 足够大，$\| \varphi_v - \varphi_u \|$ 总可任意小，因此$\{\varphi_n\}$是 Cauchy 序列. 因为 B 是 Banach 空间，所以$\{\varphi_n\}$按范数收敛于 B 中的一个元素φ，同样 $\mathbf{K}\varphi_n$ 按范数收敛于 $\mathbf{K}\varphi$

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n - \varphi \| = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \| \mathbf{K}\varphi_n - \mathbf{K}\varphi \| = 0$$

但是

$$\lambda \mathbf{K}\varphi_n = \lambda \mathbf{K}\Big[\sum_{m=0}^{n}(\lambda \mathbf{K})^m f\Big] = \sum_{m=1}^{n+1}(\lambda \mathbf{K})^m f = \sum_{m=0}^{n+1}(\lambda \mathbf{K})^m f - f = \varphi_{n+1} - f$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty} \| \lambda \mathbf{K}\varphi_n - (\varphi_{n+1} - f) \| = 0$$

即

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{K}\varphi$$

故只要满足条件 $\| \lambda \mathbf{K} \| < 1$，式(5.2.18)确是方程(5.2.16)的解. 此外，式(5.2.18)也是方程(5.2.16)的惟一解. 设存在二个解 φ_1 和 φ_2

$$\varphi_1 = f + \lambda \mathbf{K}\varphi_1; \qquad \varphi_2 = f + \lambda \mathbf{K}\varphi_2$$

则

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \lambda \mathbf{K}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

因此

$$\| \varphi_1 - \varphi_2 \| = \| \lambda \mathbf{K}(\varphi_1 - \varphi_2) \| \leqslant \| \lambda \mathbf{K} \| \cdot \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$$

而 $\| \lambda \mathbf{K} \| < 1$ 时，只有 $\| \varphi_1 - \varphi_2 \| = 0$,因此 $\varphi_1 = \varphi_2$. 仍要指出的是并不是说当 $\| \lambda \mathbf{K} \| > 1$ 时级数式(5.2.18)必定发散,式(5.2.18)也是充分条件. 但与 5.2.1 小节相比，这里的结果要广泛得多.

把上述结果用到 $L^2[a,b]$空间上,$\mathbf{K}$ 定义为

$$\mathbf{K}\varphi = \int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y, \qquad \varphi(x) \in L^2[a,b]$$

假定 $k(x,y)$作为 x 和 y 的函数平方可积

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \tag{5.2.23}$$

利用 Schwartz 不等式应有

$$|\mathbf{K}\varphi|^2 = \left[\left|\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y\right|\right]^2 \leqslant \int_a^b |k(x,y)|^2\mathrm{d}y \cdot \int_a^b |\varphi(y)|^2\mathrm{d}y$$

即

$$|\mathbf{K}\varphi|^2 \leqslant \| \varphi \|^2 \int_a^b |k(x,y)|^2\mathrm{d}y$$

因此

$$\| \mathbf{K}\varphi \|^2 = \int_a^b |\mathbf{K}\varphi|^2\mathrm{d}y \leqslant \| \varphi \|^2 \int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.2.24}$$

故当 $k(x,y)$满足式(5.2.23)时，$\mathbf{K}$ 是有界线性算子

$$\| \mathbf{K}\varphi \| \leqslant \sqrt{\int_a^b\int_a^b | k(x,y) |^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \cdot \| \varphi \|$$

因此算子 $\mathbf{K}$ 的范数 $\|\mathbf{K}\|$ 满足

$$\|\mathbf{K}\| \leqslant \sqrt{\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

由 $\|\lambda\mathbf{K}\| < 1$ 得到

$$\lambda < \left[\sqrt{\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right]^{-1} \tag{5.2.25}$$

注意: $\|\mathbf{K}\|$ 是算子 $\mathbf{K}$ 的范数，而

$$\sqrt{\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \equiv \|k(x,y)\|$$

是 k 作为 x 和 y 的二元函数的模.

例 5.2.3 考虑积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^\pi \sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y, \qquad x \in [0,\pi] \tag{5.2.26}$$

积分核 $k(x,y)=\sin(x+y)$. 取 $f(x)=1$, 上式的 Born 级数解为

$$\varphi(x) = 1 + 2\lambda\cos x + \pi\lambda^2\sin x + \cdots \tag{5.2.27}$$

由式(5.2.25)估计上式的收敛条件

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{2}$$

因此,当$|\lambda| < \sqrt{2}/\pi$ 时,式(5.2.27)必定收敛. 另一方面,式(5.2.26)可求严格解,改写成

$$\varphi(x) = 1 + \lambda\sin x\int_0^\pi \cos y\varphi(y)\mathrm{d}y + \lambda\cos x\int_0^\pi \sin y\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.28}$$

令

$$a = \int_0^\pi \cos y\varphi(y)\mathrm{d}y; \qquad b = \int_0^\pi \sin y\varphi(y)\mathrm{d}y$$

方程(5.2.28)两边分别以 $\sin x$ 和 $\cos x$ 相乘并积分可得 a 和 b 满足的代数方程

$$a = \frac{\pi\lambda}{2}b; \qquad b = 2 + \frac{\pi\lambda}{2}a$$

于是解得

$$b = \frac{2}{1-\lambda^2\pi^2/4}; \qquad a = \frac{\pi\lambda}{1-\lambda^2\pi^2/4}$$

把 a 和 b 代入式(5.2.28)可得方程(5.2.26)的严格解为

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\lambda^2\pi}{1-\pi^2\lambda^2/4}\sin x + \frac{2\lambda}{1-\pi^2\lambda^2/4}\cos x \tag{5.2.29}$$

如果把上式展成 λ 的幂级数，收敛半径为

$$|\lambda| < \frac{2}{\pi}$$

由此可见，用式(5.2.25)作收敛性讨论时，只能给出收敛半径的估计．当$|\lambda|=\pm 2/\pi$时，式(5.2.29)已无意义，进一步的讨论见5.2.3小节．顺便指出，$\lambda=0.1$为4.4.2小节中的结果．因此，对本例而言，最速下降法与Born级数给出相同的结果，而且二者均能得出一样的充分条件．

5.2.3　可分核方程和有限秩核近似

5.2.2小节研究了包含小算子的第二类Fredholm积分方程的迭代法，但实际问题不一定满足条件，故有必要发展一种更为普遍适用的方法．本节介绍有限秩技术(亦称可分核近似)．利用这种近似方法，可以把积分方程转化成有限维矩阵(有限秩一词的来源)．

首先考虑具有下列形式核的Fredholm积分方程

$$k(x,y)=p(x)q^*(y) \tag{5.2.30}$$

其中取复共轭是为了讨论的方便．假定$p(x)$和$q(x)$属于$L^2[a,b]$，并且

$$|\lambda|^2\int_a^b\int_a^b|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<1 \tag{5.2.31}$$

由5.2.2小节的结论，Born级数式(5.2.18)收敛，故第二类Fredholm方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.32}$$

有解

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x)+\lambda\int_a^b p(x)q^*(y)f(y)\mathrm{d}y\\&\quad+\lambda^2\int_a^b p(x)q^*(y_1)p(y_1)q^*(y_2)f(y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2+\cdots\end{aligned}$$

令

$$(q,p)=\int_a^b q^*(y)p(y)\mathrm{d}y$$

则

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x)+\lambda p(x)(q,f)+\lambda^2p(x)(q,p)(q,f)+\cdots\\&=f(x)+\lambda p(x)(q,f)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(q,p)^n\end{aligned} \tag{5.2.33}$$

另一方面，由条件式(5.2.31)可证明

$$|\lambda(q,p)|<1 \tag{5.2.34}$$

事实上，由Schwartz不等式及式(5.2.31)

$$|(q,p)|\leqslant\sqrt{(q,q)(p,p)}=\sqrt{\int_a^b\int_a^b|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}<\frac{1}{|\lambda|}$$

故有

$$|\lambda(q,p)| \leqslant |\lambda| \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} < 1$$

于是，级数式(5.2.33)是一等比级数，立即可求得

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \frac{(q,f)}{1-\lambda(q,p)} p(x) \tag{5.2.35}$$

因此在假定式(5.2.31)下，我们从 Born 级数求得了解式(5.2.35). 事实上，只要 $1-\lambda(q,p)\neq 0$，上式总是式(5.2.30)和(5.2.32)的解，而无需加限制条件式(5.2.31). 又一次表明了式(5.2.31)的充分性，而非必要. 证明如下：把方程(5.2.32)写成形式

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b p(x) q^*(y) \varphi(y) \mathrm{d}y = f(x) + \lambda p(x)(q,\varphi) \tag{5.2.36}$$

用 q^* 对上式两边求内积

$$(q,\varphi) = (q,f) + \lambda(q,p)(q,\varphi)$$

即

$$(q,\varphi)[1-\lambda(q,p)] = (q,f)$$

当 $1-\lambda(q,p)\neq 0$

$$(q,\varphi) = \frac{(q,f)}{1-\lambda(q,p)}$$

代入式(5.2.36)即得式(5.2.35). 下面讨论 $1-\lambda(q,p)=0$ 情形，由式(5.2.34)知，这恰好是级数式(5.2.33)收敛区域的边界. 为了进一步考察其原因，考虑齐次方程

$$\varphi = \lambda p(x)(q,\varphi) \tag{5.2.37}$$

两边用 q^* 取内积

$$(q,\varphi) = \lambda(q,p)(q,\varphi)$$

显然，当且仅当 $\lambda(q,p)=1$，式(5.2.37)才有非零解，这时 (q,φ) 可为任意常数，因此式(5.2.37)有解

$$\varphi = Cp(x), \text{当 } \lambda(q,p) = 1 \tag{5.2.38}$$

其中 C 为任意常数. 由此可见，当齐次方程(5.2.37)有非零解时，非齐次方程的解式(5.2.35)不成立. 这时，由式(5.2.35)应有

$$(q,f) = 0 \tag{5.2.39}$$

即要求 q 与 f 正交. 当上式满足时，式(5.2.32)的解为

$$\varphi(x) = f(x) + Bp(x) \tag{5.2.40}$$

其中 B 为任意常数.

为了进一步考察正交性条件式(5.2.39). 考虑 **K** 的**共轭算子** $\mathbf{K}^+$，与第二章微分算子一样，$\mathbf{K}^+$ 定义为

$$(\mathbf{K}\varphi,\psi)=(\varphi,\mathbf{K}^{+}\psi) \tag{5.2.41}$$

其中假定 $\mathbf{K}$ 是作用在 $L^2[a,b]$上的算子，而 φ 和 ψ 为 $L^2[a,b]$中的任意元素，因

$$\begin{aligned}(\mathbf{K}\varphi,\psi)&=\int_a^b\left[\int_a^b k^*(x,y)\varphi^*(y)\mathrm{d}y\right]\psi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\varphi^*(x)\left[\int_a^b k^*(y,x)\psi(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

而

$$(\varphi,\mathbf{K}^{+}\psi)=\int_a^b\varphi^*(x)\left[\int_a^b k^{+}(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

由式(5.2.41)

$$\int_a^b\varphi^*(x)\int_a^b[k^{+}(x,y)-k^*(y,x)]\psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=0$$

从 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$的任意性，可推得共轭算子 $\mathbf{K}^{+}$ 的核

$$k^{+}(x,y)=k^*(y,x) \tag{5.2.42}$$

对式(5.2.30)，显然 $k^{+}(x,y)=q(x)p^*(y)$，$\mathbf{K}$ 的共轭齐次方程为

$$\psi=\eta\mathbf{K}^{+}\psi \tag{5.2.43}$$

即

$$\psi=\eta q(p,\psi) \tag{5.2.44}$$

两边用 p^* 取内积

$$(p,\psi)=\eta(p,q)(p,\psi)$$

故只有当 $\eta(p,q)=1$ 时，式(5.2.43)才有非零解

$$\psi(x)=Dq(x),\ \text{当}\ \eta(p,q)=1$$

因此，正交性条件式(5.2.39)可叙述成：f 与共轭齐次方程(5.2.43)的非零解正交.

综合上面的讨论，可以得出结论：

(1) 当$(p,q)\neq1$ 时，齐次方程(5.2.37)只有零解，式(5.2.32)有惟一解式(5.2.35)；

(2) 当$(p,q)=1$ 时，式(5.2.32)有解的条件是，f 与齐次共轭方程(5.2.43)的非零解正交，且解为

$$\varphi(x)=f(x)+Ap(x)$$

其中 $p(x)$为齐次方程(5.2.37)的非零解.

进一步考虑具有下列积分核的积分算子 $\mathbf{K}_N$

$$\mathbf{K}_N(x,y)=\sum_{n=1}^{N}p_n(x)q_n^*(y) \tag{5.2.45}$$

设 $\mathbf{K}_N$ 作用在$L^2[a,b]$. 共轭算子 $\mathbf{K}_N^{+}$ 具有核

$$k_N^+(x,y) = k_N^*(y,x) = \sum_{n=1}^{N} q_n(x)p_n^*(y) \tag{5.2.46}$$

由以上讨论的启示，我们同时考虑两个方程

$$\varphi = \lambda \mathbf{K}_N\varphi + f \tag{5.2.47}$$

及共轭齐次方程

$$\psi = \lambda^* \mathbf{K}_N^+\psi \tag{5.2.48}$$

上两式可写成

$$\varphi = f + \lambda\sum_{n=1}^{N} p_n(q_n,\varphi); \qquad \psi = \lambda^*\sum_{n=1}^{N} q_n(p_n,\psi) \tag{5.2.49}$$

为了求解(5.2.49)第一式，只要求得常数集合 $a_n \equiv (q_n, \varphi)$即可. 用 q_m^* 取(5.2.49)第一式两边的内积

$$(q_m,\varphi) = (q_m,f) + \lambda\sum_{n=1}^{N}(q_m,p_n)(q_n,\varphi) \tag{5.2.50}$$

令 $a_{mn} = (q_m, p_n)$和 $b_m = (q_m, f)$，上式变成

$$a_m - \lambda\sum_{n=1}^{N} a_{mn}a_n = b_m, \qquad (m = 1,2,\cdots,N) \tag{5.2.51}$$

用矩阵表示，可写成

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A})\mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{5.2.52}$$

其中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵，$[\mathbf{A}]_{mn} = a_{mn}$，$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为列矢量. 类似地，设 $\tilde{a}_n = (p_n, \psi)$，则齐次共轭方程(5.2.49)第二式变成

$$\tilde{a}_m - \lambda^*\sum_{n=1}^{N}(p_m,q_n)(p_n,\psi) = 0 \tag{5.2.53}$$

利用$(p_m, q_n) = (q_n, p_m)^* = a_{nm}^*$，上式变成

$$\tilde{a}_m - \lambda^*\sum_{n=1}^{N} a_{nm}^*\tilde{a}_n = 0 \tag{5.2.54}$$

写成矩阵的形式

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A})^+\tilde{\mathbf{a}} = 0 \tag{5.2.55}$$

其中$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A})^+$为$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A})$的转置共轭矩阵

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A})^+ = \overline{(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A})^*} \tag{5.2.56}$$

因此，我们把积分方程(5.2.47)和(5.2.48)的讨论转化成二个代数方程(5.2.52)及(5.2.55). 由线性代数知道，当且仅当对于齐次共轭方程(5.2.55)的所有非零解 $\tilde{\mathbf{a}}$ 与 $\mathbf{b}$ 正交

$$(\mathbf{b},\tilde{\mathbf{a}}) = 0 \tag{5.2.57}$$

亦即

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^*\tilde{a}_n = 0 \tag{5.2.58}$$

方程(5.2.52)才有解，相应地(5.2.49)第一式也仅在此条件下有解．由 $\tilde{a}_n$ 和 b_n 的定义，上式即为

$$\sum_{n=1}^{N}(q_n,f)^*(p_n,\psi) = \sum_{n=1}^{N}(f,q_n)(p_n,\psi) = 0 \tag{5.2.59}$$

利用 $\mathbf{K}_N^+$ 的定义式(5.2.46)，上式即为

$$(f,\mathbf{K}_N^+\psi) = 0 \tag{5.2.60}$$

假如 $\psi\neq 0$，由式(5.2.48)，上式变成

$$(f,\psi) = 0 \tag{5.2.61}$$

即如果 f 与共轭方程(5.2.48)的所有非零解 ψ 正交，那么式(5.2.47)的解存在．当式(5.2.48)只有零解 $\psi\equiv 0$，上式恒成立．于是式(5.2.47)的解总存在且惟一．从式(5.2.52)和(5.2.55)也可看出：如果共轭方程(5.2.55)只有零解，则逆矩阵 $(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}$存在，于是式(5.2.52)有惟一解

$$\mathbf{a} = (\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \tag{5.2.62}$$

总结上述讨论，我们可以得到下列定理，即所谓 **Fredholm 择一定理**

(1) 假如 $\mathbf{K}_N$ 是有限秩线性算子，而 ψ_i 满足齐次共轭方程

$$\lambda^*\mathbf{K}_N^+\psi_i = \psi_i \tag{5.2.63}$$

那么当且仅当对于所有 $i,(f,\psi_i)=0$ 时方程

$$\varphi = f + \lambda\mathbf{K}_N\varphi \tag{5.2.64}$$

才有解．如果齐次共轭方程只有零解，那么非齐次方程的解存在且惟一．

(2) 假如 $\mathbf{K}_N$ 是有限秩线性算子，那么当且仅当对齐次方程

$$\lambda\mathbf{K}_N\varphi_i = \varphi_i \tag{5.2.65}$$

的任何非零解 $\varphi_i,(g,\varphi_i)=0$ 时，方程

$$\psi = g + \lambda^*\mathbf{K}_N^+\psi \tag{5.2.66}$$

才有解．假如 $\varphi_i\equiv 0$,那么 ψ 惟一．

(3) 方程

$$\lambda\mathbf{K}_N\varphi_i = \varphi_i \qquad \text{和} \qquad \lambda^*\mathbf{K}_N^+\psi_i = \psi_i$$

有相同数目的线性独立解．

上述定理的(2)和(3)部分是不难证明的．下面考察式(5.2.64)的可解性与 $\mathbf{K}_N$ 的本征值的关系．$\mathbf{K}_N$ 的本征方程

$$\varphi_i = \lambda_i\mathbf{K}_N\varphi_i \tag{5.2.67}$$

可化成

$$(\mathbf{I}-\lambda_i\mathbf{A})\mathbf{a} = 0 \tag{5.2.68}$$

于是本征值 λ_i 满足下列行列式方程

$$\det[\mathbf{I}-\lambda_i\mathbf{A}] = 0 \tag{5.2.69}$$

比较上式与式(5.2.62)可知：当 λ 不等于本征值 λ_i 时，$(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})$是满秩矩阵，故 $(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}$存在，于是方程(5.2.52)的解存在且惟一. 当 λ 等于某一本征值 λ_i 时，$(\mathbf{I}-\lambda_i\mathbf{A})^{-1}$不存在，方程(5.2.52)有解的条件即为方程(5.2.58). 这个结果与 Fredholm 择一定理是不矛盾的.

假定方程(5.2.64)有惟一解，则 $\mathbf{a}=(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$，亦即

$$a_n \equiv (q_n,\varphi)=\sum_{m=1}^{N}[(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}]_{nm}b_m=\sum_{m=1}^{N}[(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}]_{nm}(q_m,f)$$

代入方程(5.2.49)得

$$\varphi = f+\lambda\sum_{m,n=1}^{N}p_n[(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}]_{nm}(q_m,f) \tag{5.2.70}$$

上式即为所求之解. 故求解积分方程(5.2.47)归结为计算一个给定矩阵的逆. 上式写成形式

$$\varphi=(\mathbf{I}+\lambda\mathbf{R}_N)f \tag{5.2.71}$$

其中

$$\mathbf{R}_N \equiv \sum_{m,n=1}^{N}[(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}]_{nm}p_nq_m^* \tag{5.2.72}$$

称为算子 $\mathbf{K}_N$ 的**预解算子**. 可以证明$(\mathbf{I}+\lambda\mathbf{R}_N)=(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K}_N)^{-1}$，因此$(\mathbf{I}+\lambda\mathbf{R}_N)$确实是$(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K}_N)$的逆算子.

最后指出，$L^2[a,b]$ 中任一积分算子 $\mathbf{K}$ 的核 $k(x,y)$，如果它是平方可积的，则可以用一个有限秩的线性算子 $\mathbf{K}_N$ 按范数来任意逼近. 最简单的逼近方式是多项式逼近

$$k_N(x,y)=\sum_{n,m=1}^{N}A_{nm}x^ny^m \tag{5.2.73}$$

根据第二章的讨论，$\{x^ny^m\}$ 构成完备系，故

$$\lim_{N\to\infty}\|k(x,y)-k_N(x,y)\|=0$$

因此可以作适当的切断近似，来求解平方可积核积分方程的近似解. 设 $k(x,y)$平方可积，则总可取形式

$$k(x,y)=k_N(x,y)+\Delta k(x,y) \tag{5.2.74}$$

其中 $k_N(x,y)$是有限秩的，而 $\Delta k(x,y)$是逼近中的误差. 当 N 取足够大时，由 Bessel 不等式知，$\Delta k(x,y)$可任意小，于是 $\Delta k(x,y)$可作为小算子来处理. 因此可以把有限秩近似与小算子迭代法结合起来，求积分方程的近似解，并利用这种方法来讨论解的性质. 这将是 5.3 节的任务之一. 当然，也可用其他近似方法把核作有限秩近似，例如，熟知的 Taylor 展开法.

例 5.2.4 考虑定义在[0,1/2]区间上的积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^{1/2}\sin(xy)\varphi(y)\mathrm{d}y+f(x) \tag{5.2.75}$$

把 $\sin(xy)$ 展成级数

$$\sin(xy)=xy-\frac{x^3y^3}{6}+\frac{x^5y^5}{120}-\cdots \tag{5.2.76}$$

在 $[0,1/2]$ 内上述级数收敛很快，故取前几项即可．于是得到可分核近似方程

$$\varphi(x)-\int_0^{1/2}\left(xy-\frac{1}{6}x^3y^3\right)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x) \tag{5.2.77}$$

设解的形式为

$$\varphi(x)=Ax+Bx^3+f(x) \tag{5.2.78}$$

代入式(5.2.77)得

$$Ax+Bx^3-f_1x-f_2x^3-\frac{1}{24}Ax-\frac{1}{160}Bx+\frac{1}{960}Ax^3+\frac{1}{5376}Bx^3=0 \tag{5.2.79}$$

其中

$$f_1=\int_0^{1/2}yf(y)\mathrm{d}y;\qquad f_2=-\frac{1}{6}\int_0^{1/2}y^3f(y)\mathrm{d}y$$

由式(5.2.79)

$$\frac{23}{24}A-\frac{1}{160}B=f_1;\qquad \frac{1}{960}A+\left(1+\frac{1}{5376}\right)B=f_2$$

解此方程得

$$A=1.043277\left(\frac{5377}{5376}f_1+\frac{1}{160}f_2\right);\qquad B=1.043277\left(-\frac{1}{960}f_1+\frac{23}{24}f_2\right)$$

因而可求得方程的近似解．对这种近似方法作误差估计较为复杂，故略去．

例 5.2.5 考虑方程(5.2.26)，$k(x,y)$ 是实对称的 $k^+(x,y)=\sin(x+y)$．因此共轭本征方程为

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}\sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

上式改写成

$$\varphi(x)=\lambda\sin x\int_0^{\pi}\cos y\varphi(y)\mathrm{d}y+\lambda\cos x\int_0^{\pi}\sin y\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2.80}$$

令

$$a=\int_0^{\pi}\cos y\varphi(y)\mathrm{d}y;\qquad b=\int_0^{\pi}\sin y\varphi(y)\mathrm{d}y$$

式(5.2.80)两边分别以 $\sin x$ 和 $\cos x$ 相乘并积分得到 a 和 b 满足的方程

$$a=\frac{\pi\lambda}{2}b;\qquad b=\frac{\pi\lambda}{2}a$$

于是

$$\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2 = 1$$

因此得到两个本征值 $\lambda_{1,2} = \pm 2/\pi$，以及 $a = \pm b$. 相应的本征函数分别为

$$\varphi_+(x) = \frac{2a}{\pi}(\sin x + \cos x); \qquad \varphi_+(x) = \frac{2a}{\pi}(\sin x - \cos x);$$

其中常数 a 可由归一化条件决定. 最后得到

$$\varphi_+(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \qquad \varphi_-(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

当 $\lambda = \lambda_{1,2}$时，方程(5.2.26)有解的条件是 $f(x)$与本征函数正交，并且解为

$$\varphi(x) = f(x) + C_1\varphi_+(x) + C_2\varphi_-(x).$$

5.2.4 非线性积分方程的迭代法

对非线性积分方程，问题要复杂得多. 下面主要讨论迭代法，为此首先介绍压缩算子的概念. 设 $\mathbf{T}$ 作用在 $L^2[a,b]$上，如果存在一个 $\alpha<1$ 且 $\alpha>0$，使对所有属于 $L^2[a,b]$的函数 φ_1 和 φ_2 都有

$$\|\mathbf{T}\varphi_1 - \mathbf{T}\varphi_2\| \leqslant \alpha\|\varphi_1 - \varphi_2\| \tag{5.2.81}$$

则称 $\mathbf{T}$ 为一个**压缩算子**. 对压缩算子 $\mathbf{T}$ 存在定理: 如果 $\mathbf{T}$ 是 $L^2[a,b]$上的压缩算子，则方程

$$\mathbf{T}\varphi = \varphi \tag{5.2.82}$$

有惟一解，此解称为 $\mathbf{T}$ 的**不动点**.

证明:(1) 惟一性，设存在两个解 φ_1 和 φ_2

$$\mathbf{T}\varphi_1 = \varphi_1; \qquad \mathbf{T}\varphi_2 = \varphi_2$$

则

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \|\mathbf{T}\varphi_1 - \mathbf{T}\varphi_2\| \leqslant \alpha\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

即 $(1-\alpha)\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant 0$，而 $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \geqslant 0, \alpha < 1$，故只有 $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0$，即 $\varphi_1 = \varphi_2$;

(2) 存在性,利用迭代法求解

$$\varphi_{n+1} = \mathbf{T}\varphi_n \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{5.2.83}$$

下面证明上式收敛到方程(5.2.82). 事实上

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| = \|\mathbf{T}\varphi_n - \mathbf{T}\varphi_{n-1}\| \leqslant \alpha\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \tag{5.2.84}$$

递推 n 次后

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leqslant \alpha^n\|\varphi_1 - \varphi_0\|$$

利用上式，设 $n>m$ 则有

$$\begin{aligned}\|\varphi_n - \varphi_m\| &= \|(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \cdots + (\varphi_{m+1} - \varphi_m)\| \\ &\leqslant \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| + \cdots + \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\|\end{aligned}$$

$$\leqslant(\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha^{m})\|\varphi_1-\varphi_0\|$$
$$\leqslant(\alpha^{m}+\alpha^{m+2}+\cdots)\|\varphi_1-\varphi_0\|$$

即

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|\varphi_1-\varphi_0\|$$

故有 $\lim\|\varphi_n-\varphi_m\|=0(n,m\to\infty)$，即序列$\{\varphi_n\}$是一个 Cauchy 序列，它收敛到 $L^2[a,b]$中一个元素 φ

$$\mathbf{T}\varphi=\mathbf{T}[\lim_{n\to\infty}\varphi_n]=\lim_{n\to\infty}(\mathbf{T}\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}=\varphi$$

因此，由式(5.2.83)得到的序列$\{\varphi_n\}$确实收敛到方程(5.2.82)的解.

利用上述结果，我们来考虑方程

$$\varphi=f+\lambda\mathbf{K}\varphi \tag{5.2.85}$$

其中 **K** 不一定是线性算子,$f\in L^2[a,b]$．设 **K** 满足:

(1) 有界，即$\|\mathbf{K}\varphi\|\leqslant M<\infty$($\varphi$ 为任一$L^2[a,b]$中函数);

(2) 满足条件

$$\|\mathbf{K}\varphi_1-\mathbf{K}\varphi_2\|\leqslant N\|\varphi_1-\varphi_2\|\qquad(0<N<\infty) \tag{5.2.86}$$

于是有定理：只要 λ 足够小，对所有 $f\in L^2[a,b]$，方程(5.2.85)有解. 注意，当 **K** 是线性算子时，式(5.2.86)等价于有界. 但当 **K** 是非线性算子时，式(5.2.86)是一个外加条件. 为证明上述定理，令 **T** 算子如下

$$\mathbf{T}\varphi\equiv f+\lambda\mathbf{K}\varphi \tag{5.2.87}$$

方程(5.2.85)可写成式(5.2.82)的形式，因此，只要证明 **T** 是压缩算子即可. 由于

$$\|\mathbf{T}\varphi_1-\mathbf{T}\varphi_2\|=|\lambda|\cdot\|\mathbf{K}\varphi_1-\mathbf{K}\varphi_2\|\leqslant|\lambda|N\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

因此，当$|\lambda|N<1$时,**T** 是压缩算子，故得证. 而且方程(5.2.85)可用迭代法求解.

例 5.2.6　考虑非线性积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k[x,y,\varphi(y)]\mathrm{d}y \tag{5.2.88}$$

设有条件

(1) $\left\|\int_a^b k[x,y,\varphi(y)]\mathrm{d}y\right\|\leqslant M\|\varphi(y)\|$;

(2) $|k(x,y,z_1)-k(x,y,z_2)|\leqslant N(x,y)|z_1-z_2|$;

(3) $\int_a^b|N(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=P^2<\infty$;

则对所有 $f\in L^2[a,b]$，如果$|\lambda|P<1$,方程(5.2.88)有惟一解 $\varphi\in L^2[a,b]$.

证明：考虑 $\mathbf{T}\varphi\equiv f+\lambda\mathbf{K}\varphi$，只要证明 **T** 是压缩算子即可. 由于

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}\varphi_1-\mathbf{T}\varphi_2\| &= |\lambda|\cdot\left\|\int_a^b\{k[x,y,\varphi_1(y)]-k[x,y,\varphi_2(y)]\}\mathrm{d}y\right\| \\ &\leqslant |\lambda|\cdot\left\{\int_a^b\left[\int_a^b|k[x,y,\varphi_1(y)]-k[x,y,\varphi_2(y)]|\,\mathrm{d}y\right]^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2} \\ &\leqslant |\lambda|\cdot\left\{\int_a^b\left[\int_a^b N(x,y)|\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|\mathrm{d}y\right]^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2} \\ &\leqslant |\lambda|\cdot P\|\varphi_1-\varphi_2\|\end{aligned}$$

当 $|\lambda|P<1$ 时，$\mathbf{T}$ 是压缩算子，故 $\mathbf{T}\varphi=\varphi$ 有惟一解，即方程(5.2.88)有惟一解.

5.3　$L^2[a,b]$空间中的积分方程

5.2 节阐述了解第二类 Fredholm 积分方程的两个基本技术，即小算子迭代法和有限秩近似. 本节讨论把这两种技术结合起来，求解具有平方可积核的第二类 Fredholm 积分方程，特别是 Hermite 对称的平方可积核，将讨论其本征值问题的一般性质和展开定理，以及 Fredholm 择一定理.

5.3.1　Hermite 对称的平方可积核

首先给出积分算子 Hermite 对称的定义. 根据 5.2 节式(5.2.41)，作用在 $L^2[a,b]$上的积分算子 $\mathbf{K}$ 的共轭算子 $\mathbf{K}^+$ 定义为

$$(\mathbf{K}\varphi,\psi)=(\varphi,\mathbf{K}^+\psi) \tag{5.3.1}$$

用积分核来表示，由式(5.2.42)

$$k^+(x,y)=k^*(y,x) \tag{5.3.2}$$

如果 $\mathbf{K}=\mathbf{K}^+$，即 $k^*(y,x)=k(x,y)$称 $\mathbf{K}$ 是 **Hermite 对称的积分算子**

$$(\mathbf{K}\varphi,\psi)=(\varphi,\mathbf{K}\psi) \tag{5.3.3}$$

当

$$k^*(y,x)=k(x,y)=k(y,x)$$

称 $\mathbf{K}$ 实对称. 对具有式(5.3.2)的 Hermite 算子，讨论其本征值问题

$$\mathbf{K}\varphi=\mu\varphi \tag{5.3.4}$$

与第二章一样，我们有结论：

(1) Hermite 算子的本征值 μ 都是实数；

(2) 对应不同本征值的本征函数彼此正交.

证明：用 φ 取方程(5.3.4)的左及右内积

$$(\varphi,\mathbf{K}\varphi)=(\varphi,\mu\varphi)=\mu(\varphi,\varphi)$$
$$(\mathbf{K}\varphi,\varphi)=(\mu\varphi,\varphi)=\mu^*(\varphi,\varphi)$$

而由式(5.3.3)，得 $\mu=\mu^*$，即 μ 是实数. 其次，设 μ_1 和 μ_2 是 $\mathbf{K}$ 的不同本征值，

对应的本征函数分别是 φ_1 和 φ_2，则

$$\mathbf{K}\varphi_1 = \mu_1\varphi_1; \qquad \mathbf{K}\varphi_2 = \mu_2\varphi_2$$

于是

$$(\mathbf{K}\varphi_1,\varphi_2) = \mu_1^*(\varphi_1,\varphi_2) = \mu_1(\varphi_1,\varphi_2)$$

$$(\varphi_1,\mathbf{K}\varphi_2) = \mu_2(\varphi_1,\varphi_2)$$

而由式(5.3.3)，得$(\mu_1-\mu_2)(\varphi_1,\varphi_2)=0$，又 $\mu_1\neq\mu_2$，因此$(\varphi_1,\varphi_2)=0$，即 φ_1 和 φ_2 正交.

如果 $\mathbf{K}$ 是 Hermite 算子且积分核 $k(x,y)$平方可积，则对本征值和本征函数有下列定理(证明较复杂，故略去)：

(1) $\mathbf{K}$ 的本征值可排成形式

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \cdots \tag{5.3.5}$$

且当 $n\to\infty$，$\mu_n\to 0$，其中非零本征值的重数有限，而零本征值的重数可能为无限. 例如，当 $\mathbf{K}$ 是有限秩积分算子时，$\mathbf{K}_N$ 的本征值至多只有 N 个非零，而其他都可以看作零本征值，故零本征值的重数为无限.

(2) $\mathbf{K}$ 的本征函数系$\{\varphi_n\}$不一定构成 $L^2[a,b]$上的完备集，但对形如 $\varphi=\mathbf{K}g, g\in L^2[a,b]$的函数，可以将 φ 展成$\{\varphi_n\}$的 Fourier 级数

$$\varphi \cong \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n,\varphi)\varphi_n \tag{5.3.6}$$

例如，当 $\mathbf{K}$ 是有限秩算子 $\mathbf{K}_N$，$\{\varphi_n\}$只有 N 个，不足以构成 $L^2[a,b]$上的完备集. 但如果 $\mathbf{K}$ 有无穷多个非零本征值，则$\{\varphi_n\}$构成 $L^2[a,b]$上的完备集.

设 $k(x,y)$有无穷多个非零本征值，由于 $k(x,y)$平方可积

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,y)^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$$

故 $k(x,y)$作为 x 的函数可作展开

$$k(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(y)\varphi_n(x) \tag{5.3.7}$$

而 $\psi_n(y)$又可进一步用$\{\varphi_n^*(y)\}$作展开，因此

$$k(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}\varphi_m^*(y)\varphi_n(x) \tag{5.3.8}$$

为了求 a_{mn}，分别以 $\varphi_m^*(x)$和 $\varphi_n(y)$乘上式并积分得

$$a_{mn} = \int_a^b\int_a^b k(x,y)\varphi_m^*(x)\varphi_n(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.9}$$

而 $\varphi_m(x)$是 $\mathbf{K}$ 的本征函数

$$\int_a^b k(x,y)\varphi_n(y)\mathrm{d}y = \mu_n\varphi_n(x) \tag{5.3.10}$$

代入式(5.3.9)得

$$a_{mn} = \int_a^b \varphi_m^*(x)\mathrm{d}x\int_a^b k(x,y)\varphi_n(y)\mathrm{d}y = \mu_n\int_a^b \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \mu_n\delta_{mn}$$

于是式 (5.3.8)变成

$$k(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\varphi_n(x)\varphi_n^*(y) \tag{5.3.11}$$

上式在平均收敛意义下成立. 下面来推出几个有用的关系式，由上式

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n,m=1}^{\infty}\mu_n\mu_m^*\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m^*(y)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\varphi_n^*(y)\varphi_m(y)\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{n,m=1}^{\infty}\mu_n\mu_m^*\delta_{nm}\delta_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2$$

即

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 \tag{5.3.12}$$

如果最大本征值 μ_1 远大于其他本征值，可用下式来估计最大本征值的下限

$$\mu_1 \leqslant \sqrt{\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{5.3.13}$$

式(5.3.11)中令 $x=y$，并积分得

$$\int_a^b k(x,x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n \tag{5.3.14}$$

如果 μ_n 全部大于零，可得近似

$$\mu_1 \leqslant \int_a^b k(x,x)\mathrm{d}x. \tag{5.3.15}$$

例 5.3.1 考虑实对称核

$$k(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1 \\ y(1-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \tag{5.3.16}$$

显然上式平方可积. 考虑本征方程

$$\int_0^1 k(x,y)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \mu_n\varphi_n(x) \tag{5.3.17}$$

上式等价于本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_n}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{\mu_n}\varphi_n = 0; \qquad \varphi_n|_{x=0} = \varphi_n|_{x=1} = 0 \tag{5.3.18}$$

故本征值为 $\mu_n = 1/n^2\pi^2(n=1,2,\cdots)$，而相应的本征函数为 $\varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x$. 显然，$\{\varphi_n\}$构成 $L^2[0,1]$上的完备系. 从式(5.3.14)，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = \int_0^1 k(x,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \tag{5.3.19}$$

故得和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{5.3.20}$$

而从式(5.3.12)

$$\int_0^1\int_0^1 |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4}$$

故得和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{5.3.21}$$

从式(5.3.13)和(5.3.15)还可估计最大的本征值. 由式(5.3.15)

$$\mu_1 \leqslant \int_0^1 k(x,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6} = 0.1667 \tag{5.3.22}$$

而由式(5.3.13)

$$\mu_1^2 \leqslant \int_0^1\int_0^1 |k(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{90} \tag{5.3.23}$$

故得 $\mu_1 \leqslant 0.1054$，精确值 $\mu_1 = 1/\pi^2 = 0.1013$. 可见用式(5.3.13)可得较好的近似.

例 5.3.2　考虑一阶 Bessel 方程的本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{1}{x}u = \lambda x u, \qquad x \in (0,1)$$

$$u|_{x=0} < \infty; \qquad u|_{x=1} = 0 \tag{5.3.24}$$

由方程(3.2.82)得 Green 函数为

$$G(x,y) = \frac{1}{2}\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{y} - y\right), & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ y\left(\dfrac{1}{x} - x\right), & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.3.25}$$

本征值问题式(5.3.24)化成积分方程

$$u(x) = \lambda \int_0^1 yG(x,y)u(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.26}$$

令 $k(x,y) = \sqrt{xy}G(x,y)$, $\varphi(x) = \sqrt{x}u(x)$，上式变成对称核的积分方程

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.27}$$

因此，本征函数为 $\varphi_n = \sqrt{x}J_1(\sqrt{\lambda_n}x)$，而相应的本征值 $\mu_n = 1/\lambda_n$ 由一阶 Bessel 函数的零点决定 $J_1(\sqrt{\lambda_n}) = 0$. $\{\sqrt{x}J_1(\sqrt{\lambda_n}x)\}$ 构成完备的正交系，又因 $\lambda_n \to \infty$ $(n\to\infty)$，故 $\mu_n \to 0(n\to\infty)$.

例 5.3.3　考虑积分核

$$k(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx\sin ny,\qquad x\in[0,\pi]\tag{5.3.28}$$

显然 $k(x,y)$实对称，又

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{nm}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\sin mx\sin ny\sin my\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^3}{12}<\infty\tag{5.3.29}$$

故 $k(x,y)$平方可积，$k(x,y)$的本征函数为 $\varphi_n(x)=\sqrt{2/\pi}\sin nx$，相应的本征值为 $\mu_n=1/n(n=1,2,\cdots)$.

例 5.3.4 考虑积分核，$|h|<1$

$$k(x,y)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-h^2}{1-2h\cos(x-y)+h^2},\qquad x\in[0,2\pi]\tag{5.3.30}$$

因为

$$k(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}h^n\cos n(x-y)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}h^n(\cos nx\cos ny+\sin nx\sin ny)\right]$$

于是立即可推出 **K** 的本征值为 1 和 h^n，相应的本征函数为

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}};\qquad\sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin nx;\qquad\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos nx$$

显然 h^n 是二重简并的.

例 5.3.5 积分核

$$k(x,y)=\begin{cases}\sin x\cos y, & 0<x\leqslant y<\pi\\ \sin y\cos x, & 0<y\leqslant x<\pi\end{cases}$$

考虑本征方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y,\qquad x\in[0,\pi]$$

上式写成

$$\varphi(x)=\lambda\cos x\int_0^{x}\sin y\varphi(y)\mathrm{d}y+\lambda\sin x\int_x^{\pi}\cos y\varphi(y)\mathrm{d}y$$

两边对 x 求导

$$\varphi'(x)=-\lambda\sin x\int_0^{x}\sin y\varphi(y)\mathrm{d}y+\lambda\cos x\int_x^{\pi}\cos y\varphi(y)\mathrm{d}y$$

$$\varphi''(x)=-\lambda\cos x\int_0^{x}\sin y\varphi(y)\mathrm{d}y-\lambda\sin x\int_x^{\pi}\cos y\varphi(y)\mathrm{d}y-\lambda\varphi(x)$$

于是本征函数满足常微分方程

$$\varphi''(x)+(1+\lambda)\varphi(x)=0$$

以及边界条件 $\varphi(0)=\varphi'(\pi)=0$. 因此本征函数和相应的本征值为

$$\varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x;\qquad \lambda_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-1;\qquad k=1,2,\cdots \tag{5.3.31}$$

而由式(5.3.11)得到积分核的 Fourier 级数展开

$$k(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)y}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-1}$$

可以证明 Hermite 对称的积分核至少有一个本征值. 但对非对称的核，本征值不一定存在.

例 5.3.6　积分核 $k(x,y)=(4x-3)y^2$，显然它是不对称的. 考虑本征方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1(4x-3)y^2\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.32}$$

令解具有形式 $\varphi(x)=k(4x-3)$,代入上式得到

$$\varphi(x)=\lambda k(4x-3)\int_0^1(4y^3-3y^2)\mathrm{d}y=0$$

因此式(5.3.32)只有零解,故不存在非零本征函数.

例 5.3.7　积分核 $k(x,y)=\sin\pi x\cos\pi y,x,y\in[0,1]$ 显然它是不对称的. 考虑本征方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1\sin\pi x\cos\pi y\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.3.33}$$

令解具有形式 $\varphi(x)=c\sin\pi x$,代入式(5.3.33)得到

$$\varphi(x)=\lambda c\sin\pi x\int_0^1\sin\pi y\cos\pi y\mathrm{d}y=0$$

因此方程(5.3.33)只有零解,故不存在非零本征函数.

5.3.2　第二类 Fredholm 积分方程及微扰论

设 $k(x,y)$平方可积且 Hermite 对称，考虑具有这种核的第二类 Fredholm 积分方程

$$\varphi=f+\lambda\mathbf{K}\varphi \tag{5.3.34}$$

由于 $\mathbf{K}$ 是 Hermite 算子且积分核平方可积，故存在完备的正交归一集$\{\varphi_n\}$及相应的本征值$\{\mu_n\}$(设非零本征值有无穷多个)

$$\mathbf{K}\varphi_n=\mu_n\varphi_n \tag{5.3.35}$$

于是可把 φ 及 f 展成 Fourier 级数

$$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n;\qquad f=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n,f)\varphi_n \tag{5.3.36}$$

代入式(5.3.34)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, f) \varphi_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{K} \varphi_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, f) \varphi_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n \varphi_n$$

即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\varphi_n, f) + (\lambda\mu_n - 1) a_n] \varphi_n = 0 \tag{5.3.37}$$

于是有

$$(\varphi_n, f) + (\lambda\mu_n - 1) a_n = 0. \tag{5.3.38}$$

分两种情况讨论上式：

(1) $\lambda\mu_n \neq 1 (n = 1, 2, \cdots)$，这时

$$a_n = \frac{1}{1 - \lambda\mu_n} (\varphi_n, f) = (\varphi_n, f) + \frac{\lambda\mu_n}{1 - \lambda\mu_n} (\varphi_n, f)$$

于是式(5.3.34)的解为

$$\varphi = f + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{1 - \lambda\mu_n} (\varphi_n, f) \varphi_n \tag{5.3.39}$$

上式可写成预解算子的形式

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{R} f \tag{5.3.40}$$

其中 **R** 定义为算子

$$\mathbf{R} f \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{1 - \lambda\mu_n} (\varphi_n, f) \tag{5.3.41}$$

因此，当 $\lambda\mu_n \neq 1$ 时，$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})$的逆算子$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^{-1}$为

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^{-1} = \mathbf{I} + \lambda\mathbf{R};$$

(2) $\lambda\mu_l = 1$，则当 $n \neq l$ 时

$$a_n = \frac{1}{1 - \lambda\mu_n} (\varphi_n, f) = (\varphi_n, f) + \frac{\lambda\mu_n}{1 - \lambda\mu_n} (\varphi_n, f)$$

但当 $n = l$ 时，由式(5.3.38)要求$(\varphi_l, f) = 0$，而 a_l 任意. 故这时方程(5.2.34)的解为

$$\varphi = c\varphi_l + \lambda \sum_{n \neq l}^{\infty} \frac{\mu_n \varphi_n}{1 - \lambda\mu_n} (\varphi_n, f) + f \tag{5.3.42}$$

如果$(\varphi_l, f) \neq 0$，方程(5.3.34)无解. 条件$(\varphi_l, f) = 0$等价于 f 与下列齐次方程的非零解正交

$$\varphi = \lambda \mathbf{K} \varphi \tag{5.3.43}$$

因此与有限秩情形的 Fredholm 择一定理一样，对平方可积的 Hermite 算子，

亦有 **Fredholm 择一定理**:

(1) 设 $\mathbf{K}$ 是作用在 $L^2[a,b]$的 Hermite 算子且平方可积，当且仅当 f 与齐次方程(5.3.43)的非零解正交时，方程(5.2.34)才有解;

(2) 当方程(5.3.43)只有零解时，方程(5.3.34)解惟一且由式(5.3.39)决定.

例 5.3.8 考虑积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y, \qquad x \in [0,1] \tag{5.3.44}$$

其中 $k(x,y)$为式(5.3.16)

$$k(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ y(1-x), & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.3.45}$$

当 $\lambda \neq 1/\mu_l = l^2\pi^2$ 时，式(5.3.44)的解为

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2-\lambda}\left[\int_0^1\sqrt{2}f(y)\sin n\pi y\mathrm{d}y\right]\sqrt{2}\sin n\pi x$$

当 $\lambda = 1/\mu_v = v^2\pi^2$ 时，式(5.3.44)有解的条件是

$$\int_0^1 \sin v\pi x\cdot f(x)\mathrm{d}x = 0$$

这时有解

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{n\neq v}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2-\lambda}\left[\int_0^1\sqrt{2}\sin n\pi y f(y)\mathrm{d}y\right]\sqrt{2}\sin n\pi x + c\sin v\pi x.$$

从以上讨论可知，当知道平方可积 Hermite 算子的本征函数和本征值时，第二类 Fredholm 积分方程容易求解. 但实际问题中，求解本征方程并不比直接求解方程本身容易. 因此，式(5.3.39)是不实用的. 但是如果 $\mathbf{K}$ 可以表示成

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \tag{5.3.46}$$

而 $\mathbf{K}_0$ 和 $\mathbf{K}_1$ 满足:

(1) $\mathbf{K}_0$ 和 $\mathbf{K}_1$ 都是平方可积的 Hermite 算子，因而 $\mathbf{K}$ 亦平方可积且是 Hermite 算子;

(2) $\mathbf{K}_1$ 相对 $\mathbf{K}_0$ 来说，可看作微扰: $\|\mathbf{K}_1\| \ll \|\mathbf{K}_0\|$;

(3) 我们恰好已求得 $\mathbf{K}_0$ 的本征函数系$\{\varphi_n^0\}$和本征值$\{\mu_n^0\}$.

则可用微扰法求解第二类 Fredholm 积分方程. 把式(5.3.34)写成

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K}_0)\varphi = f + \lambda\mathbf{K}_1\varphi \tag{5.3.47}$$

由以上讨论知，当 $\mu_n^0\lambda \neq 1$ 时(下面都假定这种情况)，$(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K}_0)$ 的逆算子 $(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K}_0)^{-1}$由 $\mathbf{K}_0$ 的预解算子给出

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K}_0)^{-1} = \mathbf{I} + \lambda\mathbf{R}_{\mathbf{K}_0} \tag{5.3.48}$$

其中

$$\mathbf{R}_{\mathbf{K}_0} f \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^0}{1-\lambda\mu_n^0}(\varphi_n^0, f) \tag{5.3.49}$$

于是把式(5.3.47)右边看作 $f' = f + \lambda \mathbf{K}_1 \varphi$，得到方程的形式解

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{R}_{\mathbf{K}_0} f + \lambda(\mathbf{K}_1 + \lambda \mathbf{R}_{\mathbf{K}_0}\mathbf{K}_1)\varphi \tag{5.3.50}$$

上式仍是一个第二类 Fredholm 积分方程，非齐次项为 $f' = f + \lambda \mathbf{R}_{\mathbf{K}_0} f$，但与原方程相比，积分算子是小算子，可用迭代法解之. 于是当

$$|\lambda| \cdot \| \mathbf{K}_1 + \lambda \mathbf{R}_{\mathbf{K}_0}\mathbf{K}_1 \| < 1 \tag{5.3.51}$$

则可求得式(5.3.47)的近似解.

下面把上述思想应用于求解本征值问题，推出微扰论中十分有用的公式. 为了方便，引进小参数 ε

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \varepsilon \mathbf{K}_1 \tag{5.3.52}$$

其中 $\mathbf{K}_0$ 和 $\varepsilon\mathbf{K}_1$ 满足前述的三个条件. 考虑 $\mathbf{K}$ 的本征方程

$$\mathbf{K}\varphi_n = \mu_n \varphi_n \tag{5.3.53}$$

写成

$$(\mathbf{I} - \mu_n^{-1}\mathbf{K}_0)\varphi_n = \mu_n^{-1}\varepsilon \mathbf{K}_1 \varphi_n \tag{5.3.54}$$

上式可看作非齐次项 $f = \mu_n^{-1}\varepsilon \mathbf{K}_1 \varphi_n$ 的第二类 Fredholm 方程，故有形式解

$$\varphi_n = (\mathbf{I} - \mu_n^{-1}\mathbf{K}_0)^{-1}\mu_n^{-1}\varepsilon\mathbf{K}_1\varphi_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\mu_n - \mu_m^0}(\varphi_m^0, \mathbf{K}_1\varphi_n)\varphi_m^0 \tag{5.3.55}$$

考察上式，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\mu_n \to \mu_n^0$，因此有一发散项，把此发散项分开

$$\varphi_n = \frac{\varepsilon(\varphi_n^0, \mathbf{K}_1\varphi_n)}{\mu_n - \mu_n^0}\varphi_n^0 + \varepsilon \sum_{m \neq n}^{\infty} \frac{(\varphi_m^0, \mathbf{K}_1\varphi_n)}{\mu_n - \mu_m^0}\varphi_m^0. \tag{5.3.56}$$

另一方面，由式(5.3.54)两边用 φ_n^0 取内积

$$\begin{aligned}(\varphi_n^0, \varepsilon\mathbf{K}_1\varphi_n) &= \mu_n[\varphi_n^0, (\mathbf{I} - \mu_n^{-1}\mathbf{K}_0)\varphi_n] \\ &= \mu_n(\varphi_n^0, \varphi_n) - (\mu_n/\mu_n^*)(\varphi_n^0, \mathbf{K}_0\varphi_n) \\ &= \mu_n(\varphi_n^0, \varphi_n) - (\mathbf{K}_0\varphi_n^0, \varphi_n) \\ &= (\mu_n - \mu_n^0)(\varphi_n^0, \varphi_n)\end{aligned}$$

其中用到 Hermite 算子 $\mathbf{K}_0$ 的性质：$\mu_n = \mu_n^*$ 和 $(\varphi_n^0, \mathbf{K}_0\varphi_n) = (\mathbf{K}_0\varphi_n^0, \varphi_n)$，于是

$$(\varphi_n^0, \varepsilon\mathbf{K}_1\varphi_n) = (\mu_n - \mu_n^0)(\varphi_n^0, \varphi) \tag{5.3.57}$$

代入式(5.3.56)应得

$$\varphi_n = (\varphi_n^0, \varphi)\varphi_n^0 + \varepsilon \sum_{m \neq n}^{\infty} \frac{(\varphi_m^0, \mathbf{K}_1\varphi_n)}{\mu_n - \mu_m^0}\varphi_m^0 \tag{5.3.58}$$

而由式(5.3.57)

$$\mu_n = \mu_n^0 + \frac{(\varphi_n^0, \varepsilon\mathbf{K}_1\varphi_n)}{(\varphi_n^0, \varphi)} \tag{5.3.59}$$

因式(5.3.54)关于 φ_n 齐次，可乘任意常数. 故取$(\varphi_n^0,\varphi)=1$，于是

$$\varphi_n = \varphi_n^0 + \varepsilon\sum_{m\neq n}^{\infty}\frac{(\varphi_m^0,\mathbf{K}_1\varphi_n)}{\mu_n-\mu_m^0}\varphi_m^0$$

$$\mu_n = \mu_n^0 + (\varphi_n^0,\varepsilon\mathbf{K}_1\varphi_n) \tag{5.3.60}$$

至此，上式严格成立，它们是微扰论中十分有用的公式. 当 $\|\varepsilon\mathbf{K}_1\|<1$ 时，可用迭代法求解，一阶近似为

$$\varphi_n \approx \varphi_n^0 + \varepsilon\sum_{m\neq n}^{\infty}\frac{(\varphi_m^0,\mathbf{K}_1\varphi_n^0)}{\mu_n-\mu_m^0}\varphi_m^0$$

$$\mu_n \approx \mu_n^0 + (\varphi_n^0,\varepsilon\mathbf{K}_1\varphi_n^0) \tag{5.3.61}$$

必须指出，推出公式(5.3.60)和(5.3.61)时，已假定第 n 个本征值μ_n 非简并，如果 μ_n 简并，例如对应 μ_n 有两个独立的本征函数φ_{n1}^0和 φ_{n2}^0，则式(5.3.61)中 φ_n^0 无法选择. 事实上，由于微扰 $\varepsilon\mathbf{K}_1$ 的作用，μ_n 本征值可能发生质的变化，即简并可能消除，我们将在第六章详细讨论.

5.3.3　平方可积 Hermite 对称核的极值性质

设 $\mathbf{K}$ 是平方可积且 Hermite 对称的积分算子，进一步假定 $\mathbf{K}$ 有无穷多个非零本征值. 因本征值可正可负，为了讨论的方便，作下列分类：

(1) 用 $\mu_1^+,\mu_2^+,\cdots$表示 $\mathbf{K}$ 的正本征值且编序成

$$\mu_1^+\geqslant\mu_2^+\geqslant\cdots\mu_n^+\geqslant\cdots \tag{5.3.62}$$

相应的本征函数为$(\varphi_1^+,\varphi_2^+,\cdots,\varphi_n^+,\cdots)$；

(2) 用 $\mu_1^-,\mu_2^-,\cdots$表示 $\mathbf{K}$ 的负本征值且编序成

$$\mu_1^-\leqslant\mu_2^-\leqslant\cdots\mu_n^-\leqslant\cdots \tag{5.3.63}$$

相应的本征函数为$(\varphi_1^-,\varphi_2^-,\cdots,\varphi_n^-,\cdots)$，并且 μ_1^- 有限(不为负无穷). 于是，有下述定理：

(1) 设 φ 正交于$(\varphi_1^+,\varphi_2^+,\cdots,\varphi_n^+)$：$(\varphi,\varphi_i^+)=0(i=1,2,\cdots,n)$，则$(\varphi,\mathbf{K}\varphi)/\|\varphi\|^2$ 的最大值为 μ_{n+1}^+

$$\max\left[\frac{(\varphi,\mathbf{K}\varphi)}{\|\varphi\|^2}\right]=\mu_{n+1}^+ \tag{5.3.64}$$

且当达到最大值时的 φ 是第$n+1$ 个本征函数 φ_{n+1}^+；

(2) 设 φ 正交于$(\varphi_1^-,\varphi_2^-,\cdots,\varphi_n^-)$：$(\varphi,\varphi_i^-)=0(i=1,2,\cdots,n)$，则$(\varphi,\mathbf{K}\varphi)/\|\varphi\|^2$的最小值为 μ_{n+1}^-

$$\min\left[\frac{(\varphi,\mathbf{K}\varphi)}{\|\varphi\|^2}\right]=\mu_{n+1}^- \tag{5.3.65}$$

且当得到最小值时的 φ 是第$n+1$ 个本征函数 φ_{n+1}^-.

证明上述定理是容易的，因 $\mathbf{K}$ 的本征函数系是完备的正交归一系，于是

$$\mathbf{K}\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n,\varphi)\mathbf{K}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\varphi_n,\varphi)\varphi_n \tag{5.3.66}$$

因此

$$(\varphi,\mathbf{K}\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\left|(\varphi_n,\varphi)\right|^2 \tag{5.3.67}$$

利用引进的表示法，上式即为

$$(\varphi,\mathbf{K}\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty}\mu_l^+\left|(\varphi_l^+,\varphi)\right|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\mu_m^-\left|(\varphi_m^-,\varphi)\right|^2 \tag{5.3.68}$$

设 φ 与 $(\varphi_1^+,\varphi_2^+,\cdots,\varphi_n^+)$ 正交，则 $(\varphi_i,\varphi)=0(i=1,2,\cdots,n)$，于是上式变成

$$\begin{aligned}(\varphi,\mathbf{K}\varphi) &= \sum_{l=n+1}^{\infty}\mu_l^+\left|(\varphi_l^+,\varphi)\right|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\mu_m^-\left|(\varphi_m,\varphi)\right|^2\\ &\leqslant \mu_{n+1}^+\left[\sum_{l=n+1}^{\infty}\left|(\varphi_l^+,\varphi)\right|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\left|(\varphi_m^-,\varphi)\right|^2\right]\end{aligned} \tag{5.3.69}$$

又

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^2 = (\varphi,\varphi) &= \sum_{l=1}^{\infty}\left|(\varphi_l^+,\varphi)\right|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\left|(\varphi_m^-,\varphi)\right|^2\\ &= \sum_{l=n+1}^{\infty}\left|(\varphi_l^+,\varphi)\right|^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\left|(\varphi_m^-,\varphi)\right|^2\end{aligned} \tag{5.3.70}$$

结合上两式即得

$$\frac{(\varphi,\mathbf{K}\varphi)}{\|\varphi\|^2} \leqslant \mu_{n+1}^+ \tag{5.3.71}$$

显然，当 $\varphi=\varphi_{n+1}^+$ 时，$(\varphi,\mathbf{K}\varphi)=\mu_{n+1}^+\|\varphi\|^2$. 因此，当 $\varphi=\varphi_{n+1}^+$ 时达到最大值.

定理的第二部分可同样证明：由式(5.3.68)，设 φ 与 $(\varphi_1^-,\varphi_2^-,\cdots,\varphi_n^-)$ 正交，则

$$\begin{aligned}(\varphi,\mathbf{K}\varphi) &= \sum_{l=1}^{\infty}\mu_l^+\left|(\varphi_l^+,\varphi)\right|^2 + \sum_{m=n+1}^{\infty}\mu_m^-\left|(\varphi_m^-,\varphi)\right|^2\\ &\geqslant \mu_{n+1}^-\left[\sum_{l=n+1}^{\infty}\left|(\varphi_l^-,\varphi)\right|^2 + \sum_{m=n+1}^{\infty}\left|(\varphi_m^-,\varphi)\right|^2\right]\end{aligned}$$

即有

$$\frac{(\varphi,\mathbf{K}\varphi)}{\|\varphi\|^2} \geqslant \mu_{n+1}^-$$

当 $\varphi=\varphi_{n+1}^-$ 时，$(\varphi,\mathbf{K}\varphi)=\mu_{n+1}^-\|\varphi\|^2$. 因此整个定理得证. 必须指出：当 μ_{n+1}^+ 或 μ_{n+1}^- 有多重性时，并非只有 $\varphi=\varphi_{n+1}^+$(或 $\varphi=\varphi_{n+1}^-$)才有 $(\varphi,\mathbf{K}\varphi)=\mu_{n+1}^+\|\varphi\|^2$(或 μ_{n+1}^-)，因为对应于 μ_{n+1}^+(或 μ_{n+1}^-)有多个本征函数满足此条件. 利用该定理可以估计本征值的大小，特别是第一个本征值.

例 5.3.9　考虑本征方程

$$\int_0^1 k(x,y)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \mu_n\varphi_n(x)$$

其中实对称核

$$k(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ y(1-x), & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

最大本征值 $\mu_1^+ = 0.1013$. 用式(5.3.64)来估计：取 $\varphi_1^+(x) \approx x(1-x)$，则 μ_1^+ 的近似值 $\bar{\mu}_1^+$ 为

$$\bar{\mu}_1^+ \approx \frac{(\varphi_1^+, \mathbf{K}\varphi_1^+)}{\|\varphi\|^2} \approx \frac{17}{168} \approx 0.1012$$

显然 $\mu_1^+ > \bar{\mu}_1^+$，但误差只有大约 0.1%.

5.3.4　本征值问题的有限秩近似

设 **K** 是作用在 $L^2[a,b]$上的平方可积且 Hermite 对称的积分算子，考虑其本征值问题

$$\mathbf{K}\varphi = \mu\varphi \tag{5.3.72}$$

上式一般不可能严格求解，下面建立比较实用的近似方法. 因 $k(x,y)$平方可积，可以选取 $L^2[a,b]$上的一个完备的正交归一系$\{\psi_n\}$作展开

$$k(x,y) = \sum_{m,l=1}^{\infty} a_{ml}\psi_m(x)\psi_l(y) \tag{5.3.73}$$

其中

$$a_{lm} = \int_a^b\int_a^b k(x,y)\psi_m^*(x)\psi_l^*(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.74}$$

注意:式(5.3.73)与(5.3.8)的区别，这里$\{\psi_n\}$不一定是 **K** 的本征函数. 因级数式(5.3.73)的收敛性有 Bessel 不等式保证，故可取有限秩近似

$$k(x,y) \approx k_N(x,y) = \sum_{m,l=1}^{N} a_{ml}\psi_m(x)\psi_l(y) \tag{5.3.75}$$

这时式(5.3.72)变成

$$\sum_{m,l=1}^{N} a_{ml}\psi_m(x)\int_a^b \psi_l(y)\varphi^{(N)}(y)\mathrm{d}y = \mu^{(N)}\varphi^{(N)}(x) \tag{5.3.76}$$

其中上标(N)表示取有限秩近似，令

$$a_l = \int_a^b \psi_l(y)\varphi^{(N)}(y)\mathrm{d}y$$

式(5.3.76)变成

$$\sum_{m,l=1}^{N} a_{ml}\psi_m(x)a_l = \mu^{(N)}\varphi^{(N)}(x) \tag{5.3.77}$$

两边乘 $\psi_j(x)$ 并积分得

$$\sum_{m,l=1}^{N} a_{ml} a_l \delta_{mj} = \mu^{(N)} a_j, \qquad (j = 1,2,\cdots,N) \tag{5.3.78}$$

故得决定本征值 $\mu^{(N)}$ 的方程

$$\sum_{l=1}^{N} a_{jl} a_l = \mu^{(N)} a_j, \qquad (j = 1,2,\cdots,N) \tag{5.3.79}$$

于是，把问题归结为求 N 维矩阵的本征值问题. 实用中常取 $\{\psi_n\}$ 如下

$$\psi_n^{(N)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{N}{l}}, & a + (n-1)\dfrac{l}{N} \leqslant x \leqslant a + n\dfrac{l}{N} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{5.3.80}$$

其中 $l = (b - a)$，而 $n = 1,2,\cdots,N$. 上式相当于把区间 $[a, b]$ 分成 N 个小段，每段长度为 $(b-a)/N$，这时

$$a_{ml} = \int_a^b \int_a^b k(x,y)\psi_m^{(N)}(x)\psi_l^{(N)}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.3.81}$$

表示函数 $k(x,y)$ 在 x-y 平面上划分的二维格子第 (m,l) 上的平均值. 如果问题的区域为无限大，则可作适当的切断近似，只要当 x，$y \to \infty$ 时 $k(x,y)$ 很快趋向零.

为了说明上述结果，对式(5.3.72)直接作如下近似：因可以用求和来近似代替式(5.3.72)中的积分，为此把 $[a, b]$ 分成 N 份，每段的长为 l/N，式(5.3.72)可写作

$$\sum_{m=1}^{N} k(x, y_m)\varphi^{(N)}(y_m)\left(\frac{l}{N}\right) = \mu^{(N)}\varphi^{(N)}(x) \tag{5.3.82}$$

进一步对 x 离散化，则得

$$\sum_{m=1}^{N} k(x_j, y_m)\varphi^{(N)}(y_m)\left(\frac{l}{N}\right) = \mu^{(N)}\varphi^{(N)}(x_j) \tag{5.3.83}$$

其中 (x_j, y_m) 为二维 x-y 平面上第 (j,m) 个格子中某一点的坐标，令

$$\bar{a}_{jm} = k(x_j, y_m)\left(\frac{l}{N}\right); \qquad \bar{a}_j = \varphi^{(N)}(x_j) \tag{5.3.84}$$

则式(5.3.83)化成

$$\sum_{m=1}^{N} \bar{a}_{jm}\bar{a}_m = \mu^{(N)}\bar{a}_j, \qquad (j = 1,2,\cdots,N) \tag{5.3.85}$$

显然式(5.3.85)与(5.3.79)的区别在于：式(5.3.79)中 a_{ml} 是 $k(x,y)$ 在小格子中的平均值，而式(5.3.85)则用小格子中某一点的值来代替平均值.

上述思想实质上是用求和来代替积分，从而把积分方程化成代数方程来求解，此法同样适合于求解第二类 Fredholm 积分方程，只要 $k(x,y)$ 和非齐次项是连续函数. 考虑式(5.3.34)，用高斯求积公式

$$\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \sum_{m=1}^{N} A_m k(x,y_m)\varphi(y_m) \tag{5.3.86}$$

其中(A_m, y_m)为高斯常数，代入式(5.3.34)得到

$$\varphi(x) - \lambda\sum_{m=1}^{N} A_m k(x,y_m)\varphi(y_m) = f(x) \tag{5.3.87}$$

依次取 $x = x_1, x_2, \cdots, x_N$ 得

$$\varphi(x_i) - \lambda\sum_{m=1}^{N} A_m k(x_i,x_m)\varphi(x_m) = f(x_i), \qquad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{5.3.88}$$

可求得 $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_N)$. 于是式(5.3.34)的近似解为

$$\varphi(x) \approx f(x) + \lambda\sum_{m=1}^{N} A_m k(x,y_m)\varphi(y_m). \tag{5.3.89}$$

例 5.3.10　用上述方法解下列方程

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{xy}\varphi(x)\mathrm{d}y + \left[1 - \frac{1}{2x}(\mathrm{e}^x - 1)\right] \tag{5.3.90}$$

取 $N=2, A_1 = A_2 = 1/2$, $[0,1]$内的高斯点为 $x_1 = 0.2113$ 和 $x_2 = 0.7887$,于是

$$\left[1 - \frac{1}{4}k(x_1,x_1)\right]\varphi(x_1) - \frac{1}{4}k(x_1,x_2)\varphi(x_2) = f(x_1) \tag{5.3.91}$$

$$\left[-\frac{1}{4}k(x_2,x_1)\right]\varphi(x_1) + \left[1 - \frac{1}{4}k(x_2,x_2)\right]\varphi(x_2) = f(x_2) \tag{5.3.92}$$

由以上方程可求得 $\varphi(x_1) = 0.9997$ 和 $\varphi(x_2) = 0.9990$，因此式(5.3.90)的近似解为

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{4}[0.9997\mathrm{e}^{0.2113x} + 0.9990\mathrm{e}^{0.7887x}] + 1 - \frac{1}{2x}(\mathrm{e}^x - 1) \tag{5.3.93}$$

而精确解为 $\varphi(x) = 1$，比较 x_1 和 x_2 两点的值，其百分误差分别为 0.03% 和 0.1%. 在 $x = 0$ 点，由上式可求得 $\varphi(0) \approx 0.9997$，误差为 0.03%. 可见近似解与精确解几乎相等.

5.3.5　一般平方可积核

设 $k(x,y)$平方可积，但不 Hermite 对称. 定义一对共轭本征值问题

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\varphi_n &= \mu_n\psi_n \\ \mathbf{K}^+\psi_n &= \mu_n\varphi_n \end{aligned} \tag{5.3.94}$$

其中 $\mathbf{K}^+$ 为由式(5.3.1)定义的 $\mathbf{K}$ 的共轭算子且积分核为 $k^+(x,y) = k^*(y,x)$. $\mathbf{K}^+$ 作用于第一式并利用第二式得到

$$\mathbf{K}^+\mathbf{K}\varphi_n = \mu_n\mathbf{K}^+\psi_n = \mu_n^2\varphi_n$$

分析积分算子 $\mathbf{K}^+\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}^{+}\mathbf{K}\varphi_n = \int_a^b k^*(y,x)\left[\int_a^b k(y,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^b\left[\int_a^b k(y,t)k^*(y,x)\mathrm{d}y\right]\varphi_n(t)\mathrm{d}t \equiv \int_a^b k_1(x,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

其中

$$k_1(x,t) = \int_a^b k(y,t)k^*(y,x)\mathrm{d}y \tag{5.3.95}$$

为 $\mathbf{K}^{+}\mathbf{K}$ 的积分核，显然 $k_1(x,t)=k_1^*(t,x)$，因此 $\mathbf{K}^{+}\mathbf{K}$ 是 Hermite 对称算子. 利用同样的过程可得到

$$\mathbf{K}\mathbf{K}^{+}\psi_n = \mu_n\mathbf{K}\varphi_n = \mu_n^2\psi_n$$

其中积分算子 $\mathbf{K}\mathbf{K}^{+}$ 的核为

$$k_2(x,t) = \int_a^b k(x,y)k^*(t,y)\mathrm{d}y$$

显然也是 Hermite 对称算子. 5.3.1 小节关于 Hermite 对称算子的结论全部成立.

因此有结论(证明略):

(1) 存在一组正的本征值($\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n\cdots$)和相应的正交共轭本征函数对$\{\varphi_n,\psi_n\}$，如果本征值小于零，只要令 $-\lambda$ 和 $-\psi$ 即可;

(2) 对形如 $\varphi=\mathbf{K}g$，$g\in L^2[a,b]$的函数，可将 φ 展成$\{\varphi_n\}$的 Fourier 级数

$$\varphi \cong \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n,\varphi)\varphi_n;$$

(3) 对形如 $\psi=\mathbf{K}^{+}q, q\in L^2[a,b]$ 的函数，可将 ψ 展成$\{\psi_n\}$的 Fourier 级数

$$\psi \approx \sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n,\psi)\psi_n.$$

上述结论在 7.1.3 小节中有重要应用.

下面介绍结合有限秩和小算子近似解第二类 Fredholm 积分方程的方法. 因为 $k(x,y)$平方可积，故可用有限秩核来逼近 $k(x,y)$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_N + \Delta \tag{5.3.96}$$

其中 $\mathbf{K}_N$ 是有限秩的，而 $\|\Delta\|$ 可以任意小. 对有限秩算子 $\mathbf{K}_N$ 和"小算子"Δ，已有办法进行求解.

现在考虑第二类 Fredholm 积分方程

$$\varphi = f + \lambda\mathbf{K}\varphi \tag{5.3.97}$$

利用式(5.3.96)，上式可写成

$$(\mathbf{I} - \lambda\Delta - \lambda\mathbf{K}_N)\varphi = f \tag{5.3.98}$$

问题的关键是求解$(\mathbf{I}-\lambda\Delta-\lambda\mathbf{K}_N)$的逆$(\mathbf{I}-\lambda\Delta-\lambda\mathbf{K}_N)^{-1}$.

由 5.2 节，当$|\lambda|\cdot\|\Delta\|<1$ 时，$(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}$由 Born 级数给出

$$(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}\Delta^{n} \tag{5.3.99}$$

当 λ 不是 $\mathbf{K}_N$ 的奇异值时,$(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K}_N)^{-1}$可求得. 因此，如果$(\mathbf{I}-\lambda\Delta-\lambda\mathbf{K}_N)^{-1}$存在，那么能否用已求得的$(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}$和$(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K}_N)^{-1}$来表达呢？利用算子恒等式

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^{-1}\equiv\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A}-\mathbf{B})^{-1} \tag{5.3.100}$$

(上式两边右乘 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ 即可证明恒等性) 令 $\mathbf{A}=\mathbf{I}-\lambda\Delta,\mathbf{B}=\lambda\mathbf{K}_N$,则

$$(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K})^{-1}=(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}+\lambda(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}\mathbf{K}_N(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K})^{-1}$$

因此

$$[\mathbf{I}-\lambda(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}\mathbf{K}_N](\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K})^{-1}=(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}$$

于是我们得

$$(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{K})^{-1}=[\mathbf{I}-\lambda(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}\mathbf{K}_N]^{-1}(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1} \tag{5.3.101}$$

上式中$(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}$已求得，关键是求$[\mathbf{I}-\lambda(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}\mathbf{K}_N]$的逆. 下面证明这个算子也是有限秩的. 事实上，因 $\mathbf{K}_N$ 是有限秩的，故可表达成

$$\mathbf{K}_N f\equiv\sum_{i=1}^{N}p_i(q_i,f)$$

因此

$$(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}\mathbf{K}_N f=\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}p_i(q_i,f)=\sum_{i=1}^{N}p_i^{\Delta}(q_i,f) \tag{5.3.102}$$

其中

$$p_i^{\Delta}\equiv(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}p_i=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}\Delta^{n}p_i$$

显然，由式(5.3.102)知$(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}\mathbf{K}_N$ 是有限秩算子，故其逆可求得. 综上所述，求解方程(5.3.97)归结为：

(1) 求算子$(\mathbf{I}-\lambda\Delta)$的逆，其中 Δ 是小算子，即$|\lambda|\cdot\|\Delta\|<1$；

(2) 求算子$[\mathbf{I}-\lambda(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}\mathbf{K}_N]$的逆，其中$(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}\mathbf{K}_N$ 是有限秩算子.

令 $\overline{\mathbf{K}}_N\equiv(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}\mathbf{K}_N$，则方程(5.3.97)的解可表成

$$\varphi=(\mathbf{I}-\lambda\overline{\mathbf{K}}_N)^{-1}(\mathbf{I}-\lambda\Delta)^{-1}f \tag{5.3.103}$$

由 5.2 节的讨论,$(\mathbf{I}-\lambda\overline{\mathbf{K}}_N)^{-1}$可用预解核 $\overline{\mathbf{R}}_N$ 来表示

$$(\mathbf{I}-\lambda\overline{\mathbf{K}}_N)^{-1}=\mathbf{I}+\lambda\overline{\mathbf{R}}_N \tag{5.3.104}$$

其中

$$\overline{\mathbf{R}}_N f\equiv\sum_{m,n=1}^{N}[(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A})^{-1}]_{nm}p_n^{\Delta}(q_m,f) \tag{5.3.105}$$

$\mathbf{A}$ 是 $N\times N$ 矩阵$[\mathbf{A}]_{mn}=(q_m,p_n^{\Delta})$.

下面给出具有一般平方可积核方程的 Fredholm 择一定理：

(1) 设 K 作用在 $L^2[a,b]$上,$k(x,y)$平方可积，当且仅当 f 与齐次共轭方程

$$\psi = \lambda^* \mathbf{K}^+ \psi \tag{5.3.106}$$

的非零解正交时,方程(5.3.97)才有解;

(2) 当方程(5.3.106)只有零解时，方程(5.3.97)有惟一解.

上述定理证明较繁，故略去.

5.4 积分变换及应用于解积分方程

本节从积分方程的观点来讨论 Fourier 变换，然后从 Fourier 变换导出其他两个有用的变换：Laplace 变换和 Hankel 变换. 最后讨论 Hilbert 变换及其基本性质.

5.4.1 Fourier 变换及逆变换

考虑作用在 $L^2(-\infty,\infty)$上的算子 F

$$\mathbf{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y)\mathrm{d}y \tag{5.4.1}$$

F 的积分核 $k(x,y)$为

$$k(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixy} \tag{5.4.2}$$

显然 $k(x,y)$不是平方可积的，因此前几节的理论不能应用到式(5.4.1). 下面把式(5.4.1)看作积分方程

$$\mathbf{F}(f) = g \tag{5.4.3}$$

问题是如何求 f，亦即求 F 的逆算子 $\mathbf{F}^{-1}$. 为此，考虑 $L^2(-\infty,\infty)$上完备的正交归一系$\{\varphi_n(x)\}$(见第二章讨论)

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{x^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2} \tag{5.4.4}$$

对任一 $f \in L^2(-\infty,\infty)$，存在 Fourier 展式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(x) \tag{5.4.5}$$

把 F 作用到 f

$$\mathbf{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathbf{F}(\varphi_n) \tag{5.4.6}$$

$\mathbf{F}(\varphi_n)$可直接计算如下

$$\mathbf{F}(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy + y^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n} e^{-y^2} \mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\eta^2/2}\frac{d^n}{d\eta^n}e^{-(\eta-ix)^2}d\eta$$

得到第二步积分，已令 $\eta=y+ix$. 利用关系式

$$\frac{d}{a\eta}e^{-(\eta-ix)^2}=i\frac{d}{dx}e^{-(\eta-ix)^2}$$

可得

$$\mathbf{F}(\varphi_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\eta^2/2}\cdot e^{-(\eta-ix)^2}d\eta$$

利用积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\eta^2/2}e^{-(\eta-ix)^2}d\eta=\sqrt{2\pi}e^{-x^2}$$

因此，我们有

$$\mathbf{F}(\varphi_n)=i^n\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}=i^n\varphi_n(x) \tag{5.4.7}$$

顺便指出，上式表明 Fourier 积分算子的本征值为 $\lambda_n=i^n$，相应的本征函数为 $\varphi_n(x)$. 代入式(5.4.6)得到

$$\mathbf{F}(f)=\sum_{n=0}^{\infty}i^n f_n\varphi_n(x). \tag{5.4.8}$$

另一方面，$\mathbf{F}$ 的共轭算子 $\mathbf{F}^+$ 具有积分核 $k^+(x,y)=k^*(y,x)$

$$k^+(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ixy}$$

同样可证明

$$\mathbf{F}^+(\varphi_n)=(-i)^n\varphi_n(x) \tag{5.4.9}$$

于是，$\mathbf{F}^+$ 作用于式(5.4.8)两边，并利用式(5.4.9)得到

$$\mathbf{F}^+\mathbf{F}(f)=\sum_{n=0}^{\infty}i^n f_n\mathbf{F}^+(\varphi_n)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n i^{2n}(-1)^n\varphi_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\varphi_n=f$$

可见 $\mathbf{F}^+\mathbf{F}$ 为恒等算子 $\mathbf{F}^+\mathbf{F}=\mathbf{I}$,于是 $\mathbf{F}$ 的逆算子 $\mathbf{F}^{-1}=\mathbf{F}^+$. 因此,式(5.4.3)的解为

$$f(x)=\mathbf{F}^{-1}(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-ixy}dy \tag{5.4.10}$$

式(5.4.1)和(5.4.10)即为熟知的 Fourier 变换对. 下面考虑 $\mathbf{F}$ 的另一个特性，为此计算 $\|\mathbf{F}(f)\|^2$ 如下

$$\|\mathbf{F}(f)\|^2=\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+m}f_n^*f_m\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^*(x)\varphi_m(x)dx$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+m}f_n^*f_m\delta_{nm}=\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2=\|f\|^2$$

因此有关系式

$$\| \mathbf{F}(f) \| = \| f \| \tag{5.4.11}$$

由于 F 是线性算子，故上式意味着

$$\| \mathbf{F}(f_1 - f_2) \| = \| f_1 - f_2 \| \tag{5.4.12}$$

上式意义很明显：$\| f_1 - f_2 \|$ 表示 f_1 与 f_2 之间的“距离”. 因此，经 F 作用后，两个象元素 $\mathbf{F}(f_1)$与 $\mathbf{F}(f_2)$之间的“距离”保持不变. 这样的变换称为**等距变换**或**保范变换**.

如果作用在 Hilbert 空间 H 上的任意线性算子 U 满足条件：

(1) 等距性 $\| \mathbf{U}f \| = \| f \|, \forall f \in H$;

(2) U 的逆：$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{+}$.

则称 U 为**酉算子**. 因此 F 是一个酉算子.

Fourier 变换式(5.4.1)的一个十分重要的性质是卷积定理成立：对 $L^2(-\infty, \infty)$中的任意函数 f 及 g 定义卷积

$$(f \otimes g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) \mathrm{d}y \tag{5.4.13}$$

则有

$$\mathbf{F}[(f \otimes g)(x)] = \sqrt{2\pi}\mathbf{F}(f)\mathbf{F}(g) \tag{5.4.14}$$

证明如下

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}[f \otimes g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(y - s) \mathrm{d}s \right] \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{\infty} g(y - s) \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \mathrm{e}^{\mathrm{i}xs} \mathrm{d}s \mathbf{F}(g) = \sqrt{2\pi}\mathbf{F}(g)\mathbf{F}(f)
\end{aligned}$$

即为式(5.4.14). 如果考虑 $L^2(0, \infty)$中的 $f(x)$，只要作偶延拓

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

可得

$$\mathbf{F}(\bar{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \bar{f}(x) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos(xy) \mathrm{d}x$$

定义新的变换和逆变换对

$$\mathbf{F}_{\mathrm{c}}(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos(xy) \mathrm{d}x; \qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \mathbf{F}_{\mathrm{c}}(f) \cos(xy) \mathrm{d}y \tag{5.4.15}$$

称为**余弦 Fourier 变换**. 如果对 $f(x)$作奇延拓，则可推出**正弦 Fourier 变换**

$$\mathbf{F}_s(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin(xy)\mathrm{d}x;\qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\mathbf{F}_s(f)\sin(xy)\mathrm{d}y \tag{5.4.16}$$

注意：在 $x=0$ 点，正弦变换使 $f(x)$收敛到零，即 $f(0)=0$，而余弦变换使 $f(x)$ 的一阶导数收敛到零，即 $f'(0)=0$.

例 5.4.1　利用式(5.4.14)，求解具有卷积核的积分方程

$$\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x) \tag{5.4.17}$$

对上式两边作用 $\mathbf{F}$，并利用式(5.4.14)得到 $\sqrt{2\pi}\mathbf{F}(k)\mathbf{F}(\varphi)=\mathbf{F}(f)$，因此

$$\mathbf{F}(\varphi)=\frac{\mathbf{F}(f)}{\sqrt{2\pi}\mathbf{F}(k)}$$

如果右边函数平方可积，则式(5.4.17)的解为

$$\varphi=\mathbf{F}^{-1}\left[\frac{\mathbf{F}(f)}{\sqrt{2\pi}\mathbf{F}(k)}\right]$$

注意：尽管我们求得了卷积核积分方程(5.4.17)的形式解，但此解一般是不稳定的，因而无实际意义. 我们将在第七章简单介绍寻找数值上稳定解的具体方法.

5.4.2　Laplace 变换及逆变换

函数 $f(x)$的 Laplace 变换定义为

$$\mathbf{L}(f)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma x}f(x)\mathrm{d}x \tag{5.4.18}$$

只要右边积分存在. 为了求 $\mathbf{L}$ 的逆算子 $\mathbf{L}^{-1}$，从 Fourier 变换出发，令 $f(x)=0$(当 $x<0$)，由式(5.4.1)和(5.4.10)

$$\mathbf{F}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}f(x)\mathrm{d}x;\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\mathbf{F}(f)\mathrm{d}s \tag{5.4.19}$$

作变换 $s=\mathrm{i}\sigma$

$$\mathbf{F}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma x}f(x)\mathrm{d}x;\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{x\sigma}\mathbf{L}(f)\mathrm{d}\sigma$$

于是定义 Laplace 变换对

$$\mathbf{L}(f)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\sigma x}f(x)\mathrm{d}x;\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{x\sigma}\mathbf{L}(f)\mathrm{d}\sigma \tag{5.4.20}$$

注意：第二式积分在虚轴进行. 由于式(5.4.19)要求 $f\in L^2(0,\infty)$，因此式(5.4.20)亦要求 $f\in L^2(0,\infty)$. 为了使上式适合于更广泛的函数，考虑指数增长的函数，即假定存在实数 p，使$[\mathrm{e}^{-px}f(x)]$在$(0,\infty)$内平方可积，那么 Laplace 变换和逆变换为

$$\mathbf{L}(f)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(\sigma+p)x}f(x)\mathrm{d}x$$

$$e^{-px}f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{x\sigma}\mathbf{L}(f)d\sigma \tag{5.4.21}$$

令 $\sigma + p = \sigma'$，上式变成

$$\mathbf{L}(f) = \int_0^\infty e^{-\sigma' x}f(x)dx; \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+p}^{i\infty+p} e^{x\sigma'}\mathbf{L}(f)d\sigma' \tag{5.4.22}$$

注意：第二式积分在复平面 σ 上取平行于虚轴的直线，如图 5.4.1. 上式与式(5.4.20)相比，优点在于适合更广泛的函数类，只要求 $e^{-px}f(x)\in L^2[0,\infty]$.

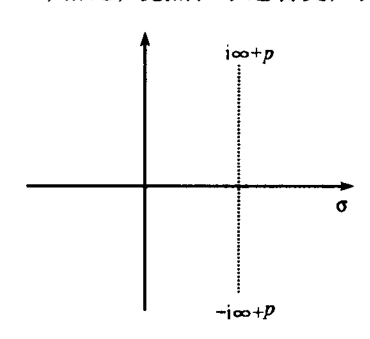


图 5.4.1 逆 Laplace 变换积分

如果定义 f 与 g 的相关$(f\oplus g)$如下

$$(f\oplus g) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy \tag{5.4.23}$$

则有

$$\mathbf{L}[(f\oplus g)] = \mathbf{L}(f)\mathbf{L}(g) \tag{5.4.24}$$

证明：

$$\mathbf{L}[(f\oplus g)] = \int_0^\infty e^{-\sigma x}\int_0^x f(y)g(x-y)dydx$$
$$= \int_0^\infty dx\int_0^x f(y)g(x-y)dye^{-\sigma x}$$

二重积分交换次序

$$\mathbf{L}[(f\oplus g)] = \int_0^\infty dyf(y)e^{-\sigma y}\int_y^\infty dxe^{-\sigma(x-y)}g(x-y)$$
$$= \int_0^\infty dyf(y)e^{-\sigma y}\left[\int_0^\infty dx'e^{-\sigma x'}g(x')\right]$$
$$= \mathbf{L}(f)\mathbf{L}(g)$$

故式(5.4.24)得证. Laplace 变换的这一性质常用来解具有相关核的 Volterra 积分方程.

例 5.4.2 考虑 Abel 方程

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}dy = f(x), \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant 1) \tag{5.4.25}$$

显然

$$k(x) = x^{-\alpha}; \qquad \mathbf{L}(k) = \int_0^\infty e^{-\sigma x}x^{-\alpha}dx = \sigma^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\alpha}du = \sigma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$$

对式(5.4.25)两边作用 $\mathbf{L}$，并作变换 $\sigma x = u$ 且利用式(5.4.24)

$$\mathbf{L}(\varphi) = \frac{\mathbf{L}(f)}{\mathbf{L}(k)} = \frac{\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\mathbf{L}(f) \tag{5.4.26}$$

因此 Abel 方程的解为

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{\sigma x}\frac{\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\mathbf{L}(f)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{\sigma x}\frac{\sigma^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\mathbf{L}(f)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{\sigma x}\Gamma(\alpha)\sigma^{-\alpha}\mathbf{L}(f)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{L}^{-1}[\Gamma(\alpha)\sigma^{-\alpha}\mathbf{L}(f)] \tag{5.4.27}$$

另一方面，利用式(5.4.24)

$$\mathbf{L}\left[\int_0^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y\right]=\Gamma(\alpha)\sigma^{-\alpha}\mathbf{L}(f)$$

代入式(5.4.27)应有

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{L}^{-1}\left[\mathbf{L}\int_0^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y$$

故 Abel 方程的解为

$$\varphi(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\mathrm{d}y$$

与式(5.1.26)完全一致.

5.4.3 Hankel 变换及逆变换

考虑平方可积的二维函数 $f(x,y)$，二维 Fourier 变换和逆变换定义为

$$F(s,\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(sx+\sigma y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(s,\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(sx+\sigma y)}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma \tag{5.4.28}$$

设 $f(x,y)$具有特殊形式

$$f(x,y)=f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{5.4.29}$$

平方可积条件为

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}|f(r)|^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^{\infty}r|f(r)|^2\mathrm{d}r<\infty$$

即要求 $f(r)$带权 $\rho(r)=r$ 平方可积. 设 $s=\rho\cos\alpha$ 及 $\sigma=\rho\sin\alpha$，则式(5.4.28)变成

$$F(\rho,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}f(r)\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[r\rho\cos(\theta-\alpha)+n\theta]}\mathrm{d}\theta\right]r\mathrm{d}r$$

$$f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}F(\rho,\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[r\rho\cos(\theta-\alpha)]}\mathrm{d}\theta\rho\mathrm{d}\rho \tag{5.4.30}$$

利用 Bessel 函数的下列公式

$$\int_0^{2\pi} e^{i[x\cos(\theta-\alpha)+m\theta]} d\theta = 2\pi e^{im(\alpha+\pi/2)} J_m(x)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i[-x\cos(\theta-\alpha)+m(\alpha+\pi/2)]} d\alpha = 2\pi e^{im\theta} J_m(x)$$

(5.4.30)第一式变成

$$F(\rho,\alpha) = e^{n(\alpha+\pi/2)} \int_0^\infty f(r) J_n(\rho r) r dr$$

代入第二式

$$\begin{aligned} f(r)e^{in\theta} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^{2\pi} e^{ni(\alpha+\pi/2)}\int_0^\infty f(r')J_n(\rho r')r'dr' e^{-ir\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\right]\rho d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \rho d\rho\left[\int_0^\infty f(r')J_n(\rho r')r'dr'\right]\int_0^{2\pi} e^{i[-r\rho\cos(\theta-\alpha)+n\alpha+n\pi/2]}d\alpha \\ &= e^{in\theta}\int_0^\infty \rho d\rho\left[\int_0^\infty f(r')J_n(\rho r')r'dr'\right]J(\rho r) \end{aligned} \tag{5.4.31}$$

因此，定义 Hankel 变换和逆变换

$$\mathbf{L}f = \int_0^\infty f(r)J_n(\rho r)rdr; \qquad f(r) = \int_0^\infty (\mathbf{L}f)J_n(\rho r)\rho d\rho \tag{5.4.32}$$

显然 $\mathbf{L}^{-1}=\mathbf{L}$，因此

$$\mathbf{L}^2 f = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{L}f) = (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L})f = f. \tag{5.4.33}$$

例 5.4.3　利用 Hankel 变换，求解特殊形式的积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^\infty yJ_n(xy)\varphi(y)dy + f(x) \tag{5.4.34}$$

上式写成

$$\varphi = \lambda\mathbf{L}\varphi + f \tag{5.4.35}$$

两边作 Hankel 变换

$$\mathbf{L}\varphi = \lambda\mathbf{L}^2\varphi + \mathbf{L}(f)$$

利用 Hankel 变换的性质式(5.4.33)

$$\mathbf{L}\varphi = \lambda\varphi + \mathbf{L}(f) \tag{5.4.36}$$

由上式与式(5.4.35)消去 $\mathbf{L}\varphi$

$$\varphi = \lambda[\lambda\varphi + \mathbf{L}(f)] + f$$

因此

$$\varphi = \frac{f+\lambda\mathbf{L}(f)}{1-\lambda^2}; \qquad \text{当 } 1-\lambda^2 \neq 0 \tag{5.4.37}$$

当 $1-\lambda^2=0$，有解的条件是 $f+\lambda\mathbf{L}(f)=0$.

考虑 $\mathbf{L}$ 的本征方程

$$\mathbf{L}\varphi = \mu\varphi \tag{5.4.38}$$

两边作用 $\mathbf{L}$, 并利用式(5.4.33)得到 $\varphi=\mu\mathbf{L}\varphi$, 再利用上式得到 $\varphi=\mu^2\varphi$. 因此, $\mathbf{L}$ 的本征值只有两个: $\mu_\pm=\pm1$. 于是, 条件 $1-\lambda^2\neq0$ 等价于 $\lambda\neq\mu_\pm$.

5.4.4 Hilbert 变换及逆变换

考虑 Hilbert 变换

$$\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{x-y}\mathrm{d}y=f(x),\qquad x\in(-\infty,\infty) \tag{5.4.39}$$

其中 $f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$, P 表示 Cauchy 主值积分. 上式两边作 Fourier 变换, 并用卷积定理

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\left[P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{x-y}\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\mathbf{F}(\varphi)\int_0^{\infty}\frac{\sin sy}{y}\mathrm{d}y=\mathrm{i}\mathbf{F}(\varphi)\mathrm{sgn}(s)\end{aligned} \tag{5.4.40}$$

故得

$$\mathrm{isgn}(s)\mathbf{F}(\varphi)=\mathbf{F}(f) \tag{5.4.41}$$

其中函数

$$\mathrm{sgn}(s)=\begin{cases}1, & s>0\\-1, & s<0.\end{cases} \tag{5.4.42}$$

另一方面, 作 Fourier 变换可得

$$\mathbf{F}\left[\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y\right]=\mathbf{F}(f)\mathrm{isgn}(s) \tag{5.4.43}$$

结合式(5.4.41)和上式得

$$\mathbf{F}(\varphi)=-\mathbf{F}\left[\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y\right] \tag{5.4.44}$$

因此

$$\varphi=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y \tag{5.4.45}$$

变换式(5.4.39)和(5.4.45)称为 Hilbert 变换对. 记 $\mathbf{H}f$ 如下

$$\mathbf{H}f=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y \tag{5.4.46}$$

则式(5.4.39)和(5.4.45)可表示成

$$\mathbf{H}\varphi=f;\qquad\varphi=-\mathbf{H}f \tag{5.4.47}$$

由上式可推出 Hilbert 变换的性质

$$\mathbf{H}^2\varphi=-\varphi. \tag{5.4.48}$$

例 5.4.4　利用 Hilbert 变换的性质, 解具有 Hilbert 核的积分方程.

$$\varphi-\frac{\lambda}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{x-y}\mathrm{d}y=f(x) \tag{5.4.49}$$

上式写成

$$\varphi - \lambda \mathbf{H}\varphi = f \tag{5.4.50}$$

两边用 $\mathbf{H}$ 作用，则得 $\mathbf{H}\varphi - \lambda \mathbf{H}^2\varphi = \mathbf{H}f$，利用式(5.4.48)

$$\mathbf{H}\varphi + \lambda\varphi = \mathbf{H}f \tag{5.4.51}$$

联立上式与式(5.4.50)可求得

$$(1+\lambda^2)\varphi = f + \lambda \mathbf{H}f \tag{5.4.52}$$

当 $1+\lambda^2 \neq 0$

$$\varphi = \frac{1}{1+\lambda^2}(f + \lambda \mathbf{H}f)$$

当 $1+\lambda^2=0$ 时，式(5.4.52)有解的条件是

$$f + \lambda \mathbf{H}f = 0 \tag{5.4.53}$$

考虑 $\mathbf{H}$ 的本征方程 $\mathbf{H}\varphi = \mu\varphi$，两边作用 $\mathbf{H}$ 得到 $\mathbf{H}^2\varphi = \mu\mathbf{H}\varphi$，利用式(5.4.48)可得到 $(1+\mu^2)\varphi=0$. 因此，$\mathbf{H}$ 的本征值 $\mu_\pm = \pm \mathrm{i}$. 于是，条件 $1+\lambda^2 \neq 0$ 等价于 $\lambda \neq \mu_\pm$. 考虑式(5.4.53)，当 $\lambda = \mu_+ = \mathrm{i}$ 时，$\mathbf{H}f = -\mathrm{i}f$. 因此 f 只能是 $\mathbf{H}$ 对应于 $\mu_- = -\mathrm{i}$ 的本征函数；当 $\lambda = \mu_- = -\mathrm{i}$ 时，$\mathbf{H}f = \mathrm{i}f$，即 f 只能是 $\mathbf{H}$ 对应于 $\mu_+ = \mathrm{i}$ 的本征函数.

例 5.4.5　求解

$$\frac{1}{\pi}P\int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{x-y}\mathrm{d}y = f(x), \qquad x \in (0,\infty) \tag{5.4.54}$$

其中 $f(x) \in L^2(0,\infty)$，上式与式(5.4.39)十分相似，但定义域不同，不能用 Hilbert 变换. 为了能化成卷积核的形式，作变换

$$x = \mathrm{e}^{2\xi}; \qquad y = \mathrm{e}^{2\eta}$$

$$\psi(\eta) = \varphi(\mathrm{e}^{2\eta})\mathrm{e}^{\eta}; \qquad g(\xi) = f(\mathrm{e}^{2\xi})\mathrm{e}^{\xi}$$

于是式(5.4.54)变成

$$\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^\infty \frac{\psi(\eta)}{\sinh(\xi-\eta)}\mathrm{d}\eta = g(\xi) \tag{5.4.55}$$

两边作用 $\mathbf{F}$ 可得

$$\mathbf{F}(\psi) = \frac{\cosh(\pi s/2)}{\mathrm{i}\sinh(\pi s/2)}\mathbf{F}(g) \tag{5.4.56}$$

得到上式已利用下述积分式

$$P\int_{\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\eta}}{\sinh\eta}\mathrm{d}\eta = 2\mathrm{i}\pi\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty(-1)^n \mathrm{e}^{-ns\pi}\right] = \frac{\mathrm{i}\pi\sinh(\pi s/2)}{\cosh(\pi s/2)} \tag{5.4.57}$$

注意：利用围道积分求上式积分时，$\sinh\eta$ 有无限多个单极点. 注意到

$$P\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sinh(\xi-\eta)}\mathrm{d}\eta = 0$$

故式(5.4.55)的齐次方程有非零解且这个非零解为常数 c，于是由式(5.4.56)得

$$\psi(\xi) = c + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi - \eta)\left[P\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\eta}\frac{\cosh(\pi s/2)}{\sinh(\pi s/2)}ds\right]d\eta \tag{5.4.58}$$

利用积分

$$P\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\eta}\frac{\cosh(\pi s/2)}{\sinh(s\pi/2)}ds = -2\pi i\left[\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\eta}\right] = -2i\frac{\cosh\eta}{\sinh\eta} \tag{5.4.59}$$

则得

$$\psi(\xi) = c - \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cosh(\xi - \eta)}{\sinh(\xi - \eta)}g(\eta)d\eta \tag{5.4.60}$$

回到 x 和 y 变数，最后得到式(5.4.54)的解

$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\pi}P\int_0^{\infty}\frac{x + y}{x - y}\frac{f(y)}{\sqrt{yx}}dy \tag{5.4.61}$$

习　题　五

5.1　用迭代法解积分方程

(a) $\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(y)dy = e^x$;

(b) $\varphi(x) + \lambda\int_0^1 e^{x+y}\varphi(y)dy = x$.

5.2　求下列可分解核积分方程的解

(a) $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 xe^y\varphi(y)dy = f(x)$;

(b) $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (x^2y + xy^2)\varphi(y)dy = x$;

(c) $\varphi(x) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x + 2y)\varphi(y)dy = \cos x$.

5.3　求方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^l k(x,y)\varphi(y)dy$$

的本征值和相应的本征函数，其中

$$k(x,y) = \begin{cases} x(l - y)/l, & x \leqslant y \\ y(l - x)/l, & y \leqslant x. \end{cases}$$

5.4　证明齐次方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^{\pi}(\sin x\sin 2y + \sin 3x\sin 4y)\varphi(y)dy$$

只有零解.

5.5　解下列积分方程

(a) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} k(x,y)\varphi(y)dy = 3$

其中

$$k(x,y) = \begin{cases} \sin x\cos y, & x \leqslant y \\ \sin y\cos x, & y \leqslant x; \end{cases}$$

(b) $\varphi(x) - \lambda\int_0^l k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \cos\frac{\pi x}{l}$

其中

$$k(x,y) = \begin{cases} x(l-y)/l, & x \leqslant y \\ y(l-x)/l, & y \leqslant x. \end{cases}$$

5.6 求积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^\pi k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y; \qquad k(x,y) = \begin{cases} x, & x \leqslant y \\ y, & y \leqslant x \end{cases}$$

的所有本征值和相应的本征函数.

5.7 解第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_0^a k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = x(a-x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

其中

$$k(x,y) = \begin{cases} \sinh(x-a)\sinh y, & y \leqslant x \\ \sinh x\sinh(y-a), & x \leqslant y. \end{cases}$$

5.8 考虑积分方程

$$\mathbf{K}u \equiv \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y)u(y)\mathrm{d}y = \lambda u(x), \qquad x \in (-\infty,\infty)$$

其中 t 为参数且 $0<t<1$，积分核为

$$k(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2-2xyt}{1-t^2}\right)$$

(a) 直接证明 $u_0(x)=\exp(-x^2/2)$是 $\mathbf{K}$ 的本征函数，相应的本征值为 $\lambda_0=\sqrt{\pi}$；

(b) 令

$$u_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x)(n = 0,1,2,\cdots)$$

其中 $H_n(x)$为 Hermite 多项式，用归纳法证明 $u_n(x)$是 $\mathbf{K}$ 的本征函数，相应的本征值为 $\lambda_n = t^n\sqrt{\pi}$；

(c) 证明展开关系

$$k(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(y)}{2^n n!}t^n.$$

5.9 考虑微分-积分算子

$$\mathbf{A}u \equiv -\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \int_0^1 xyu(y)\mathrm{d}y, \qquad x \in (0,1)$$

且 $u(x)$满足边界条件 $u(0)=u'(1)$.

(a) 证明 $\mathbf{A}$ 是对称的正算子；

(b) 证明非齐次方程

$$\mathbf{A}u = f(x), \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u'(0) = 0$$

的解为

$$u(x) = \int_0^1 \left[g(x,\xi) - \frac{5}{204}(3x - x^3)(3\xi - \xi^3) \right] f(\xi) \mathrm{d}\xi$$

其中 $g(x,\xi)$ 为 Green 函数

$$-\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x - \xi), \qquad x, \xi \in (0,1)$$

$$g(0,\xi) = g'(0,\xi) = 0$$

提示：非齐次方程可写成

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f - x\alpha, \qquad x \in (0,1); \qquad \alpha = \int_0^1 y u(y) \mathrm{d}y$$

然后利用 Green 函数求 $u(x)$ 的表达式，求出 α.

5.10　考虑上题中算子的本征值问题 $\mathbf{A}u = \lambda u$

(1) 证明上述问题可化为一个纯积分算子的本征值问题；

(2) 证明本征值 $\lambda = \alpha^2$ 满足方程

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} - \alpha^5$$

用图解法解上述方程，估计最小本征值大小；

(3) 利用

$$\lambda = \frac{\int_0^1 (v')^2 \mathrm{d}x + \left(\int_0^1 x v \mathrm{d}x \right)^2}{\int_0^1 v^2 \mathrm{d}x}$$

估计最小本征值大小. 提示：取 $v(x) = x(2 - x)$.

第六章　微扰理论

实际问题能严格求解的情况很少，因此求近似解具有重要意义．第四章介绍的变分法就是一种十分有效的求近似解方法，在数值计算中有重要的应用．本章讨论当方程中含有小参数 ε 或大参数 λ 时如何求近似解的问题．主要内容有：6.1 节集中讨论本征值问题的微扰理论；6.2 节关于正则微扰理论，介绍变形参数法和多尺度展开；6.3 节关于奇异微扰问题，讨论边界层理论及渐近匹配方法；最后，6.4节讨论含大参数的微分方程，介绍 WKB 近似和 Liouville-Green 变换法．

6.1　本征值问题的微扰

假定 Hermite 算子 $\mathbf{L}_0$ 的本征值问题

$$\mathbf{L}\,\varphi_n{}^0 = \lambda_n^0\rho(\boldsymbol{r})\varphi_n^0,\qquad \boldsymbol{r}\in G;\qquad \left(\alpha\varphi_n^0+\beta\frac{\partial\varphi_n^0}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0\quad(6.1.1)$$

严格可解，其本征函数集 $\{\varphi_n^0\}$ 构成完备的正交归一系．上式的微扰可有几种不同的形式：算子本身的微扰、边界条件的微扰以及区域的微扰．下面分别以具体例子讨论之．

6.1.1　算子本身的微扰

设 $\mathbf{L}$ 可表示成

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}_0+\varepsilon\mathbf{L}_1\qquad(6.1.2)$$

其中 $\varepsilon\ll1$，而 $\mathbf{L}_1$ 也是 Hermite 算子，因此整个算子 $\mathbf{L}$ 是 Hermite 算子．假定在微扰 $\varepsilon\mathbf{L}_1$ 作用下，本征函数系 $\{\varphi_n^0\}$ 变成 $\{\varphi_n\}$，相应的本征值 $\{\lambda_n^0\}$ 变成 $\{\lambda_n\}$．而且式(6.1.1)在 $\varepsilon\mathbf{L}_1$ 作用下是稳定的，即当 $\varepsilon\to0$ 时：$\{\varphi_n\}\to\{\varphi_n^0\}$ 和 $\{\lambda_n\}\to\{\lambda_n^0\}$．

考虑 $\mathbf{L}$ 的本征值问题

$$\mathbf{L}\varphi_n=\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\varphi_n,\qquad \boldsymbol{r}\in G;\qquad \left(\alpha\varphi_n+\beta\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G}=0\quad(6.1.3)$$

第一式写成

$$[\mathbf{L}_0-\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})]\varphi_n=-\varepsilon\mathbf{L}_1\varphi_n\qquad(6.1.4)$$

算子 $\mathbf{L}_0-\lambda_n\rho(\boldsymbol{r})$ 的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$可用 $\{\varphi_n^0\}$展开成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^0-\lambda_n}\varphi_i^{0*}(\boldsymbol{r}')\varphi_i^0(\boldsymbol{r})\qquad(6.1.5)$$

因此式(6.1.4)变成积分方程

$$\varphi_n(\boldsymbol{r}) = -\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varepsilon \mathbf{L}_1 \varphi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\lambda_n - \lambda_i^0}\varphi_i^0(\boldsymbol{r})\int_G \varphi_i^{0*}(\boldsymbol{r}')\mathbf{L}_1\varphi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{6.1.6}$$

因为当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\lambda_n \to \lambda_n^0$，故上式中 $i=n$ 一项单独写出

$$\begin{aligned}\varphi_n(\boldsymbol{r}) &= \frac{\varepsilon\varphi_n^0(\boldsymbol{r})}{\lambda_n - \lambda_n^0}\int_G \varphi_n^{0*}(\boldsymbol{r}')\mathbf{L}_1\varphi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \\ &\quad + \sum_{i\neq n}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\lambda_n - \lambda_i^0}\varphi_i^0(\boldsymbol{r})\int_G \varphi_i^{0*}(\boldsymbol{r}')\mathbf{L}_1\varphi_n(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \\ &= c_n\varphi_n^0(\boldsymbol{r}) + \sum_{i\neq n}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\lambda_n - \lambda_i^0}\varphi_i^0(\boldsymbol{r})(\varphi_i^0, \mathbf{L}_1\varphi_n)\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

其中

$$c_n = \frac{(\varphi_n^0, \varepsilon\mathbf{L}_1\varphi_n)}{\lambda_n - \lambda_n^0}.$$

另一方面，用 φ_n^0 取式(6.1.4)两边的内积

$$\begin{aligned}-\varepsilon(\varphi_n^0, \mathbf{L}_1\varphi_n) &= \{\varphi_n^0, [\mathbf{L}_0 - \lambda_n\rho]\varphi_n\} \\ &= (\varphi_n^0, \mathbf{L}_0\varphi_n) - (\varphi_n^0, \lambda_n\rho\varphi_n)\end{aligned} \tag{6.1.8}$$

利用 $\mathbf{L}_0$ 的 Hermite 对称性 $(\varphi_n^0, \mathbf{L}_0\varphi_n) = (\mathbf{L}_0\varphi_n^0, \varphi_n)$ 得到

$$\begin{aligned}-\varepsilon(\varphi_n^0, \mathbf{L}_1\varphi_n) &= (\mathbf{L}_0\varphi_n^0, \varphi_n) - \lambda_n\rho(\varphi_n^0, \varphi_n) \\ &= (\lambda_n^0 - \lambda_n)(\rho\varphi_n^0, \varphi_n)\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

因此 $c_n = (\rho\varphi_n^0, \varphi_n)$. 由于式(6.1.3)是齐次方程，$\varphi_n$ 可乘任意常数，故总可取 $c_n = 1$. 从式(6.1.7)和(6.1.9)得到

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda_n^0 + \varepsilon(\varphi_n^0, \mathbf{L}_1\varphi_n) \\ \varphi_n &= \varphi_n^0 + \varepsilon\sum_{i\neq n}^{\infty}\frac{\varphi_i^0}{\lambda_n - \lambda_i^0}(\varphi_i^0, \mathbf{L}_1\varphi_n)\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

上式与式(5.3.60)完全一样，我们用不同的方法导出了它们. 当 $\varepsilon \ll 1$ 时，上式可用迭代法解之

$$\lambda_n \approx \lambda_n^0 + \varepsilon(\varphi_n^0, \mathbf{L}_1\varphi_n^0) + \varepsilon^2\sum_{i\neq n}^{\infty}\frac{(\varphi_i^0, \mathbf{L}_1\varphi_n^0)^2}{\lambda_n^0 - \lambda_i^0} + \cdots$$

$$\varphi_n \approx \varphi_n^0 + \varepsilon\sum_{i\neq n}^{\infty}\frac{\varphi_i^0}{\lambda_n^0 - \lambda_i^0}(\varphi_i^0, \mathbf{L}_1\varphi_n^0) + \cdots \tag{6.1.11}$$

显然，上述讨论只适合于第 n 个本征值 λ_n^0 是非简并情况.

例 6.1.1 考虑平面上矩形区域 G:$[0<x<\pi,0<y<\pi]$上第一类边界条件下的本征值问题

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varepsilon xy\right)\varphi_n=\lambda_n\varphi;\qquad \varphi_n|_{\partial G}=0 \tag{6.1.12}$$

显然 $\mathbf{L}_0=-\nabla^2$,而 $\mathbf{L}_1=xy$,$\mathbf{L}_0$的本征函数系$\{\varphi_{nm}^0\}$为

$$\varphi_{nm}^0=\frac{2}{\pi}\sin nx\sin my,\qquad (n,m=1,2,\cdots) \tag{6.1.13}$$

相应的本征值 $\lambda_{nm}^0=n^2+m^2$,当 $n\neq m$ 时,$\lambda_{nm}^0=\lambda_{mn}^0$,故本征态 $\lambda_{nm}^0(n\neq m)$有两个独立的本征函数

$$\varphi_{nm}^0=\frac{2}{\pi}\sin nx\sin my;\qquad \varphi_{mn}^0=\frac{2}{\pi}\sin mx\sin ny \tag{6.1.14}$$

这时 λ_{nm}^0是简并态($n\neq m$). 但当 $n=m$ 时,λ_{nm}^0是非简并的,于是可用公式(6.1.11)求微扰量. 例如 $n=m=1$ 时 λ_{11}^0的微扰量

$$\Delta\lambda_{11}\equiv\varepsilon(\varphi_{11}^0,xy\,\varphi_{11}^0)=\varepsilon\,\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi xy\sin^2x\sin^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\varepsilon\pi^2}{4} \tag{6.1.15}$$

因此本征值至一级微扰为 $\lambda_{11}=\lambda_{11}^0+\varepsilon\pi^2/4=2+\varepsilon\pi^2/4$.

6.1.2 简并态的微扰

仍考虑式(6.1.3),但这时设未扰动态 λ_n^0是 f 度简并的,相应的 f 个本征函数为$\{\varphi_{nk}^0,k=1,2,\cdots,f\}$. 这时有可能发生这样的情况:由于 $\mathbf{L}_1$ 的作用,降低 λ_n^0的简并度. 问题是零级本征函数$\{\varphi_{nk}^0\}$应如何选择? 下面来解决这个问题. 设式(6.1.3)的解可展成 ε 幂级数的解为

$$\begin{aligned}\lambda_n&=\lambda_n^0+\varepsilon\lambda_n^1+\varepsilon^2\lambda_n^2+\cdots\\ \varphi_n&=\varphi_n^0+\varepsilon\varphi_n^1+\varepsilon^2\varphi_n^2+\cdots\end{aligned} \tag{6.1.16}$$

代入式(6.1.4),比较 ε 的同次幂系数得

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\varphi_n^0&=\lambda_n^0\rho\varphi_n^0\\ \mathbf{L}_0\varphi_n^1+\mathbf{L}_1\varphi_n^0&=(\lambda_n^0\varphi_n^1+\lambda_n^1\varphi_n^0)\rho\end{aligned} \tag{6.1.17}$$

由于 $\varphi_{nk}^0(k=1,2,\cdots,f)$都满足(6.1.17)第一式,故作线性组合

$$\varphi_n^0=\sum_{k=1}^{f}c_k^0\varphi_{nk}^0 \tag{6.1.18}$$

作为零级本征函数. 此外,对一级近似本征函数作广义 Fourier 展开

$$\varphi_n^1=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^1\varphi_i^0 \tag{6.1.19}$$

上二式代入(6.1.17)第二式应有

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_i^1(\lambda_n^0-\lambda_i^0)\rho\varphi_i^0=\sum_{k=1}^{f}c_k^0(\mathbf{L}_1-\lambda_n^1\rho)\varphi_{nk}^0 \tag{6.1.20}$$

上式两边乘 $\varphi_{nj}^{0^*}\ (j=1,2,\cdots,f)$并积分

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^1(\lambda_n^0-\lambda_i^0)\int_G \rho\varphi_{nj}^{0^*}\varphi_i^0 \mathrm{d}\tau = \sum_{k=1}^{f} c_k^0\int_G \varphi_{nj}^{0^*}(\mathbf{L}_1-\lambda_n^1\rho)\varphi_{nk}^0\mathrm{d}\tau \tag{6.1.21}$$

因当 $i\neq n$，φ_{nj}^0与 φ_i^0 正交，而当 $i=n$ 时$\lambda_n^0=\lambda_i^0$，故上式左边恒为零．于是有

$$\sum_{k=1}^{f} c_k^0[(\varphi_{nj}^0,\mathbf{L}_1\varphi_{nk}^0)-\lambda_n^1\delta_{jk}]=0,\quad (j=1,2,\cdots,f) \tag{6.1.22}$$

上式存在非零解的条件是

$$\det[(\varphi_{nj}^0,\mathbf{L}_1\varphi_{nk}^0)-\lambda_n^1\delta_{jk}]=0 \tag{6.1.23}$$

由上二式可求得 f 个λ_n^1 及f 套系数$c_k^0(k=1,2,\cdots,f)$．如果 f 个 λ_n^1 各不相同，则由式(6.1.22)得到 f 个零级近似本征函数．由于微扰的作用，第 n 个本征值λ_n^0 的简并完全消除；如果 λ_n^1 有重根，则 λ_n^0 的简并度降低．式(6.1.23)称为**久期方程**．

当 $\mathbf{L}_1$ 是 Hermite 算子时

$$(\varphi_{nj}^0,\mathbf{L}_1\varphi_{nk}^0)=(\mathbf{L}_1\varphi_{nj}^0,\varphi_{nk}^0)=(\varphi_{nk}^0,\mathbf{L}_1\varphi_{nj}^0)^* \tag{6.1.24}$$

因此，由元素 $H_{jk}=(\varphi_{nj},\mathbf{L}_1\varphi_{nk})$构成的矩阵是 Hermite 矩阵，有 f 个实的本征值 $\lambda_{np}^1(p=1,2,\cdots,f)$，于是 λ_n 的一级近似为

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\varepsilon\lambda_{np}^1\qquad (p=1,2,\cdots,f). \tag{6.1.25}$$

例 6.1.2 设 λ_n^0 是二度简并的，即对应 λ_n^0 有两个本征函数φ_{n1}^0及 φ_{n2}^0，则

$$h_{11}\equiv(\varphi_{n1}^0;\mathbf{L}_1\varphi_{n1}^0);\quad h_{12}\equiv(\varphi_{n1}^0,\mathbf{L}_1\varphi_{n2}^0)\equiv h_{21}^*;\quad h_{22}\equiv(\varphi_{n2}^0,\mathbf{L}_1\varphi_{n2}^0) \tag{6.1.26}$$

故 λ_n^1 满足

$$\begin{vmatrix} h_{11}-\lambda_n^1 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}-\lambda_n^1 \end{vmatrix}=0 \tag{6.1.27}$$

上式的二个根是

$$\lambda_{n\pm}^1=\frac{1}{2}\left[-(h_{11}+h_{22})\pm\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4\,|h_{21}|^2}\right] \tag{6.1.28}$$

考虑例 6.1.1，取 $n=1$ 和 $m=2$，$\lambda_{21}^0=\lambda_{12}^0=5$ ，h_{ij}为

$$h_{11}=h_{22}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} xy\sin^2 2x\sin^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}$$

$$h_{21}=h_{12}=\frac{4}{\pi^2}\left[\int_0^{\pi} x\ \sin x\sin 2x\mathrm{d}x\right]^2=\frac{16}{9\pi^2} \tag{6.1.29}$$

因此，在微扰作用下本征值 λ_{21}^0分裂成两个

$$\lambda_{2,1}^+=5+\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{\pi^2}{2}+\frac{32}{9\pi^2}\right);\qquad \lambda_{2,1}^-=5+\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{\pi^2}{2}-\frac{32}{9\pi^2}\right) \tag{6.1.30}$$

简并消除．

例 6.1.3　一维本征值问题

$$-\left[\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}+\varepsilon g(x)\varphi\right]=\lambda\varphi;\qquad \varphi\ |_{x=0}=\varphi|_{x=1}=0 \tag{6.1.31}$$

零级本征函数为 $\varphi_n^0=\sqrt{2}\sin n\pi x$，相应的本征值 $\lambda_n^0=\pi^2n^2(n=1,2,\cdots)$，于是

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\varepsilon(\varphi_n^0,\mathbf{L}_1\varphi_n^0)=\lambda_n^0-2\varepsilon\int_0^1 g(x)\sin^2 n\pi x\mathrm{d}x$$

但如果边界条件为周期性边界条件

$$\varphi\ |_{x=0}=\varphi|_{x=1};\qquad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} \tag{6.1.32}$$

则零级本征值为 $\lambda_n^0=4\pi^2n^2$，相应于 λ_n^0 有两个独立的零级本征函数

$$\varphi_{nc}^0=\sqrt{2}\cos 2n\pi x;\qquad \varphi_{ns}^0(x)=\sqrt{2}\sin 2n\pi x\qquad (n\geqslant 1)$$

因此当 $n\geqslant 1$ 时，λ_n^0 二度简并，而 $\lambda_0^0=0$ 非简并：$\varphi_0^0=\sqrt{2}$．考虑 $n\geqslant 1$

$$h_{11}=-2\int_0^1 g(x)\sin^2 2n\pi x\mathrm{d}x;\qquad h_{22}=-2\int_0^1 g(x)\cos^2 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$h_{12}=h_{21}=-2\int_0^1 g(x)\sin 4n\pi x\mathrm{d}x$$

λ_n^0 的一级修正为

$$\lambda_{n\pm}^1=-\frac{1}{2}\left[(h_{11}+h_{22})\pm\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4h_{21}^2}\right]$$

下面求零级本征函数，由式(6.1.22)

$$c_1^0(h_{11}-\lambda_n^1)+c_2^0h_{12}=0;\qquad c_1^0h_{21}+c_2^0(h_{22}-\lambda_n^1)=0$$

当 $\lambda_n^1=\lambda_{n\pm}^1$ 时

$$c_2^0=-\frac{(h_{11}-\lambda_{n\pm}^1)}{h_{12}}c_1^0\qquad 或者\qquad c_1^0=-\frac{(h_{22}-\lambda_{n\pm}^1)}{h_{21}}c_2^0$$

代入式(6.1.18)

$$\varphi_n^0=\sum_{k=1}^2 c_k^0\varphi_{nk}^0=c_1^0\varphi_{nc}^0+c_2^0\varphi_{ns}^0=c_1^0\left(\varphi_{nc}^0-\frac{h_{11}-\lambda_{n\pm}^1}{h_{12}}\varphi_{ns}^0\right)$$

如取 $c_1^0=1$，则零级近似本征函数分别为 φ_{n+}^0 和 φ_{n-}^0

$$\varphi_{n+}^0=\sqrt{2}\cos 2\pi nx-\frac{h_{11}-\lambda_{n+}^1}{h_{12}}\sqrt{2}\sin 2\pi nx \tag{6.1.33}$$

$$\varphi_{n-}^0=\sqrt{2}\cos 2\pi nx-\frac{h_{11}-\lambda_{n-}^1}{h_{12}}\sqrt{2}\sin 2\pi nx \tag{6.1.34}$$

相应的一级近似本征值为

$$\lambda_{n+}=4\pi^2n^2-\frac{\varepsilon}{2}\left[(h_{11}+h_{22})-\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4h_{21}^2}\right] \tag{6.1.35}$$

$$\lambda_{n-}=4\pi^2n^2-\frac{\varepsilon}{2}\left[(h_{11}+h_{22})+\sqrt{(h_{11}-h_{22})^2+4h_{21}^2}\right] \tag{6.1.36}$$

如果 $h_{11}=h_{22}, h_{21}=h_{12}=0$，则式(6.1.28)的两个根相等：$\lambda_{n+}^1=\lambda_{n-}^1$. 因此，在一级近似下，简并不能消除，而要考虑高级近似.

6.1.3 边界条件的微扰

考虑本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_n}{\mathrm{d}x^2}=\lambda_n\varphi_n;\qquad \varphi_n\big|_{x=0}=0;\qquad \left(\varepsilon\frac{\mathrm{d}\varphi_n}{\mathrm{d}x}+\varphi_n\right)\bigg|_{x=1}=0 \tag{6.1.37}$$

微扰出现在边界条件上. 当 $\varepsilon=0$ 时，本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_n^0}{\mathrm{d}x^2}=\lambda_n^0\varphi_n^0,\qquad x\in(0,1);\qquad \varphi_n^0\big|_{x=0}=\varphi_n^0\big|_{x=1}=0 \tag{6.1.38}$$

的解为 $\varphi_n^0=\sqrt{2}\sin n\pi x$；$\lambda_n^0=n^2\pi^2$. 当 $\varepsilon\neq0$ 时，φ_n 在 $x=1$ 处满足第三类边界条件. 作微扰展开

$$\varphi_n=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\varphi_n^j;\qquad \lambda_n=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\lambda_n^j \tag{6.1.39}$$

代入式(6.1.37)得 φ_n^0 满足的方程为式(6.1.38)，而 φ_n^1 满足

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi_n^1}{\mathrm{d}x^2}-\lambda_n^0\varphi_n^1=\lambda_n^1\varphi_n^0;\qquad \varphi_n^1\big|_{x=0}=0;\qquad \varphi_n^1\big|_{x=1}=-\frac{\mathrm{d}\varphi_n^0}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=1} \tag{6.1.40}$$

为求 λ_n^1，无需求出上式的解. 用 φ_n^0 乘(6.1.40)第一式并积分，则得

$$\begin{aligned}\lambda_n^1&=-\int_0^1\left(\varphi_n^0\frac{\mathrm{d}^2\varphi_n^1}{\mathrm{d}x^2}+\lambda_n^0\varphi_n^1\varphi_n^0\right)\mathrm{d}x\\&=-\varphi_n^0\frac{\mathrm{d}\varphi_n^1}{\mathrm{d}x}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{\mathrm{d}\varphi_n^1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varphi_n^0}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\int_0^1\lambda_n^0\varphi_n^1\varphi_n^0\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.1.41}$$

由式(6.1.38)得到

$$\lambda_n^1=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\varphi_n^0}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\varphi_n^1-\int_0^1\lambda_n^0\varphi_n^1\varphi_n^0\mathrm{d}x \tag{6.1.42}$$

分部积分得到

$$\lambda_n^1=\varphi_n^1\frac{\mathrm{d}\varphi_n^0}{\mathrm{d}x}\bigg|_0^1-\int_0^1\varphi_n^1\frac{\mathrm{d}^2\varphi_n^0}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\lambda_n^0\varphi_n^1\varphi_n^0\mathrm{d}x$$

利用式(6.1.38)及(6.1.40)

$$\begin{aligned}\lambda_n^1&=-\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_n^0}{\mathrm{d}x}\right)^2\bigg|_{x=1}+\lambda_n^0\int_0^1(-\varphi_n^1\varphi_n^0+\varphi_n^1\varphi_n^0)\mathrm{d}x\\&=-\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_n^0}{\mathrm{d}x}\right)^2\bigg|_{x=1}=-2\pi^2n^2\end{aligned} \tag{6.1.43}$$

因此，在一级近似下 λ_n 为

$$\lambda_n \approx n^2\pi^2 - 2\varepsilon n^2\pi^2 = n^2\pi^2(1-2\varepsilon) \tag{6.1.44}$$

显然上式成立的条件是 $\varepsilon \ll 1/2$，n 越大，近似程度越差.

考虑三维算子 $\mathbf{L} = -\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$的本征值问题

$$\mathbf{L}\varphi_n = \lambda_n\rho(\boldsymbol{r})\varphi_n, \qquad \boldsymbol{r}\in G; \qquad \left(\varphi_n + \varepsilon\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0 \tag{6.1.45}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1$,作微扰展开

$$\varphi_n = \sum_{j=0}\varepsilon^j\varphi_n^j; \qquad \lambda_n = \sum_{j=0}\varepsilon^j\lambda_n^j$$

代入式(6.1.45)得零级近似方程

$$\mathbf{L}\varphi_n^0 = \lambda_n^0\rho\varphi_n^0; \qquad \varphi_n^0|_{\partial G} = 0 \tag{6.1.46}$$

一级近似方程

$$\mathbf{L}\varphi_n^1 - \lambda_n^0\rho\varphi_n^1 = \lambda_n^1\rho\varphi_n^0; \qquad \varphi_n^1|_{\partial G} = -\frac{\partial\varphi_n^0}{\partial n}\bigg|_{\partial G} \tag{6.1.47}$$

设式(6.1.46)可解出$\{\varphi_n^0\}$及$\{\lambda_n^0\}$. 下面由式(6.1.47)求 λ_n^1. 用 $\varphi_n^{0^*}$ 乘第一式两边，并积分

$$\lambda_n^1 = \int_G(\varphi_n^{0^*}\mathbf{L}\varphi_n^1 - \lambda_n^0\rho\varphi_n^{0*}\varphi_n^1)\mathrm{d}\tau \tag{6.1.48}$$

利用 Green 公式

$$\int_G(\varphi_n^{0^*}\mathbf{L}\varphi_n^1 - \varphi_n^1\mathbf{L}\varphi_n^{0^*})\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left(\varphi_n^1\frac{\partial\varphi_n^{0^*}}{\partial n} - \varphi_n^{0^*}\frac{\partial\varphi_n^1}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

并且由式(6.1.46)和(6.1.47)

$$\int_G\varphi_n^{0^*}\mathbf{L}\varphi_n^1\mathrm{d}\tau = \lambda_n^0\int_G\rho\varphi_n^{0*}\varphi_n^1\mathrm{d}\tau - \iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left|\frac{\partial\varphi_n^0}{\partial n}\right|^2\mathrm{d}S$$

代入式(6.1.48)得 λ_n^0 的一级修正

$$\lambda_n^1 = -\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\left|\frac{\partial\varphi_n^0}{\partial n}\right|^2\mathrm{d}S \tag{6.1.49}$$

如果 λ_n^0 是f度简并的，令零级本征函数 φ_n^0 为

$$\varphi_n^0 = \sum_{k=1}^{f}c_k^0\varphi_{nk}^0$$

于是式(6.1.47)变成

$$\mathbf{L}\varphi_n^1 - \lambda_n^0\rho\varphi_n^1 = \lambda_n^1\rho\sum_{k=1}^{f}c_k^0\varphi_{nk}^0; \qquad \varphi_n^1\bigg|_{\partial G} = -\sum_{k=1}^{f}c_k^0\frac{\partial\varphi_{nk}^0}{\partial n}\bigg|_{\partial G} \tag{6.1.50}$$

用 $\varphi_{nj}^{0^*}(j=1,2,\cdots,f)$乘(6.1.50)第一式两边，并积分

$$\lambda_n^1\sum_{k=1}^{f}c_k^0\int_G\rho\varphi_{nj}^{0^*}\varphi_{nk}^0\mathrm{d}\tau = -\iint_{\partial G}p(\boldsymbol{r})\sum_{k=1}^{f}c_k^0\left(\frac{\partial\varphi_{nk}^0}{\partial n}\cdot\frac{\partial\varphi_{nj}^{0^*}}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{6.1.51}$$

令

$$\alpha_{kj} = -\iint_{\partial G} p(\boldsymbol{r}) \left(\frac{\partial \varphi_{nk}^{0}}{\partial n} \frac{\partial \varphi_{nj}^{0*}}{\partial n}\right) \mathrm{d}S$$

并利用 φ_{nj}^{0*} 的正交性，上式变成

$$\sum_{k=1}^{f} c_k^0 (\alpha_{kj} - \lambda_n^1 \delta_{kj}) = 0 \tag{6.1.52}$$

于是得到 λ_n^1 满足的方程

$$\det(\alpha_{kj} - \lambda_n^1 \delta_{kj}) = 0 \tag{6.1.53}$$

由上二式可求得 f 套系数 c_n^0 以及 f 个 λ_n^1，从而求得本征函数的零级近似及本征值的一级近似.

6.1.4　区域微扰

考虑算子 $\mathbf{L} = -\nabla \cdot [p(\boldsymbol{r})\nabla] + q(\boldsymbol{r})$ 的本征值问题

$$\mathbf{L}\varphi_n = \lambda_n \rho(\boldsymbol{r}) \varphi_n, \qquad \boldsymbol{r} \in G; \qquad \left.\left(\alpha\varphi_n + \beta \frac{\partial \varphi_n}{\partial n}\right)\right|_{\Gamma(\varepsilon)} = 0 \tag{6.1.54}$$

其中 G 的边界 $\Gamma(\varepsilon)$ 含有小参数 ε. 当 $\varepsilon=0$ 时，$\Gamma(0)$ 是规则区域(比如矩形或圆)而当 $\varepsilon \ll 1$，区域的变化可看作微扰. 下面通过具体例子来说明如何求解上述问题.

考虑近似圆形膜的横向本征振动

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u; \qquad u\big|_{r=0} < \infty; \qquad u\big|_{r=1+\varepsilon f(\theta)} = 0 \tag{6.1.55}$$

膜的平均半径为 1，而 $\varepsilon f(\theta)$ 为偏差，可视作微扰且有

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \mathrm{d}\theta = 0 \tag{6.1.56}$$

令

$$u(r,\theta,t) = \varphi(r,\theta)\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{6.1.57}$$

其中 ω 为待求的本征振动频率. 代入式(6.1.55)得

$$-\nabla^2 \varphi = \omega^2 \varphi; \qquad \varphi\big|_{r=0} < \infty; \qquad \varphi\big|_{r=1+\varepsilon f(\theta)} = 0 \tag{6.1.58}$$

作微扰展开

$$\begin{gathered} \varphi = \varphi_0(r,\theta) + \varepsilon\varphi_1(r,\theta) + \cdots \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \cdots \end{gathered} \tag{6.1.59}$$

代入式(6.1.58)得 $\varphi_0(r,\theta)$ 和 $\varphi_1(r,\theta)$ 满足的方程及边界条件

$$-\nabla^2 \varphi_0(r,\theta) = \omega_0^2 \varphi_0(r,\theta); \qquad \varphi_0(r,\theta)\big|_{r=0} < \infty; \qquad \varphi_0(r,\theta)\big|_{r=1} = 0 \tag{6.1.60}$$

及

$$-\nabla^2\varphi_1(r,\theta)-\omega_0^2\varphi_1(r,\theta)=2\omega_0\omega_1\varphi_0(r,\theta)$$

$$\varphi_1(r,\theta)\big|_{r=0}<\infty;\qquad \varphi_1(r,\theta)\big|_{r=1}=-\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\bigg|_{r=1}f(\theta)\qquad(6.1.61)$$

式(6.1.61)也可由下法求得，因 $\varepsilon\ll 1$，故式(6.1.58)第三式作 Taylor 展开

$$\varphi(1,\theta)+\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=1}\cdot f(\theta)=0\qquad(6.1.62)$$

式(6.1.59)代入上式

$$\varphi_0(1,\theta)+\varepsilon\varphi_1(1,\theta)+\varepsilon\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\bigg|_{r=1}\cdot f(\theta)+\varepsilon^2\cdots=0$$

可推得

$$\varphi_0(1,\theta)=0;\qquad \varphi_1(1,\theta)+\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\bigg|_{r=1}\cdot f(\theta)=0$$

零级近似方程(6.1.60)解容易求得为

$$\varphi_0(r,\theta)=J_m(\Omega_{mn}r)(c_{mn}^1\cos m\theta+c_{mn}^2\sin m\theta)\qquad(m=1,2,\cdots)\qquad(6.1.63)$$

或者用指数表示

$$\varphi_0(r,\theta)=c_{mn}J_m(\Omega_{mn}r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\qquad(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)\qquad(6.1.64)$$

其中 Ω_{mn}是 m 阶 Bessel 函数 J_m 的第 n 个零点：$J_m(\Omega_{mn})=0$. 本征值 ω 的零级近似 $\omega_0=\Omega_{mn}$. 当 $m\neq 0$，对每一个 $\omega_0=\Omega_{mn}$存在两个线性独立的本征函数

$$\varphi_{mn}^c=J_m(\Omega_{mn}r)\cos m\theta;\qquad \varphi_{mn}^s=J_m(\Omega_{mn}r)\sin m\theta\qquad(6.1.65)$$

因此，当 $m>0,\Omega_{mn}$二度简并，取零级近似本征函数 φ_{mn}^0为

$$\varphi_{mn}^0=a_{mn}\varphi_{mn}^c+b_{mn}\varphi_{mn}^s\qquad(6.1.66)$$

代入式(6.1.61)得

$$-\nabla^2\varphi_1-\Omega_{mn}^2\varphi_1=2\Omega_{mn}\omega_1\varphi_{mn}^0$$

$$\varphi_1\big|_{r=1}=-\frac{\partial\varphi_{mn}^0}{\partial r}\bigg|_{r=1}\cdot f(\theta)\qquad(6.1.67)$$

用 φ_{mn}^c乘第一式两边，并在圆域内积分

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\int_0^1\int_0^{2\pi}(2\Omega_{mn}\omega_1\varphi_{mn}^0)\varphi_{mn}^c r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=2\Omega_{mn}\omega_1\int_0^1\int_0^{2\pi}[a_{mn}(\varphi_{mn}^c)^2+b_{mn}\varphi_{mn}^s\varphi_{mn}^c]r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=2\Omega_{mn}\omega_1\pi a_{mn}\int_0^1 J_m^2(\Omega_{mn}r)r\,\mathrm{d}r=\Omega_{mn}\omega_1\pi J_m'^2(\Omega_{mn})a_{mn}\end{aligned}\qquad(6.1.68)$$

其中已利用 φ_{mn}^c和 φ_{mn}^s正交性关系以及 Bessel 函数的积分关系

$$\int_0^r rJ_m^2(kr)\mathrm{d}r = \frac{1}{2}r^2J_m'^2(kr) + \frac{1}{2}r^2\left(1 - \frac{m^2}{k^2r^2}\right)J_m^2(kr)$$

当 $r=1$ 和 $J_m(\Omega_{mn})=0$

$$\int_0^1 rJ_m^2(\Omega_{mn}r)\mathrm{d}r = \frac{1}{2}J_m'^2(\Omega_{mn})$$

另一方面对左边积分

$$左边 = -\int_G \varphi_{mn}^c \nabla^2\varphi_1\mathrm{d}\tau - \Omega_{mn}^2\int_G \varphi_{mn}^c\varphi_1\mathrm{d}\tau$$

利用二维 Green 公式

$$\int_G \varphi_{mn}^c \nabla^2\varphi_1\mathrm{d}\tau = \int_G \varphi_1 \nabla^2\varphi_{mn}^c + \int_{\partial G}\left(\varphi_{mn}^c\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varphi_1\frac{\partial\varphi_{mn}^c}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

以及 φ_{mn}^c 满足的方程及边界条件：$-\nabla^2\varphi_{mn}^c = \Omega_{mn}^2\varphi_{mn}^c$ 和 $\varphi_{mn}^c|_{r=1}=0$，我们得到

$$\begin{aligned}左边 &= \int_{\partial G}\left(\frac{\partial\varphi_{mn}^0}{\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi_{mn}^c}{\partial r}\right)\bigg|_{r=1}\cdot f(\theta)\mathrm{d}S \\ &= \Omega_{mn}^2J_m'^2(\Omega_{mn})\int_0^{2\pi}(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)f(\theta)\cos m\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{6.1.69}$$

令

$$\alpha_m = \int_0^{2\pi} f(\theta)\cos^2 m\theta\mathrm{d}\theta; \qquad \beta_m = \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin m\theta\cos m\theta\mathrm{d}\theta$$

由式(6.1.68)和(6.1.69)得

$$(a_{mn}\alpha_m + b_{mn}\beta_m)\Omega_{mn}^2J_m'^2(\Omega_{mn}) = \Omega_{mn}\omega_1\pi J_m'^2(\Omega_{mn})a_{mn}$$

即

$$a_{mn}\left(\alpha_m - \frac{\omega_1\pi}{\Omega_{mn}}\right) + b_{mn}\beta_m = 0 \tag{6.1.70}$$

同样，以 φ_{mn}^s 乘(6.1.67)第一式两边且在圆域内积分，可得

$$a_{mn}\gamma_m + b_{mn}\left(\eta_m - \frac{\omega_1\pi}{\Omega_{mn}}\right) = 0 \tag{6.1.71}$$

其中

$$\gamma_m = \int_0^{2\pi} f(\theta)\cos m\theta\sin m\theta\mathrm{d}\theta = \beta_m$$

$$\eta_m = \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin^2 m\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta - \alpha_m = -\alpha_m$$

式(6.1.70)和(6.1.71)有解条件是

$$\begin{vmatrix} \alpha_m - \dfrac{\omega_1\pi}{\Omega_{mn}} & \beta_m \\ \gamma_m & \eta_m - \dfrac{\omega_1\pi}{\Omega_{mn}} \end{vmatrix} = 0 \tag{6.1.72}$$

利用 α_m、γ_m、β_m 和 η_m 之间的关系，可求得 ω_1 的两个根

$$\omega_1^{\pm} = \pm \Omega_{mn} \frac{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}}{\pi} \tag{6.1.73}$$

因此，我们求得本征振动频率的一级近似解为

$$\omega_{mn}^{\pm} = \Omega_{mn}\left(1 \pm \varepsilon \frac{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}}{\pi}\right)(m \geqslant 1)$$

相应的零级近似本征振动为

$$\begin{aligned} u^{\pm}(r,\theta,t) &= \varphi_{mn}^{\pm 0}(r,\theta)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}^{\pm}t) \\ &= (a_{mn}^{\pm}\varphi_{mn}^{c} + b_{mn}^{\pm}\varphi_{mn}^{s})\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}^{\pm}t)(m \geqslant 1) \end{aligned}$$

如果 $\alpha_m \neq 0$ 或者 $\beta_m \neq 0$，由于微扰而使简并消除. 当 $m=0$，如果

$$\alpha_0 = \int_0^{2\pi} f(\theta)\cos^2 m\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$$

而 $\beta_0 = \gamma_0 = \eta_0 = 0$,式 (6.1.70)和(6.1.71)变成

$$b_{0n} = 0; \qquad a_{0n}\left(\alpha_0 - \omega_1 \frac{\pi}{\Omega_{0n}}\right) = 0 \tag{6.1.74}$$

故 $\omega_1 = \alpha_0\Omega_{0n}/\pi = 0$. 因此在一级近似下，微扰对 $m=0$ 本征态无影响.

例 6.1.4 半径为1的圆区域由于微扰变成椭圆

$$r^2 = \frac{1}{1 + 2\varepsilon\cos^2\theta} \approx 1 - 2\varepsilon\cos^2\theta$$

故 $r \approx 1 - \varepsilon\cos^2\theta$; $f(\theta) = -\cos^2\theta$; $\alpha_0 = -\pi$，因此 $m=0$ 时，零级本征函数及一级近似本征值为

$$\varphi_{0n}^0 = a_{0n}J_0(\Omega_{0n}r); \qquad \omega_{0n} \approx \Omega_{0n}(1 - \varepsilon) \tag{6.1.75}$$

当 $\varepsilon > 0$ 时，椭圆大于圆区域，故本征值变小；当 $\varepsilon < 0$ 时，椭圆小于圆区域，本征值变大，这与第四章的结论是一致的. 注意：本例中

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta \neq 0.$$

6.2 正则微扰

由 6.1 节可看出，本征值问题微扰的一个特点是零级近似可解，这样的微扰称之为**正则微扰**. 正则微扰一般不改变问题的基本性质，特别是方程的阶数. 但是如果小参数 ε 出现在方程的高阶导数上，定解问题的性质由于 $\varepsilon \neq 0$ 而完全改变，而且这时零级近似一般是超定的，这样的微扰称之为**奇异微扰**. 我们将在6.3节详细讨论之.

6.2.1　一致有效展开

当所考虑的问题定义在有限区域 G 内时，一般能得到在 G 上一致有效展开，但如果问题是无界(如 $t>0$)的，则微扰展开往往只在某一区间才成立．这时在不同的区间应有不同的展开式．我们首先讨论前一种情形，并以具体例子来说明之．

例 6.2.1　平面上单位圆内的第一类边值问题

$$\nabla^2\varphi + \varepsilon^2\varphi = 0, \qquad r \in G; \qquad \varphi|_{r=1} = 1 \tag{6.2.1}$$

其中 $\varepsilon \ll 1$，区域 G 为圆内 $x^2+y^2<1$．作微扰展开

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}\varphi_n \tag{6.2.2}$$

代入式(6.2.1)并比较 ε 的同次幂，可得 φ_0 满足的方程及边界条件

$$\nabla^2\varphi_0 = 0; \qquad \varphi_0|_{r=1} = 1 \tag{6.2.3}$$

可见零级近似 φ_0 满足 Laplace 方程及第一类边值条件，而 $\varphi_n(n\geqslant 1)$满足 Poisson 方程及第一类边值条件

$$\nabla^2\varphi_n = -\varphi_{n-1}, \qquad (n \geqslant 1); \qquad \varphi_n|_{r=1} = 0 \tag{6.2.4}$$

从式(6.2.3)可解得 $\varphi_0(r)=1$．考虑一阶近似 φ_1

$$\nabla^2\varphi_1 = -\varphi_0 = -1; \qquad \varphi_1|_{r=1} = 0 \tag{6.2.5}$$

在极坐标内上式变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\right) = -r$$

积分两次并利用 (6.2.5)第二式可得

$$\varphi_1 = \frac{1-r^2}{4} \tag{6.2.6}$$

因此近似到 ε^2，式(6.2.1)的解为

$$\varphi = 1 + \varepsilon^2\left(\frac{1-r^2}{4}\right) + O(\varepsilon^4) \tag{6.2.7}$$

而式(6.2.1)的严格解为

$$\varphi = \frac{J_0(\varepsilon r)}{J_0(\varepsilon)} \tag{6.2.8}$$

当 $\varepsilon\ll 1$ 时，因 $r\leqslant 1$，故 $\varepsilon r\ll 1$，上式作展开

$$\frac{J_0(\varepsilon r)}{J_0(\varepsilon)} = \frac{1-(\varepsilon r)^2/4 + O(\varepsilon^4)}{1-\varepsilon^2/4+O(\varepsilon^4)} \approx 1 + \varepsilon^2\left(\frac{1-r^2}{4}\right) + O(\varepsilon^4) \tag{6.2.9}$$

可知只要 $\varepsilon\ll 1$，式(6.2.7)是严格解的一个很好近似，而且近似解在整个区域 G 内都成立．

例 6.2.2 边界区域的微扰. 考虑 G 内 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2}=0,\qquad (x,y)\in G \tag{6.2.10}$$

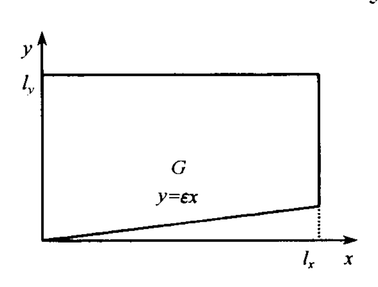


图 6.2.1 区域的微扰

区域为 G: $[0<x<l_x, \varepsilon x<y<l_y]$, 如图 6.2.1. 边界条件为

$$\varphi\big|_{x=0}=\varphi\big|_{x=l_x}=0$$

$$\varphi\big|_{y=l_y}=0;\qquad \varphi\big|_{y=\varepsilon x}=f(x) \tag{6.2.11}$$

作微扰展开

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\varphi_n(x,y) \tag{6.2.12}$$

代入式(6.2.10), $\varphi_n(x,y)$ 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2}=0 \tag{6.2.13}$$

下面求 φ_0 和 φ_1 满足的边界条件, 对 $\varphi_0(x,y)$ 显然有

$$\varphi_0\big|_{x=0}=\varphi_0\big|_{x=l_x}=0;\qquad \varphi_0\big|_{y=l_y}=0;\qquad \varphi_0\big|_{y=0}=f(x) \tag{6.2.14}$$

为求 φ_1 满足的边界条件, 把(6.2.11)第二式作展开

$$\varphi(x,\varepsilon x)\approx\varphi(x,0)+\varepsilon x\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial y}=f(x)$$

式(6.2.12)代入上式

$$\varphi_0(x,0)+\varepsilon\left[\varphi_1(x,0)+x\frac{\partial\varphi_0(x,0)}{\partial y}\right]+O(\varepsilon^2)=f(x)$$

因此 $\varphi_1(x,y)$ 满足

$$\varphi_1\big|_{x=0}=\varphi_1\big|_{x=l_x}=0$$

$$\varphi_1\big|_{y=l_y}=0;\qquad \varphi_1\Big|_{y=0}=-x\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\Big|_{y=0} \tag{6.2.15}$$

容易求得零级近似 φ_0 为

$$\varphi_0(x,y)=\sqrt{\frac{2}{l_x}}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sinh\left[\frac{k\pi(y-l_y)}{l_x}\right]\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right) \tag{6.2.16}$$

其中

$$b_k=-\sqrt{\frac{2}{l_x}}\frac{1}{\sinh(k\pi l_y/l_x)}\int_0^{l_x}f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right)\mathrm{d}x \tag{6.2.17}$$

利用式(6.2.16), (6.2.15)第三式变成

$$\varphi_1(x,y)\big|_{y=0} = -\sqrt{\frac{2}{l_x}}\sum_{k=1}^{\infty} x b_k\left(\frac{k\pi}{l_x}\right)\cosh\left(\frac{k\pi l_y}{l_x}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right) \quad (6.2.18)$$

于是

$$\varphi_1(x,y) = \sqrt{\frac{2}{l_x}}\sum_{k=1}^{\infty} b'_k \sinh\left[\frac{k\pi(y-l_y)}{l_x}\right]\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right) \quad (6.2.19)$$

而

$$b'_k = -\sqrt{\frac{2}{l_x}}\frac{1}{\sinh(k\pi l_y/l_x)}\int_0^l \varphi_1(x,0)\sin\left(\frac{k\pi x}{l_x}\right)\mathrm{d}x \quad (6.2.20)$$

由于在区间 $0<x<l_x$ 内式(6.2.19)一致收敛，故当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\varphi\to\varphi_0$. 因此上述边界区域的微扰是稳定的.

例 6.2.3 设 $\mathbf{L}=-\nabla\cdot[p(\boldsymbol{r})\nabla]+q(\boldsymbol{r})$，$\mathbf{L}_1$是线性或非线性算子，但其导数阶数不超过两阶，在 G 内考虑边值问题

$$\mathbf{L}\varphi+\varepsilon\,\mathbf{L}_1\varphi = f,\qquad \boldsymbol{r}\in G;\qquad \left(\alpha\varphi+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = 0 \quad (6.2.21)$$

设 $\mathbf{L}$ 的本征函数系 $\{\varphi_n\}$ 构成完备的正交归一系，相应的本征值为 λ_n，则 $\mathbf{L}$ 的 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi_m^*(\boldsymbol{r}')\varphi_m(\boldsymbol{r})}{\lambda_m} \quad (6.2.22)$$

这时式(6.2.21)可化成积分方程

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' - \varepsilon\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathbf{L}_1\varphi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \quad (6.2.23)$$

如果 $\mathbf{L}_1$ 是非线性算子，上式是 Hammerstein 积分方程. 当 ε 足够小时，可用迭代法求解，只要 $\mathbf{L}_1\varphi$ 有较好的性质（参看第五章）. 考虑简单情形 $\mathbf{L}_1\varphi=-g(\boldsymbol{r})\varphi$，上式变成线性积分方程

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = f_1(\boldsymbol{r}) + \varepsilon\int_G g(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varphi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \quad (6.2.24)$$

如果 ε 满足

$$|\varepsilon|^2\cdot\|k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\|\ll 1 \quad (6.2.25)$$

其中 $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=g(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，用迭代法解式(6.2.24)

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\varphi_n(\boldsymbol{r}) \quad (6.2.26)$$

容易求得 n 级近似为

$$\varphi_0(\boldsymbol{r}) = f_1(\boldsymbol{r}) = \int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \quad (6.2.27)$$

$$\varphi_1(\boldsymbol{r}) = \int_G k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varphi_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(\boldsymbol{r}) = \int_G k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varphi_{n-1}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

由此可见，利用 Green 函数和积分方程理论能给问题的讨论带来很大的方便.

例 6.2.4　考虑一维边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \varepsilon(\sin\pi x)\varphi = \sin\pi x;\qquad \varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = 0 \tag{6.2.28}$$

显然 $\mathbf{L} = -\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 的本征值为 $\lambda_n = n^2\pi^2$，相应的本征函数为 $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$，故 Green 函数为

$$G(x,x') = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x'\sin n\pi x}{n^2\pi^2} \tag{6.2.29}$$

于是零级近似解和一级修正为

$$\varphi_0(x) = \int_0^1 G(x,x')\sin\pi x'\mathrm{d}x' = \frac{1}{\pi^2}\sin\pi x$$

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 G(x,x')\sin^2\pi x'\mathrm{d}x' \tag{6.2.30}$$

利用 $G(x,x')$ 的另一表达式

$$G(x,x') = \begin{cases} x(x'-1), & 0\leqslant x\leqslant x'\leqslant 1 \\ x'(x-1), & 0\leqslant x'\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \tag{6.2.31}$$

则(6.2.30)第二式变成

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -\frac{1}{\pi^2}\left[(x-1)\int_0^x x'\sin^2\pi x'\mathrm{d}x' + x\int_x^1(x'-1)\sin^2\pi x'\mathrm{d}x'\right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2}(x-1)x + \frac{1}{8\pi^2}(\cos 2\pi x - 1)\end{aligned} \tag{6.2.32}$$

因此式(6.2.28)的近似解为

$$\varphi = \frac{1}{\pi^2}\sin\pi x + \varepsilon\left[\frac{1}{4\pi^2}(x^2 - x) + \frac{1}{8\pi^4}(\cos 2\pi x - 1)\right] + O(\varepsilon^2) \tag{6.2.33}$$

6.2.2　非一致有效展开和参数变形法

考虑下列混合问题，其中 $\varepsilon \ll 1$ 可看作微扰

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \varepsilon u(x,t) = 0,\qquad x\in(0,l),\qquad t\in(0,\infty)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \tag{6.2.34}$$

$$u|_{t=0} = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right);\quad u_t|_{t=0} = 0$$

令微扰级数为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n(x,t) \tag{6.2.35}$$

代入式(6.2.34)得 $u_0(x,t)$和 $u_1(x,t)$满足的方程及定解条件

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=0,\qquad x\in(0,l),\qquad t\in(0,\infty)$$

$$u_0\big|_{x=0}=u_0\big|_{x=l}=0;\qquad u_0\big|_{t=0}=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{6.2.36}$$

及

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=-u_0,\qquad x\in(0,l),\qquad t\in(0,\infty)$$

$$u_1\big|_{x=0}=u_1\big|_{x=l}=0;\qquad u_1\big|_{t=0}=0;\qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{6.2.37}$$

式(6.2.36)的解为

$$u_0(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{l}\right) \tag{6.2.38}$$

代入式(6.2.37)得

$$\begin{aligned}u_1(x,t)&=-\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\int_0^t\sin\frac{\pi(t-\tau)}{l}\cos\frac{\pi}{l}\tau\,\mathrm{d}\tau\\&=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{l}{2}}\left(t\sin\frac{\pi}{l}t\right)\sin\frac{\pi x}{l}\end{aligned} \tag{6.2.39}$$

因此近似到 ε 级,式(6.2.34)的解为

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\cos\frac{\pi t}{l}-\frac{\varepsilon t}{2\pi}l\sin\frac{\pi}{l}t\right)+O(\varepsilon^2) \tag{6.2.40}$$

显然只有当 $\varepsilon t\ll 1$ 时才成立,当经过足够长的时间 $t\sim 1/\varepsilon$ 后,第二项将超过第一项. 微扰展开式(6.2.35)已没有意义. 因此,在整个时轴上,上式不是一致有效的展开,它仅在 $t\ll 1/\varepsilon$ 时间内才成立. 上式第二项称为**久期项**.

为了考察久期项产生的原因,我们来严格求解定解问题式(6.2.34),用分离变数法不难求得严格解为

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+\varepsilon}\,t\right) \tag{6.2.41}$$

当 $\varepsilon\ll(\pi/l)^2$ 时,利用展式

$$\omega\equiv\sqrt{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2+\varepsilon}\approx\frac{\pi}{l}\left(1+\frac{l^2}{2\pi^2}\varepsilon\right)$$

于是式(6.2.41)变成

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi}{l}\left(1 + \frac{l^2}{2\pi^2}\varepsilon\right)t$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\cos\frac{\pi}{l}t\cos\frac{l}{2\pi}\varepsilon t - \sin\frac{\pi}{l}t\sin\frac{l}{2\pi}\varepsilon t\right) \quad (6.2.42)$$

又当 $\varepsilon \ll 1$ 时，上式近似为

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\cos\frac{\pi}{l}t - \frac{\varepsilon t}{2\pi}l\sin\frac{\pi}{l}t\right)$$

即为式(6.2.40). 因此式(6.2.40)仅仅是严格解展开的第一项，当 $\varepsilon t \sim 1$ 时，幂级数应取无穷多项，展开的每一项 u_n 都要考虑进去，否则将出现发散项，即久期项.

当问题涉及无界区域时，久期项的产生是微扰展开的普遍现象，为了仍能应用微扰法求解实际问题，产生了消除久期项的许多办法，其中最简单的即是**变形参数法**.

为了说明变形参数法的基本思想，仍考虑上述例子，分析严格解式(6.2.41)可知，微扰的作用实际上仅仅改变了频率，而展式(6.2.35)显然是不恰当的. 因此，我们必须把频率 ω 也作 ε 展开

$$\omega = \omega_0(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots) \quad (6.2.43)$$

显然上式相当于自变数 t 作变换，即**变形参数**

$$\tau = t(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots) \quad (6.2.44)$$

把 u 作式(6.2.35)展开的同时，把参数 t 也作变形展开式(6.2.44)即是变形参数法的基本思想，其中$(\omega_1, \omega_2, \cdots)$的选择可消去久期项.

下面利用变形参数法求解式(6.2.34)，作展开

$$u(x,t) = u_0(x,\tau) + \varepsilon u_1(x,\tau) + \cdots$$

$$\tau = t(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots) \quad (6.2.45)$$

代入式(6.2.34)，比较 ε 的同次幂得

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0; \qquad u_0\big|_{\tau=0} = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right); \qquad u_\tau\big|_{\tau=0} = 0 \quad (6.2.46)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\left(2\omega_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + u_0\right)$$

$$u_1\big|_{\tau=0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0 \quad (6.2.47)$$

由式(6.2.46)得

$$u_0(x,\tau) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi\tau}{l}\right) \quad (6.2.48)$$

代入式(6.2.47)得 u_1 满足的方程

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\left(-\frac{2\pi^2\omega_1}{l^2} + 1\right)u_0 \tag{6.2.49}$$

为了消去久期项，只要令 $-2\omega_1\pi^2/l^2 + 1 = 0$ 即可，于是取 $\omega_1 = l^2/(2\pi^2)$. 因式(6.2.47)中初值和非齐次项都为零，故 $u_1 = 0$. 于是有解

$$u(x,t) \approx \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\left[\frac{\pi}{l}(1+\varepsilon\omega_1)t\right] = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi}{l}\left(1+\frac{l^2}{2\pi^2}\varepsilon\right)t$$

上式即为式(6.2.42)，可见参数变形法能给出较好的结果. 下面我们用参数变形法来分析几个非线性问题.

6.2.3 参数变形法应用于非线性振动和波动

考虑单摆的有限振幅振动

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2\sin\theta(t) = 0; \quad \theta\big|_{t=0} = \alpha; \qquad \theta'\big|_{t=0} = 0 \tag{6.2.50}$$

其中 $\alpha \ll 1$。作变换 $u(t) = \theta(t)/\alpha$，上式变成

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2\left(u - \frac{1}{\alpha}\sin\alpha u\right)$$
$$u\big|_{t=0} = 1; \qquad u'\big|_{t=0} = 0 \tag{6.2.51}$$

令 $\varepsilon = \alpha^2 \ll 1$，(6.2.51)第一式右边作 Taylor 展开得到

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\varepsilon^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{6.2.52}$$

若作通常的微扰展开

$$u(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m u_m(t) \tag{6.2.53}$$

易得

$$u(t) = \cos\omega_0 t + \varepsilon\left(\frac{1}{16}\omega_0 t\sin\omega_0 t + \frac{1}{192}\cos\omega_0 t - \frac{1}{192}\cos 3\omega_0 t\right) + \cdots$$

出现久期项 $\varepsilon\omega_0 t\sin\omega_0 t$，显然当 $\varepsilon\omega_0 t \approx 16$ 时微扰展开式(6.2.53)失效.

采用参数变形法，作展开

$$u(t) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \cdots$$
$$t = \tau(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega^2 + \cdots) \tag{6.2.54}$$

代入式(6.2.52)，比较 ε 的同次幂

$$\frac{d^2 u_0}{d\tau^2} + \omega_0^2 u_0 = 0$$

$$u_0(\tau)\big|_{\tau=0} = 1; \quad \frac{du_0}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} = 0 \tag{6.2.55}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\tau^2} + \omega_0^2 u_1 = -2\omega_0^2\omega_1 u_0 + \frac{\omega_0^2}{6}u_0^3$$

$$u_1(\tau)\Big|_{\tau=0} = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \tag{6.2.56}$$

显然式(6.2.55)的解为 $u_0(\tau)=\cos\omega_0\tau$，代入式(6.2.56)得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\tau^2} + \omega_0^2 u_1 = \omega_0^2\left(\frac{1}{8} - 2\omega_1\right)\cos\omega_0\tau + \frac{1}{24}\omega_0^2\cos 3\omega\tau \tag{6.2.57}$$

u_1 的久期项来源于上式右边第一项，如果取 $\omega_1 = 1/16$，则久期项消失．于是

$$u_1(\tau) = \frac{1}{192}(\cos\omega_0\tau - \cos 3\omega_0\tau)$$

因此在一级近似下，式(6.2.51)的解为

$$u(\tau) = \cos\omega_0\tau + \frac{\varepsilon}{192}(\cos\omega_0\tau - \cos 3\omega_0\tau) + O(\varepsilon^2) \tag{6.2.58}$$

其中

$$\omega_0\tau = \omega_0(1+\varepsilon\omega_1)^{-1}t \approx \omega_0(1-\varepsilon\omega_1)t \equiv \omega t$$

即振动的频率为 $\omega \approx \omega_0(1-\varepsilon/16)$，而周期 $T \approx T_0(1+\varepsilon/16)$．由此可见，非线性项的效应为：(1) 出现高次谐波；(2) 改变振动的周期，而且周期与初始振幅有关．一般，我们总是强调第一点，而忽略了第二点．

参数变形法同样可应用于非线性波动问题．考虑非线性 Klein-Gordon 方程的初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u = \beta u^3$$

$$u\Big|_{t=0} = \varepsilon\cos kx; \qquad u_t\Big|_{t=0} = 0 \tag{6.2.59}$$

其中 $\varepsilon \ll 1, -\infty < x < \infty$，令 $u = \varepsilon v$，则上式变成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \gamma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c^2 v = \beta\varepsilon^2 v^3$$

$$v\Big|_{t=0} = \cos kx; \qquad v_t\Big|_{t=0} = 0 \tag{6.2.60}$$

因 $\varepsilon^2 \ll 1$，作微扰展开

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}v_n(x,t) \tag{6.2.61}$$

具体计算表明，v_1 项将产生久期项，故需作参数变形展开

$$v = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}v_n(x,\tau); \qquad \tau = t(1+\varepsilon^2\omega_1+\cdots) \tag{6.2.62}$$

代入式(6.2.60)得

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \tau^2} - \gamma^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + c^2 v_0 = 0$$

$$v_0\big|_{\tau=0} = \cos kx; \qquad \frac{\partial v_0}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = 0 \tag{6.2.63}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + c^2 v_1 = \beta v_0^3 - 2\omega_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tau^2}$$

$$v_1\big|_{\tau=0} = 0; \qquad \frac{\partial v_1}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = 0 \tag{6.2.64}$$

由式(6.2.63)解得 $v_0(x,\tau) = \cos kx\cos\omega_0\tau$，其中 $\omega_0^2 = \gamma^2k^2 + c^2$，代入上式得

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + c^2 v_1 = \beta\cos^3 kx\cos^3\omega_0\tau + 2\omega_1\omega_0^2\cos kx\cos\omega_0\tau \tag{6.2.65}$$

利用公式 $4\cos^2 kx = 3\cos kx + \cos 3kx$，上式变成

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + c^2 v_1 = \left(\frac{9}{16}\beta + 2\omega_0^2\omega_1\right)\cos kx\cos\omega_0\tau + \frac{\beta}{16}(3\cos 3kx\cos\omega_0\tau$$

$$+ 3\cos kx\cos 3\omega_0\tau + \cos 3kx\cos 3\omega_0\tau) \tag{6.2.66}$$

为消去久期项，由上式右边第一项得到 $\omega_1 = -9\beta/(32\omega_0^2)$，于是上式的解为

$$v_1(x,\tau) = \frac{3\beta}{128\omega_0^2}(\cos\omega_0\tau - \cos 3\omega_0\tau)\cos kx + \left[\frac{3\beta}{128\gamma^2k^2}(\cos\omega_0\tau\right.$$

$$\left. - \cos\lambda\tau) + \frac{\beta}{128c^2}(\cos\lambda\tau - \cos 3\omega_0\tau)\right]\cos 3kx \tag{6.2.67}$$

其中 $\lambda^2 = 9\gamma^2k^2 + c^2$. 因此式(6.2.59)的近似解为

$$u(x,\tau) \approx \varepsilon\cos kx\cos\omega_0\tau + \varepsilon^2 v_1(x,\tau) \tag{6.2.68}$$

其中 $\omega_0\tau = \omega_0[1 - 9\varepsilon^2\beta/(32\omega_0^2)]t \equiv \omega t$，$\omega$ 为振动基频

$$\omega = \sqrt{\gamma^2k^2 + c^2}\left(1 - \frac{9\varepsilon^2\beta}{32\omega_0^2}\right) \tag{6.2.69}$$

由上二式可知，非线性项 βu^3 的效应是：(1) 产生谐波；(2) 振动频率 ω 与振幅有关，这是非线性振动和波动的普遍现象.

例 6.2.5 求非线性 Klein-Gordon 方程的周期性驻波解，即求解下列问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u = \varepsilon u^3, \qquad x \in (0,\pi) \tag{6.2.70}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=\pi}; \qquad u(x,t+T) = u(x,t)$$

其中 $\varepsilon \ll 1$，$T = 2\pi/\omega$，T 和 ω 分别为待求周期和频率. 利用参数变形展开

$$u = u_0(x,\tau) + \varepsilon u_1(x,\tau) + \varepsilon^2 u_2(x,\tau) + \cdots$$

$$\tau = \omega(\varepsilon)t = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)t \tag{6.2.71}$$

代入式(6.2.70)可得递推方程

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + c^2 u_0 = 0 \tag{6.2.72}$$

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c^2 u_1 = -2\omega_0\omega_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + u_0^3 \tag{6.2.73}$$

以及定解条件

$$u_i(x,\tau)\big|_{x=0} = u_i(x,\tau)\big|_{x=\pi} = 0;$$
$$u_i(x,\tau+2\pi) = u_i(x,\tau) \tag{6.2.74}$$

其中 $i=0,1,2,\cdots$,容易求得零级近似的周期驻波解为

$$u_0(x,\tau) = a_{mn}\sin mx\cos n\tau; \qquad \omega_0^2 = \frac{\gamma^2 m^2 + c^2}{n^2} \tag{6.2.75}$$

其中 $m,n=1,2,\cdots$, 代入式(6.2.73)得

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c^2 u_1 = 2\omega_0\omega_1 n^2 a_{mn}\sin mx\cos n\tau + a_{mn}^3\sin^3 mx\cos^3 n\tau \tag{6.2.76}$$

为了消去 u_1 的久期项, 应取 $\omega_1 = -9a_{mn}^2/(32\omega_0 n^2)$, 于是得到一级近似解为

$$u(x,t) \approx a_{mn}\sin mx\cos n\omega t + \varepsilon a_{mn}^3\left(\frac{1}{8}\sin 3mx\sin 3n\omega t - \frac{3}{32(\gamma^2 m^2 + c^2)}\sin mx\cos 3n\omega t - \frac{3}{32m^2}\sin 3mx\sin n\omega t\right) \tag{6.2.77}$$

频率为

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2) \doteq \omega_0\left[1 - \frac{9\varepsilon a_{mn}^2}{32(\gamma^2 m^2 + c^2)}\right] \tag{6.2.78}$$

由上式可知, 振动频率与振幅 a_{mn}^2 有关.

变形参数法是解决微扰展开出现久期项的最简单方法, 在一定条件下, 它也可能失效, 例如当上式 $\gamma^2 m^2 + c^2 \approx O(\varepsilon)$ 时, $\varepsilon\omega_1$ 和 ω_0 同一数量级, 因此必须考虑 $\omega_2,\omega_3,\cdots$, 这时展开式(6.2.71)已无实际意义. 解决这个问题的方法是 6.2.4 小节介绍的多尺度展开法.

6.2.4 多尺度展开法

参数变形法假定系统的运动只有一个时标, 微扰的作用改变了系统时标. 本节的问题是, 如果微扰的作用增加了系统运动的时标, 应该如何作微扰展开? 首先看简单的例子

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varepsilon\frac{dy}{dt} + y = 0, \qquad t > 0$$
$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 1 \tag{6.2.79}$$

作微扰展开

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \cdots \tag{6.2.80}$$

可以得到

$$y(t) \approx \sin(t) - \frac{1}{2}\varepsilon t \sin(t) \tag{6.2.81}$$

可见这一展开出现了久期项. 事实上，式(6.2.79)的严格解为

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon t\right)\sin\left(\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}t\right) \tag{6.2.82}$$

可见微扰的作用不仅改变了系统的振动频率和振幅，而且出现了一项缓变项，即增加了一个新的缓变时标. 为了描述这二个时标，引进新的变量

$$t_1 = t; \qquad t_2 = \varepsilon^\alpha t \tag{6.2.83}$$

利用求导法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\mathrm{d}t_2}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial t_2} \tag{6.2.84}$$

代入式(6.2.79)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon^\alpha \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^{2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right)y + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial t_2}\right)y + y = 0 \tag{6.2.85}$$

$$y\big|_{t_1=t_2=0} = 0; \qquad \left.\left(\frac{\partial y}{\partial t_1} + \varepsilon^\alpha \frac{\partial y}{\partial t_2}\right)\right|_{t_1=t_2=0} = 1 \tag{6.2.86}$$

然后作微扰展开

$$y(t) = y_0(t_1, t_2) + \varepsilon y_1(t_1, t_2) + \cdots \tag{6.2.87}$$

代入式(6.2.85)得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon^\alpha \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^{2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right)(y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots) + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial t_2}\right)$$

$$(y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots) = 0 \tag{6.2.88}$$

因此零阶方程和初始条件为

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 = 0; \qquad y\big|_{t_1=t_2=0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial y_0}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=0} = 1 \tag{6.2.89}$$

与式(6.2.49)类似，久期项是因为在一阶近似方程中出现 $2\varepsilon^\alpha \partial^2 y_0/\partial t_1 \partial t_2$ 而引起的，现在可能抵消这项的只有 $\varepsilon \partial y_0/\partial t_1$，于是只能选择 $\alpha = 1$. 因此一阶近似方程和初始条件为

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 = -2\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1}$$

$$y_1\big|_{t_1=t_2=0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial y_1}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=0} = -\left.\frac{\partial y_0}{\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=0} \tag{6.2.90}$$

式(6.2.89)的通解和初始条件为

$$y_0(t_1, t_2) = a_0(t_2)\sin(t_1) + b_0(t_2)\cos(t_1)$$

$$a_0(0) = 1; \qquad b_0(0) = 0 \tag{6.2.91}$$

代入式(6.2.90)

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 = \left(2\frac{\mathrm{d}b_0}{\mathrm{d}t_2} + b_0\right)\sin(t_1) - \left(2\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t_2} + a_0\right)\cos(t_1) \tag{6.2.92}$$

为了消除久期项，选择

$$2\frac{\mathrm{d}b_0}{\mathrm{d}t_2} + b_0 = 0; \qquad 2\frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t_2} + a_0 = 0 \tag{6.2.93}$$

利用式(6.2.91)中的初始条件得

$$b_0(t_2) = 0; \qquad a_0(t_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}t_2\right) \tag{6.2.94}$$

因此，微扰解为

$$y(t) \approx \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon t\right)\sin(t) \tag{6.2.95}$$

与严格解式(6.2.82)比较可知，零阶近似已给出比较好的结果.

以上例子看出，尽管多尺度展开法把常微分方程化成了更复杂的偏微分方程，但能给出比较好的微扰解. 多尺度展开法可与参数变形法结合，如上例子中作变换

$$t_1 = t(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots); \qquad t_2 = \varepsilon t \tag{6.2.96}$$

可得更好的微扰结果. 此外,时标的选择是多种多样的,例如可取非线性时标变换

$$t_1 = f(t,\varepsilon); \qquad t_2 = \varepsilon^{\alpha} t; \qquad t_3 = \varepsilon^{\beta} t \tag{6.2.97}$$

例 6.2.6 考虑弹簧的老化,振动方程和初始条件为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \kappa^2(\varepsilon t)y = 0, \qquad t > 0$$

$$y(0) = a; \qquad y'(0) = b \tag{6.2.98}$$

弹簧的老化是缓变过程，ε 是小量,$\kappa(\varepsilon t)$ 随时间缓慢变化. 作非线性时标变换

$$t_1 = f(t,\varepsilon); \qquad t_2 = \varepsilon t \tag{6.2.99}$$

$f(t,\varepsilon)$必须满足：(1) 非负且是 t 的增函数；(2) t_1 是快时标，t_2 是慢时标，即当 $\varepsilon\to 0,\varepsilon t \ll f(t,\varepsilon)$；(3) $f(t,\varepsilon)$ 是光滑函数. 根据微分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2} \tag{6.2.100}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = f_t^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + f_{tt}\frac{\partial}{\partial t_1} + 2\varepsilon f_t\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \tag{6.2.101}$$

代入式(6.2.98)

$$\left(f_t^2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + f_{tt}\frac{\partial}{\partial t_1} + 2\varepsilon f_t\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right)y + \kappa^2(\varepsilon t)y = 0 \tag{6.2.102}$$

当 $\kappa(\varepsilon t) = \kappa_0$ 与时间无关时，快时标表示振动，即 $t_1 = f(t,\varepsilon) = \kappa_0 t$，因此当 κ

是时间的函数时，取 $f_t=\kappa(\varepsilon t)$，即

$$f=\int_0^t \kappa(\varepsilon\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.2.103}$$

作微扰展开

$$y(t)=y_0(t_1,t_2)+\varepsilon y_1(t_1,t_2)+\cdots \tag{6.2.104}$$

代入式(6.2.102)得到零阶近似

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2}+y_0=0;\qquad y_0\big|_{t_1=t_2=0}=a$$

$$\kappa(0)\left.\frac{\partial y_0}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=0}=b \tag{6.2.105}$$

上式的通解和初始条件为

$$y_0(t_1,t_2)=a_0(t_2)\sin(t_1)+b_0(t_2)\cos(t_1)$$

$$a_0(0)=b/\kappa(0),\qquad b_0(0)=a \tag{6.2.106}$$

一阶近似为

$$\kappa^2\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2}+y_1\right)=-2\kappa\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1\partial t_2}-\kappa'\frac{\partial y_0}{\partial t_1}$$

$$=-(a_0\kappa'+2\kappa a'_0)\cos(t_1)+(b_0\kappa'+2\kappa b'_0)\sin(t_1) \tag{6.2.107}$$

为了消除久期项，令 $a_0\kappa'+2\kappa a'_0=0$；$b_0\kappa'+2\kappa b'_0=0$，即

$$a_0(t_2)=\frac{\alpha_0}{\sqrt{\kappa(\varepsilon t)}};\qquad b_0(t_2)=\frac{\beta_0}{\sqrt{\kappa(\varepsilon t)}} \tag{6.2.108}$$

其中 α_0 和 β_0 是常数. 因此零阶近似解为

$$y(t)\approx\frac{1}{\sqrt{\kappa(\varepsilon t)}}\left[\alpha_0\sin\left(\int_0^t\kappa(\varepsilon\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\beta_0\cos\left(\int_0^t\kappa(\varepsilon\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right] \tag{6.2.109}$$

由式(6.2.98)中初始条件得到 $\beta_0=a\sqrt{\kappa(0)}$ 和 $\alpha_0=b/\sqrt{\kappa(0)}$.

下面介绍用多尺度展开法讨论非线性波动方程，注意与上节参数变形法的区别. 考虑非线性 Klein-Gordon 方程的行波

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u+\varepsilon u^3,\qquad x\in(-\infty,\infty) \tag{6.2.110}$$

其中 $\varepsilon\ll 1$，$-\infty<x<\infty$. 如果 $\varepsilon=0$，可用 Fourier 积分法求上式的传播问题

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]\mathrm{d}k+\int_{-\infty}^{\infty}B(k)\exp[\mathrm{i}(kx+\omega t)]\,\mathrm{d}k \tag{6.2.111}$$

其中 ω 与 k 的关系 $\omega=\sqrt{1+k^2}$ 称为**色散关系**. 考虑简单的行波 $u_0(kx-\omega t)$，如果作微扰展开

$$u(x,t)=u_0(kx-\omega t)+\varepsilon u_1(x,t)+\cdots$$

代入式(6.2.110)，计算表明一阶项 $u_1(x,t)$出现久期项．因此，上述展开不恰当．作多时标展开，三个时标分别为 $\theta=kx-\omega t, x_2=\varepsilon x$ 和 $t_2=\varepsilon t$，式(6.2.110)变成

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-2\varepsilon\left(k\frac{\partial}{\partial x_2}+\omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}+O(\varepsilon^2)\right]u+u+\varepsilon u^3=0 \tag{6.2.112}$$

作微扰展开

$$u(x,t)=u_0(\theta,x_2,t_2)+\varepsilon u_1(\theta,x_2,t_2)+\cdots \tag{6.2.113}$$

代入式(6.2.112)得到零阶近似为

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2}+u_0=0 \tag{6.2.114}$$

因此

$$u_0=A(x_2,t_2)\cos[\theta+\varphi(x_2,t_2)] \tag{6.2.115}$$

其中函数 $A(x_2,t_2)$和 $\varphi(x_2,t_2)$的选择由高阶近似给出．一阶近似为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}+u_1&=2\left(k\frac{\partial}{\partial x_2}+\omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-u_0^3=-2\left(k\frac{\partial}{\partial x_2}+\omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)A\sin(\theta+\varphi)\\&\quad-\frac{1}{4}A^3\cos3(\theta+\varphi)-2\left[\left(k\frac{\partial}{\partial x_2}+\omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\varphi+\frac{3}{8}A^2\right]A\cos(\theta+\varphi)\end{aligned} \tag{6.2.116}$$

为了消除现久期项，令

$$\left(k\frac{\partial}{\partial x_2}+\omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)A=0;\qquad\left(k\frac{\partial}{\partial x_2}+\omega\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\varphi+\frac{3}{8}A^2=0 \tag{6.2.117}$$

利用特征坐标解上述一阶偏微分方程，令

$$r=\omega x_2+kt_2;\qquad s=\omega x_2-kt_2 \tag{6.2.118}$$

式(6.2.117)变成

$$\frac{\partial A}{\partial r}=0;\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{3}{16\omega k}A^2 \tag{6.2.119}$$

即

$$A=A(s);\qquad\varphi=-\frac{3}{16\omega k}A^2 r+\varphi_0(s) \tag{6.2.120}$$

因此零阶近似解为

$$u\approx A(\omega x_2-kt_2)\cos\left[\theta-\frac{3}{16\omega k}(\omega x_2+kt_2)+\varphi_0(\omega x_2-kt_2)\right] \tag{6.2.121}$$

假定初始条件为

$$u(x,0)=\alpha\cos(kx)\text{ 和 }u_t(x,0)=\alpha\omega\sin(kx) \tag{6.2.122}$$

用三个时标 θ, x_2 和 t_2 表示，上式变为

$$u(\theta, x_2, 0) = \alpha\cos\theta, \qquad \frac{\partial u(\theta, x_2, 0)}{\partial\theta} = -\alpha\sin\theta \tag{6.2.123}$$

因此 $A(\omega x_2) = \alpha$ 和 $\varphi_0(\omega x_2) = 3A^2 x_2/16$. 最后，可以得到零阶近似解为

$$u(x,t) \approx \alpha\cos\left[kx - \left(\omega + \frac{3\varepsilon\alpha^2}{16\omega}\right)t\right] \tag{6.2.124}$$

波传播的相速度为

$$v_p = \left(1 + \frac{3\varepsilon\alpha^2}{16\omega^2}\right)\frac{\omega}{k} \tag{6.2.125}$$

可见，由于非线性，相速度增加且增加量与波的振幅平方成正比.

我们将在第八章进一步讨论非线性 Klein-Gordon 方程的非微扰解.

6.3 奇异微扰及边界层理论

6.2 节已指出，当小参数 ε 出现在方程的高阶导数上时，零级近似方程的类型及阶数都要变化. 因此不可能同时满足给定的初始条件或边界条件. 一般来说，这是由于方程的解在边界或初值处变化十分剧烈，而通常的微扰展开是无法表示这种现象而产生的. 解决这个问题的方法即是本节要介绍的边界层理论.

6.3.1 边界层理论的基本思想

为了阐明边界层理论的基本思想，首先讨论一个简单但可严格求解的边值问题. 考虑二阶常微分方程的边值问题(其中 $\varepsilon \ll 1$)

$$\varepsilon\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0, \qquad x \in (0,1)$$

$$\varphi(x)|_{x=0} = \alpha; \qquad \varphi(x)|_{x=1} = \beta \tag{6.3.1}$$

对 $\varphi(x)$作通常的微扰展开

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x) + \cdots \tag{6.3.2}$$

代入式(6.3.1)得到 $\varphi_0(x)$和 $\varphi_1(x)$满足的方程及边界条件

$$\frac{d\varphi_0}{dx} + \varphi_0 = 0; \qquad \varphi_0(x)|_{x=0} = \alpha; \qquad \varphi_0(x)|_{x=1} = \beta \tag{6.3.3}$$

及

$$\frac{d\varphi_1}{dx} + \varphi_1 = -\frac{d^2\varphi_0}{dx^2}; \qquad \varphi_1(x)|_{x=0} = 0; \qquad \varphi_1(x)|_{x=1} = 0 \tag{6.3.4}$$

由上二式可见，$\varphi_0(x)$和 $\varphi_1(x)$满足一阶方程，但定解条件有两个. 因此，它们是超定的，一般来说 $\varphi_0(x)$和 $\varphi_1(x)$的解不存在(除非 α 与β 满足一定的关系). 为了使 $\varphi_0(x)$和 $\varphi_1(x)$有解，应抛弃掉一个边界条件(意义见后)，如果要求 $\varphi_0(x)$

满足$\varphi_0(x)\big|_{x=0}=0$，则得左解 $\varphi_0(x)\equiv\varphi_0^l(x)$

$$\varphi_0^l(x) = \alpha\exp(-x) \tag{6.3.5}$$

反之，如要求满足$\varphi_0(x)\big|_{x=1}=\beta$，则得右解 $\varphi_0(x)\equiv\varphi_0^r(x)$

$$\varphi_0^r(x) = \beta\exp(1-x) \tag{6.3.6}$$

问题是哪一个解有意义？下面的讨论表明应取满足$\varphi_0\big|_{x=1}=\beta$的解$\varphi_0^r$. 把上式代入式(6.3.4)，取满足$\varphi_1(x)\big|_{x=1}=0$的解 $\varphi_1^r(x)$

$$\varphi_1^r(x) = \beta(1-x)\exp(1-x) \tag{6.3.7}$$

于是我们得到式(6.3.1)的一个近似解

$$\varphi(x) \approx \beta\exp(1-x) + \varepsilon\beta(1-x)\exp(1-x) + \cdots \tag{6.3.8}$$

显然上式在 $x=0$ 点不满足条件$\varphi(x)\big|_{x=0}=\alpha$. 因此，至少在 $x=0$ 点附近，上式不是式(6.3.1)的一个很好的近似解. 为了进一步考察式(6.3.8)的意义，我们来求式(6.3.1)的精确解. 式(6.3.1)的通解为

$$\varphi(x) = A\exp(\eta_+ x) + B\exp(\eta_- x) \tag{6.3.9}$$

其中 $\eta_\pm=(-1\pm\sqrt{1-4\varepsilon})/2\varepsilon$，当 $\varepsilon\to0$ 时，$\eta_\pm$有近似式

$$\eta_+ = -1-\varepsilon,\qquad \eta_- = 1-\frac{1}{\varepsilon} \tag{6.3.10}$$

利用边界条件可求得常数 A 和 B

$$A\approx\beta e;\qquad B\approx\alpha-\beta e \tag{6.3.11}$$

因此，当 $\varepsilon\ll1$ 时，式(6.3.1)的解为

$$\varphi(x) \approx \beta\exp(1-x) + (\alpha-\beta e)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}+x\right) \tag{6.3.12}$$

当 $x\gg0$ 时，上式近似为

$$\varphi(x) \approx \beta\exp(1-x),\qquad \varepsilon\to0 \tag{6.3.13}$$

显然上式即是满足右边界条件的零级近似. 但是当 x 接近边界点$x=0$，即 $x\sim\varepsilon$ 时，式(6.3.12)第二项已不能略去

$$\varphi(x)\sim\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

显然，上式与式(6.3.5)存在本质的区别. 由此可见，通常的微扰展开式(6.3.2)在边界点 $x=0$ 是不合适的，比较式(6.3.12)和(6.3.8)，如图 6.3.1，式(6.3.8)仅在 $x=0$ 附近 $\Delta x\sim\varepsilon$ 的簿层内与严格解式(6.3.12)相差甚大，而在此区域以外，仍是一个很好的近似. 由于 $\varphi(x)$要满足边界条件$\varphi(x)\big|_{x=0}=$

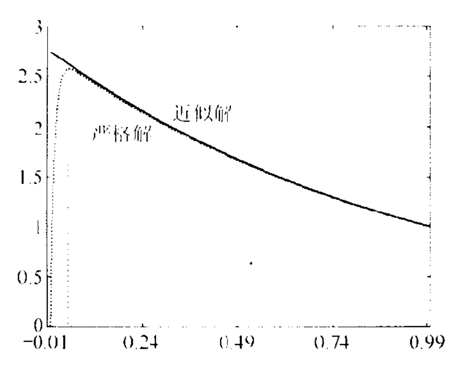


图 6.3.1　近似解和严格解比较

$\alpha=0,\beta=1.0,\varepsilon=0.01$

α，在 $\Delta x \sim \varepsilon$ 区域变化十分剧烈，由式(6.3.12)也可看出这点.

当 $x \to 0$ 时，φ 依赖于"快尺度"变量 $\xi = x/\varepsilon$，称这种通常的微扰展开不成立的区域为**边界层**. 如何寻求边界内的微扰展开即是边界层理论的目的. 由上讨论可知,在 $x=0$ 附近，必须按"快尺度"变量 $\xi = x/\varepsilon$ 作展开，变换 $\xi = x/\varepsilon$ 的意义很明显，由于 $\varepsilon \ll 1, x/\varepsilon$ 相当于把坐标拉伸，从而改变 $x=0$ 处解变化的剧烈程度. 因此，在 $x=0$ 附近作展开

$$\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) + \varepsilon\varphi_1(\xi) + \cdots \tag{6.3.14}$$

上式代入式(6.3.1)可得 $\varphi_0(\xi)$和 $\varphi_1(\xi)$满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_0}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}\xi} = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi_1}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\xi} = -\varphi_0 \tag{6.3.15}$$

因在 $x=0$ 附近展开，故只有一个边界条件可供使用

$$\varphi_0(\xi)\ \Big|_{\xi=0} = \alpha; \qquad \varphi_1(\xi)\Big|_{\xi=0} = 0 \tag{6.3.16}$$

上二式的解为

$$\varphi_0(\xi) = \alpha + [\exp(-\xi) - 1]b_0 \tag{6.3.17}$$

$$\varphi_1(\xi) = -(\alpha - b_0)\xi + b_0\xi\exp(-\xi) + b_1[\exp(-\xi) - 1] \tag{6.3.18}$$

上二式中仍有二个常数待定，问题是如何决定常数 b_0 和 b_1. 为了讨论的方便，用 $\varphi^o(x)$表示由通常的微扰展式(6.3.2)得到的解式(6.3.8)

$$\varphi^o(x) = \beta\exp(1 - x) + \varepsilon\beta(1 - x)\exp(1 - x) + \cdots \tag{6.3.19}$$

$\varphi^o(x)$仅在边界层以外成立，故称 $\varphi^o(x)$为**外部解**；用 $\varphi^i(\xi)$表示边界层内的展式(6.3.14)

$$\begin{aligned}\varphi^i(\xi) = {} & \alpha + [\exp(-\xi) - 1]b_0 + \varepsilon\{-(\alpha - b_0)\xi \\ & + b_0\xi\exp(-\xi) + b_1[\exp(-\xi) - 1]\} + \cdots\end{aligned} \tag{6.3.20}$$

$\varphi^i(\xi)$在边界层内成立，故称为**内部解**. 因此我们得到了在不同区域内成立的二个展式 $\varphi^o(x)$和 $\varphi^i(\xi)$. 为了使 $\varphi^o(x)$和 $\varphi^i(\xi)$能表达整个区域[0,1]上的解，希望 $\varphi^o(x)$和 $\varphi^i(\xi)$成立区域能相互交迭，否则在 $\varphi^o(x)$和 $\varphi^i(\xi)$不交迭的区域，解仍未知. 下面考察式(6.3.19)和(6.3.20)能否交迭以及相互交迭的条件. 为此把 $\varphi^o(x)$用"内变数"来表达

$$\varphi^o(\varepsilon\xi) = \beta\exp(1 - \varepsilon\xi) + \varepsilon\beta(1 - \varepsilon\xi)\exp(1 - \varepsilon\xi) \tag{6.3.21}$$

上式中 ξ 保持不变，而作 ε 展开后得到的式子用$[\varphi^o(\varepsilon\xi)]^i$ 表示

$$[\varphi^o(\varepsilon\xi)]^i \approx \beta\mathrm{e} + \varepsilon\beta\mathrm{e}(1 - \xi) \tag{6.3.22}$$

另一方面把 $\varphi^i(\xi)$用"外变数"x 来表示

$$\begin{aligned}\varphi^i(x/\varepsilon) = {} & \alpha - b_0 + b_0\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\Big[-b_1 + b_1\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ & - (\alpha - b_0)\frac{x}{\varepsilon} + b_0\frac{x}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big] + \cdots\end{aligned} \tag{6.3.23}$$

用$[\varphi^i(x/\varepsilon)]^o$表示上式中$x$保持不变，而作$\varepsilon\to0$展开后得到的式子

$$[\varphi^i(x/\varepsilon)]^o \approx \alpha - b_0 + \varepsilon(-b_1) - (\alpha - b_0)x \tag{6.3.24}$$

$\varphi^o(x)$和$\varphi^i(\xi)$**相互交迭的条件**是

$$[\varphi^o(\varepsilon\xi)]^i = [\varphi^i(x/\varepsilon)]^o \tag{6.3.25}$$

于是有

$$\beta e(1-x) + \beta e\varepsilon = (\alpha - b_0)(1-x) - b_1\varepsilon$$

比较ε的同次幂应有$b_1 = -\beta e$; $b_0 = \alpha - \beta e$，代入式(6.3.20)得

$$\varphi^i(x) = \left\{\alpha + (-\alpha + \beta e)\left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\right\} \tag{6.3.26}$$

$$+ \varepsilon\left\{-\beta e\frac{x}{\varepsilon} + (\alpha - \beta e)\frac{x}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \beta e\left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\right\} + \cdots$$

$$= \beta e(1-x) + (\alpha - \beta e)(1+x)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\beta e\left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] + \cdots$$

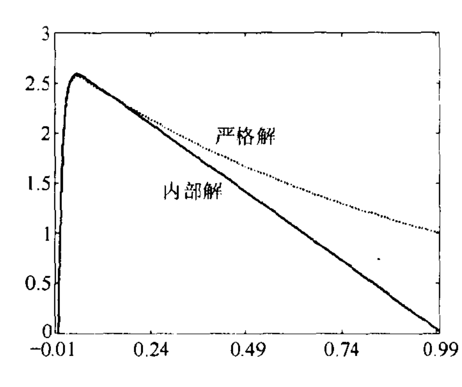


图 6.3.2 内部解和严格解比较

$\alpha=0, \beta=1.0, \varepsilon=0.01$

在$x=0$处，显然$\varphi^i(x)$满足边界条件$\varphi^i(0)=\alpha$. 如图6.3.2，比较上式与严格解式(6.3.12)可知，$\varphi^i(x)$确是在$x=0$附近的一个很好的近似解，但在$x=1$附近则相差甚远.

上述决定内部解的方法称为**渐近匹配法**，其基本思想是：内部解$\varphi^i(\xi)$依"外变量"x作展开($\varepsilon\to0$)得到的渐近式$(\varphi^i)^o$应等于外部解$\varphi^o(x)$依"内部变量"$x/\varepsilon=\xi$作展开($\varepsilon\to0$)得到的渐近式$(\varphi^o)^i$.

本例中已知道$x=0$处是边界层，而内部变量$\xi=x/\varepsilon$，在一般问题中并没有这些先验知识. 因此在实际问题中可利用物理条件首先判断边界层在何处，也可尝试找出边界层，其方法是：

(1) 假定某一个边界是边界层，则作内部变量变换$\xi=\varepsilon^{-v}x$；

(2) 选择恰当的v，使$\varphi^i(\xi)$与$\varphi^o(x)$能渐近匹配，如果$\varphi^i(\xi)$与$\varphi^o(x)$能匹配，则这个边界是边界层，否则一定在另一个边界处；

(3) 进行步骤(1)和(2)的同时，也求得了$\varphi^i(\xi)$与$\varphi^o(x)$，并且$\varphi^i(\xi)$与$\varphi^o(x)$在中间某一区域是交迭的，故相当于求得整个区域内的近似解.

因在实际计算中，并不确切知道$\varphi^i(\xi)$与$\varphi^o(x)$交迭的区域，故分段表示$\varphi(x)$比较麻烦，通常用$\varphi^i(\xi)$和$\varphi^o(x)$的组合来表示整个区域上的近似解$\varphi^c(x)$

$$\varphi^c(x) = \varphi^o(x) + \varphi^i(\xi) - [\varphi^o(\varepsilon^v\xi)]^i = \varphi^o(x) + \varphi^i(\xi) - [\varphi^i(x/\varepsilon^v)]^o \tag{6.3.27}$$

$\varphi^c(x)$称为**复合解**. $\varphi^c(x)$在边界层与 $\varphi^i(\xi)$一致，而在外部与 $\varphi^o(x)$一致. 这是容易证明的：在边界层区域

$$(\varphi^c)^i = (\varphi^o)^i + (\varphi^i)^i - [(\varphi^o)^i]^i$$

因$(\varphi^i)^i = \varphi^i$；$[(\varphi^o)^i]^i = (\varphi^o)^i$，故$(\varphi^c)^i = \varphi^i$. 而在外部区域

$$\begin{aligned}(\varphi^c)^o &= (\varphi^o)^o + (\varphi^i)^o - [(\varphi^i)^o]^o \\ &= \varphi^o + (\varphi^i)^o - (\varphi^i)^o = \varphi^o\end{aligned}$$

因此，我们得到式(6.3.1)近似到 $O(\varepsilon)$级的复合解

$$\varphi^c(x) = (\alpha - \beta\mathrm{e})(1 + x)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \beta\exp(1 - x) + O(\varepsilon)$$

比较上式与式(6.3.12)，如图 6.3.3，$\varphi^c(x)$确是一个在整个区域内都较好的近似解. 下面举几个例子说明用渐近匹配法求奇异微扰问题的近似解.

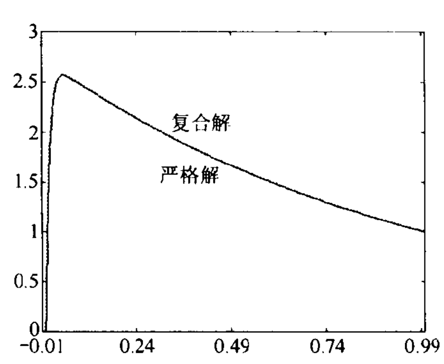


图 6.3.3 复合解与严格解的比较，二者基本一样

6.3.2 二阶线性方程的边值问题

利用渐近匹配法求变系数二阶线性方程的下列边值问题的微扰解

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + p_0(x)\varphi = 0, \qquad x \in (0,1) \tag{6.3.28}$$

$$\varphi(x)\big|_{x=0} = \alpha; \qquad \varphi(x)\big|_{x=1} = \beta \tag{6.3.29}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1$，$p_1(x)$在$[0,1]$内不变号，$p_1(x)>0$ 或者 $p_1(x)<0$. 首先分析何处是边界层，假定边界层发生在 $x=0$ 处，引进内变量

$$\xi = \varepsilon^{-v}x \text{ 或者 } x = \varepsilon^v\xi \ (v > 0) \tag{6.3.30}$$

代入式(6.3.28)得内部解 $\varphi^i(\xi)$满足的方程

$$\varepsilon^{1-2v}\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2} + \varepsilon^{-v}p_1(\varepsilon^v\xi)\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}\xi} + p_0(\varepsilon^v\xi)\varphi^i = 0 \tag{6.3.31}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时 $p_1(\varepsilon^v\xi)\to p_1(0)$和 $p_0(\varepsilon^v\xi)\to p_0(0)$，于是上式变成

$$\varepsilon^{1-2v}\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2} + \varepsilon^{-v}p_1(0)\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}\xi} + p_0(0)\varphi^i = 0 \tag{6.3.32}$$

如取 $v=1$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2} + p_1(0)\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{6.3.33}$$

上式的通解为

$$\varphi^i(\xi) = a_0 + b_0\exp[-p_1(0)\xi] \tag{6.3.34}$$

由内部解满足的边界条件 $\varphi^i(\xi)|_{\xi=0}=\alpha$ 得 $a_0=\alpha-b_0$

$$\varphi^i(\xi) = \alpha + b_0\{\exp[-p_1(0)\xi]-1\} \tag{6.3.35}$$

当 $p_1(0)<0$ 时，如取 $\varepsilon\to0$,$\exp[-p_1(0)\xi]$指数发散，因此边界层不可能在 $x=0$ 处；当 $p_1(0)>0$，如取 $\varepsilon\to0$，$\exp[-p_1(0)\xi]$ 指数衰减，边界层有可能在 $x=0$ 处；当 $p_1(0)=0$ 时，式 (6.3.33)的解应该为

$$\varphi^i(\xi) = \alpha + b_0\,\xi$$

同样有 $\varphi^i(\xi)\to\pm\infty(\varepsilon\to0)$,此时边界层仍然有可能在 $x=0$ 处，但 v 的取值不恰当，将在下面的具体例子中讨论．下面设 $p_1(x)>0$．为求常数 b_0，展开外部解 $\varphi^o(x)$成

$$\varphi^o(x) = \varphi_0^o(x) + \varepsilon\varphi_1^o(x) + \cdots \tag{6.3.36}$$

代入式(6.3.28)得到零级近似 $\varphi_0^o(x)$满足的方程

$$p_1(x)\,\frac{\mathrm{d}\,\varphi_0^o}{\mathrm{d}x} + p_0(x)\,\varphi_0^o = 0 \tag{6.3.37}$$

因 $p_1(x)>0$，边界层在 $x=0$ 处，故 $\varphi_0^o(x)$满足右边界条件，于是近似到 $O(\varepsilon)$ 级外部解为

$$\varphi^o(x) \approx \beta\exp\left[\int_x^1 \frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right] \tag{6.3.38}$$

渐近匹配过程如下：

(1) $\varphi^o(x)$用内部变量 $\xi=x/\varepsilon$ 表示

$$\varphi^o(\varepsilon\xi) \approx \beta\exp\left[\int_{\varepsilon\xi}^1 \frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right] \tag{6.3.39}$$

保持内部变量 ξ 不变，对小参数 ε 作展开并取首项

$$[\varphi^o(\varepsilon\xi)]^i \approx \beta\exp\left[\int_0^1 \frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right] \tag{6.3.40}$$

(2) $\varphi^i(\xi)$用外部变量 x 表示

$$\varphi^i(x/\varepsilon) \approx \alpha - b_0 + b_0\exp\left[-p_1(0)\,\frac{x}{\varepsilon}\right] \tag{6.3.41}$$

保持 x 不变，对小参数 ε 作展开并取首项

$$[\varphi^i(x/\varepsilon)]^o \approx \alpha - b_0 \tag{6.3.42}$$

(3) 由渐近匹配条件得

$$b_0 = \alpha - \beta\exp\left[\int_0^1 \frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]$$

因此零级近似内部解为

$$\varphi^i(\xi) = \beta\exp\left[\int_0^1 \frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]$$

$$+\left\{\alpha-\beta\exp\left[\int_0^1\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\right\}\exp[-p_1(0)\xi]+O(\varepsilon) \tag{6.3.43}$$

在[0,1]内均成立的复合解为

$$\varphi^c(x)=\beta\exp\left[\int_x^1\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]+\left\{\alpha-\beta\exp\left[\int_0^1\frac{p_0(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\right\}\exp\left[-p_1(0)\frac{x}{\varepsilon}\right]+O(\varepsilon) \tag{6.3.44}$$

例 6.3.1 考虑下列边值问题

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}-x\varphi=0,\qquad x\in(0,1) \tag{6.3.45}$$

$$\varphi(x)\big|_{x=0}=\alpha;\qquad \varphi\big|_{x=1}=\beta \tag{6.3.46}$$

因 $p_1(0)=0$，故式(6.3.38)不适合. 仍设边界层在 $x=0$ 处(因为 $p_1(x)\geqslant 0$)且作外部展开

$$\varphi^o(x)=\varphi_0^o(x)+\varepsilon\varphi_1^o(x)+\cdots \tag{6.3.47}$$

代入式(6.3.45)得

$$x\frac{\mathrm{d}\varphi_0^o}{\mathrm{d}x}-x\varphi_0^o=0 \tag{6.3.48}$$

上式满足右边界条件的解为

$$\varphi_0^o(x)=\beta\exp(x-1) \tag{6.3.49}$$

因此零级近似 $\varphi^o(x)$ 为

$$\varphi^o(x)=\beta\exp(x-1)+O(\varepsilon) \tag{6.3.50}$$

另一方面，考虑边界层内部解，作内部变量变换

$$\xi=\varepsilon^{-v}x\ \text{或}\ x=\varepsilon^v\xi\ (v>0) \tag{6.3.51}$$

代入式(6.3.45)得

$$\varepsilon^{1-2v}\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}\xi}-\varepsilon^v\xi\varphi^i=0 \tag{6.3.52}$$

这时应取 $v=1/2$，否则不可能与外部解匹配，于是上式变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}\xi}=0 \tag{6.3.53}$$

上式满足左边界的解为

$$\varphi^i(\xi)=a_0\int_0^\xi\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau+\alpha \tag{6.3.54}$$

其中 a_0 为常数，由外部解 $\varphi^o(x)$和内部解 $\varphi^i(\xi)$的匹配求得.

渐近匹配过程如下：

(1) 外部解 $\varphi^o(x)$用内部变量表示

$$\varphi^o(\sqrt{\varepsilon}\xi) \approx \beta\exp(x-1) = \beta\exp(\sqrt{\varepsilon}\xi - 1) \tag{6.3.55}$$

保持内部变量 ξ 不变，对小参数 ε 作展开

$$[\varphi^o(\sqrt{\varepsilon}\xi)]^i = \beta e^{-1}(1+\sqrt{\varepsilon}\xi+\cdots) \approx \beta e^{-1}; \tag{6.3.56}$$

(2) 内部解 $\varphi^i(\xi)$用外部变量表示

$$\varphi^i(x/\sqrt{\varepsilon}) \approx a_0\int_0^{x/\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau + \alpha$$

保持外部变量 x 不变，作展开

$$[\varphi^i(x/\sqrt{\varepsilon})]^o = a_0\int_0^{\infty}\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau + \alpha + \cdots \approx a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \alpha;$$

(3) 由渐近匹配条件得

$$\beta e^{-1} = a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \alpha$$

因此

$$a_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\beta e^{-1} - \alpha) \tag{6.3.57}$$

于是式(6.3.45)和(6.3.46)的复合解为

$$\varphi^c(x) = \beta\exp(x-1) + \alpha + \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\beta e^{-1} - \alpha)\int_0^{\xi}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau - \beta e^{-1} \tag{6.3.58}$$

上例假定 $p_1(x)$在(0,1)内无零点，当 $p_1(x)$在(0,1)内存在零点时，零点附近可能形成边界层，其意义是解在 $p_1(x)$的零点附近变化剧烈，不能用通常的微扰展开来求近似解.

例 6.3.2 考虑边值问题

$$\varepsilon\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{d\varphi}{dx} - \left(x-\frac{1}{2}\right)\varphi = 0, \qquad x\in(0,1) \tag{6.3.59}$$

$$\varphi(x)|_{x=0} = \alpha; \qquad \varphi(x)|_{x=1} = \beta \tag{6.3.60}$$

这时 $p_1(x)=(x-1/2)$：当 $x<1/2$, $p_1(x)<0$；当 $x>1/2$, $p_1(x)>0$. 不难表明在 $x=1/2$ 处存在边界层. 作外部展开

$$\varphi^o(x) = \varphi_0^o(x) + \varepsilon\varphi_1^o(x) + \cdots \tag{6.3.61}$$

代入式(6.3.59)得

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{d\varphi_0^o}{dx} - \left(x-\frac{1}{2}\right)\varphi_0^o = 0 \tag{6.3.62}$$

当 $x\neq 1/2$ 时，上式的解为

$$\varphi_0^o(x) = c_0\exp(x) \tag{6.3.63}$$

因此有分段表示的外部解

$$\varphi_r^o(x) = \beta\exp(x-1) + \cdots, \qquad x > 1/2 \tag{6.3.64}$$

$\varphi_r^o(x)$满足右边界条件，以及

$$\varphi_l^o(x) = \alpha\exp(x) + \cdots, \qquad x < 1/2 \tag{6.3.65}$$

$\varphi_l^o(x)$满足左边界条件．在边界层 $x=1/2$ 处作内部变量变换

$$\xi = \frac{x-1/2}{\varepsilon^v} \text{ 或者 } x = \frac{1}{2} + \varepsilon^v\xi \qquad (v > 0) \tag{6.3.66}$$

代入式(6.3.59)可知应取 $v=1/2$，于是内部解满足

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{6.3.67}$$

上式的一般解是

$$\varphi^i(\xi) = b_0 + a_0\int_0^\xi \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau \tag{6.3.68}$$

渐近匹配过程如下：

(1) $x=1/2$ 右边外部解 $\varphi_r^o(x)$用内变量表示

$$\varphi_r^o(\sqrt{\varepsilon}\xi + 1/2) \approx \beta\mathrm{e}^{\sqrt{\varepsilon}\xi - 1/2} = \beta(1+\sqrt{\varepsilon}\xi+\cdots)/\sqrt{\mathrm{e}}$$

于是

$$\left[\varphi_r^o(\sqrt{\varepsilon}\xi + 1/2)\right]^i = \beta/\sqrt{\mathrm{e}}; \tag{6.3.69}$$

(2) $x=1/2$ 右边内部解 $\varphi^i(\xi)$用外变量 x 表示

$$\begin{aligned}\varphi^i\left[(x-1/2)/\sqrt{\varepsilon}\right] &= b_0 + a_0\int_0^{(x-1/2)/\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= b_0 + a_0\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau + \cdots\end{aligned}$$

于是

$$\left\{\varphi^i\left[(x-1/2)/\sqrt{\varepsilon}\right]\right\}^o = b_0 + a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(3) 由 $x=1/2$ 右边渐近匹配条件得

$$b_0 + a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \beta/\sqrt{\mathrm{e}} \tag{6.3.70}$$

(4) $x=1/2$ 左边内部解 $\varphi^i(\xi)$用外变量 x 表示

$$\varphi^i\left[(-1/2+x)/\sqrt{\varepsilon}\right] = b_0 + a_0\int_0^{(-1/2+x)/\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau$$

注意：在 $x=1/2$ 的左边 $\xi<0$

$$\begin{aligned}\varphi^i\left[(-1/2+x)/\sqrt{\varepsilon}\right] &= b_0 + a_0\int_0^{-\infty}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau + \cdots \\ &= b_0 - a_0\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\mathrm{d}\tau + \cdots\end{aligned}$$

于是

$$\{\varphi^i[(-1/2+x)/\sqrt{\varepsilon}]\}^o = b_0 - a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

(5) 由 $x=1/2$ 左边渐近匹配条件得

$$b_0 - a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \alpha\sqrt{e} \qquad (6.3.71)$$

从(6.3.70)和(6.3.71)二式可解得

$$b_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{e}} + \alpha\sqrt{e}\right); \qquad a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{e}} - \alpha\sqrt{e}\right)$$

这时不可能得到[0,1]上统一的复合解，复合解只能分段表示

在[0,1/2]内 $\varphi_l^c = \varphi_l^o + \varphi_l^i - [\varphi_l^o]^i$，即

$$\varphi_l^c(x) = \alpha\exp(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{e}} + \alpha\sqrt{e}\right) \qquad (6.3.72)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{e}} - \alpha\sqrt{e}\right)\int_0^\xi \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau - \alpha\sqrt{e} + \cdots$$

在[1/2,1]内，$\varphi_r^c = \varphi_r^o + \varphi_r^i - [\varphi_r^o]^i$

$$\varphi_r^c(x) = \beta\exp(x-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{e}} + \alpha\sqrt{e}\right) \qquad (6.3.73)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\beta}{\sqrt{e}} - \alpha\sqrt{e}\right)\int_0^\xi \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau - \frac{\beta}{\sqrt{e}} + \cdots$$

在边界层，显然有 $\varphi_l^c(1/2) = \varphi_r^c(1/2)$.

6.3.3 非线性微扰引起的边界层

考虑下列非线性边值问题

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\varphi}{dx} + \varepsilon\varphi\frac{d\varphi}{dx} = 0, \qquad x \in (0,\infty) \qquad (6.3.74)$$

$$\varphi(x)|_{x=1} = 0; \qquad \varphi(x)|_{x=\infty} = 1 \qquad (6.3.75)$$

ε 出现在非线性项上，而不是出现在二阶导数. 作通常的微扰展开

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x) + \cdots \qquad (6.3.76)$$

代入式(6.3.74)并比较 ε 的同次幂得

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\varphi_0}{dx} = 0; \qquad \varphi_0(x)|_{x=1} = 0; \qquad \varphi_0(x)|_{x=\infty} = 1 \qquad (6.3.77)$$

以及

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\varphi_1}{dx} = -\varphi_0\frac{d\varphi_0}{dx}$$

$$\varphi_1(x)\big|_{x=1}=0;\qquad \varphi_1(x)\big|_{x=\infty}=0 \tag{6.3.78}$$

用 x^2 乘(6.3.77)第一式两边可得

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\varphi_0}{dx}\right)=0$$

因此(6.3.77)第一式的通解为

$$\varphi_0(x)=-a_0\frac{1}{x}+b_0$$

又由式(6.3.77)中的边界条件得 $b_0=1$ 和 $a_0=1$，故零级近似解为

$$\varphi_0(x)=1-\frac{1}{x} \tag{6.3.79}$$

下面考虑一级近似 $\varphi_1(x)$，把上式代入(6.3.78)第一式

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d\varphi_1}{dx}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3} \tag{6.3.80}$$

两边乘 x^2 得

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\varphi_1}{dx}\right)=-1+\frac{1}{x}$$

于是式(6.3.80)的通解为

$$\varphi_1(x)=-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x-(1+a_1)\frac{1}{x}+b_1 \tag{6.3.81}$$

由(6.3.78)第二式得 $b_1=a_1+1$

$$\varphi_1(x)=-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x+b_1\left(1-\frac{1}{x}\right) \tag{6.3.82}$$

但是 $x\to\infty$ 时，$\varphi_1(x)\to-\ln x$. 故 φ_1 不可能满足无穷远处边界条件. 在无穷远处，通常的微扰展开式(6.3.76)不合适，它只适合于 x 较小的区域. 于是在 $x=\infty$ 处存在"边界层". 由式(6.3.79)和(6.3.82)，外部解 $\varphi^o(x)$ 为

$$\varphi^o(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)+\varepsilon\left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x+b_1\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]+O(\varepsilon^2) \tag{6.3.83}$$

为了考察 $x=\infty$ 处解的特性，这时应采用内变量

$$\xi=\varepsilon^v x,\qquad v>0 \tag{6.3.84}$$

上式的作用是坐标压缩，故称为"压缩"变换，代入式(6.3.74)

$$\varepsilon^{2v}\frac{d^2\varphi^i}{d\xi^2}+\frac{2\varepsilon^{2v}}{\xi}\frac{d\varphi^i}{d\xi}+\varepsilon^{1+v}\varphi^i\frac{d\varphi^i}{d\xi}=0 \tag{6.3.85}$$

这时应取 $v=1$，于是内部解满足方程

$$\frac{d^2\varphi^i}{d\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{d\varphi^i}{d\xi}+\varphi^i\frac{d\varphi^i}{d\xi}=0 \tag{6.3.86}$$

作展开

$$\varphi^i(\xi) = \varphi_0^i(\xi) + \varepsilon\varphi_1^i(\xi) + \cdots \tag{6.3.87}$$

为了使展开式简单化，先利用匹配条件

$$[\varphi_0^i(\varepsilon x)]^o = [\varphi_0^o(\xi/\varepsilon)]^i$$

由式(6.3.83)，$[\varphi_0^o(\xi/\varepsilon)]^i = 1 - \varepsilon/\xi = 1$（当 ξ 不变而 $\varepsilon\to 0$ 时）. 因此要求 $[\varphi_0^i(\varepsilon x)]^o = 1$，于是我们寻求下列形式的内部解

$$\varphi^i(\xi) = 1 + \varepsilon\varphi_1^i(\xi) + \cdots \tag{6.3.88}$$

代入式(6.3.86)得

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_1^i}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} + 1\right)\frac{\mathrm{d}\varphi_1^i}{\mathrm{d}\xi} = 0 \tag{6.3.89}$$

上式可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2 \mathrm{e}^{\xi}\frac{\mathrm{d}\varphi_1^i}{\mathrm{d}\xi}\right) = 0 \tag{6.3.90}$$

于是可求得

$$\varphi_1^i(\xi) = c_1\int_{\infty}^{\xi}\frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau + d_1$$

利用 $\varphi_1^i(x)$满足的边界条件$\varphi_1^i|_{\xi=\infty} = 0$ 得 $d_1 \equiv 0$. 因此近似到 $O(\varepsilon^2)$，内部解 $\varphi^i(\xi)$为

$$\varphi^i(\xi) = 1 - c_1\varepsilon\int_{\xi}^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^2) \tag{6.3.91}$$

渐近匹配条件过程如下：

(1) 外部解式(6.3.83)用内变量 $\xi = \varepsilon x$ 表示

$$\varphi^o(\xi/\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{\xi} + \varepsilon\left[-\left(1 + \frac{\varepsilon}{\xi}\right)\ln\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) + b_1\left(1 - \frac{\varepsilon}{\xi}\right)\right]$$

当 $\varepsilon\to 0$ 上式近似为

$$[\varphi^o(\xi/\varepsilon)]^i = 1 - \frac{\varepsilon}{\xi} + \varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon\ln\xi + \varepsilon b_1 = 1 - \varepsilon\left(\frac{1}{\xi} + \ln\xi - \ln\varepsilon - b_1\right) \tag{6.3.92}$$

(2) 内部解式(6.3.91)用外变量 $x = \xi/\varepsilon$ 表示

$$\varphi^i(\varepsilon x) = 1 - c_1\varepsilon\int_{\varepsilon x}^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^2)$$

注意：上式积分下限不能简单地取 $\varepsilon\to 0$，因为边界层在 $x\to\infty$处，εx 仍然是有限大小. 利用积分

$$\int_{\varepsilon x}^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau = -\left.\frac{\exp(-\tau)}{\tau}\right|_{\varepsilon x}^{\infty} - \int_{\varepsilon x}^{\infty}\frac{\exp(-\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau = -\left.\left[\frac{\exp(-\tau)}{\tau} + \exp(-\tau)\ln\tau\right]\right|_{\varepsilon x}^{\infty}$$

$$-\int_{\varepsilon x}^{\infty}\exp(-\tau)\ln\tau\mathrm{d}\tau = \frac{\exp(-\varepsilon x)}{\varepsilon x} + \exp(-\varepsilon x)\ln\varepsilon x + \mathrm{O}(\varepsilon\ln\varepsilon)$$

于是有

$$\varphi^i(\varepsilon x) \approx 1 - \varepsilon c_1\left(\frac{1-\varepsilon x}{\varepsilon x} + \ln\varepsilon x\right) + \cdots,(\text{当 } \varepsilon \to 0)$$

即

$$[\varphi^i(\varepsilon x)]^o = 1 - c_1\frac{1}{x} + \varepsilon c_1(1 - \ln x - \ln\varepsilon) \tag{6.3.93}$$

(3) 由渐近匹配条件得

$$1 - \frac{1}{x} - \varepsilon\ln x + \varepsilon b_1 = 1 - c_1\frac{1}{x} + \varepsilon c_1(1 - \ln x - \ln\varepsilon) \tag{6.3.94}$$

比较 ε 的同次幂，应有

$$c_1 = 1; \qquad b_1 = 1 - \ln\varepsilon$$

因此在一级近似下，外部解和内部解分别为

$$\varphi^o(x) = 1 - \frac{1}{x} + \varepsilon\left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x + (1-\ln\varepsilon)\left(1-\frac{1}{x}\right)\right] + O(\varepsilon^2) \tag{6.3.95}$$

$$\varphi^i(\xi) = 1 - \varepsilon\int_\xi^\infty \frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau + \cdots \tag{6.3.96}$$

相应的复合解为

$$\begin{aligned}\varphi^c(x) = {} & 1 - \frac{1}{x} + \varepsilon\left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x + (1-\ln\varepsilon)\left(1-\frac{1}{x}\right)\right] \\ & + 1 - \varepsilon\int_{\varepsilon x}^\infty \frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau - \left[\left(1-\frac{1}{x}\right) + \varepsilon(1-\ln x-\ln\varepsilon)\right] + \cdots\end{aligned}$$

即

$$\varphi^c(x) = 1 - \varepsilon\int_{\varepsilon x}^\infty \frac{\exp(-\tau)}{\tau^2}\mathrm{d}\tau - \frac{\varepsilon}{x}\left[1 + \ln\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] + O(\varepsilon^2) \tag{6.3.97}$$

6.3.4 高维边值问题的边界层

边界层理论同样适合于偏微分方程,考虑下列边值问题

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (x,y) \in G \tag{6.3.98}$$

$$u(x,y)\big|_{y=0} = f(x); \qquad u(x,y)\big|_{x=0} = g(y)$$

$$u(x,y)\big|_{y=l} = h(x) \tag{6.3.99}$$

G 为半无穷带状区域$[0<x<\infty, 0<y<l]$，$0<\varepsilon\ll 1$，如图 6.3.4，b 为常数，并假定 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$；　$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$

要求解满足无穷远处条件

$$\lim_{x\to\infty} u(x,y) = 0$$

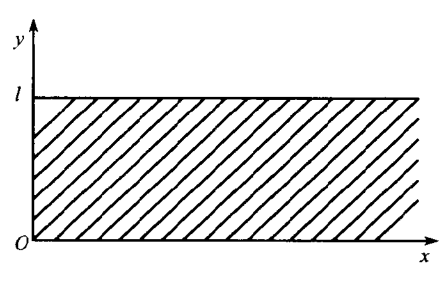


图 6.3.4 G 为带状区域

首先作通常的微扰展开

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)\varepsilon^n \tag{6.3.100}$$

代入式(6.3.98),比较同次幂得

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \tag{6.3.101}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + b\frac{\partial u_n}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2}\right), \qquad (n \geqslant 1) \tag{6.3.102}$$

$u_0(x,y)$满足边界条件

$$u_0(x,y)\big|_{y=0} = f(x); \qquad u_0(x,y)\big|_{y=l} = h(x)$$

$$u_0(x,y)\big|_{x=0} = g(y) \tag{6.3.103}$$

而 $u_n(x,y)(n\geqslant 1)$满足齐次边界条件. 式(6.3.101)的通解为

$$u_0(x,y) = F(y-bx) \tag{6.3.104}$$

其中 $F(z)$是任意函数, 上式代入式(6.3.102)可得

$$u_1(x,y) = F_1(y-bx) - \left[\frac{(1+b^2)}{b}\right] yF''(y-bx) \tag{6.3.105}$$

$u_1(x,y)$也可写成形式

$$u_1(x,y) = G_1(y-bx) - (1+b^2)xF''(y-bx) \tag{6.3.106}$$

其中 $F_1(z)$和 $G_1(z)$都是任意函数. 显然 $u_0(x,y)$与 $u_1(x,y)$不可能同时满足边界条件, 因此 存在边界层. 但我们仍不知边界层发生在三个边界的哪一个, 需逐个进行讨论.

首先,考虑 $y=0$ 和 $y=l$ 二条边界, 分别作内变量变换

$$y = \varepsilon\eta, (\text{在 } y = 0 \text{ 处}); \qquad y - l = \varepsilon\eta, (\text{在 } y = l \text{ 处}) \tag{6.3.107}$$

于是内部解 $u^i(x,\eta)\equiv\varphi^i(x,\eta)$(在 $y=0$ 或 $y=l$ 附近)满足

$$\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial\eta^2} + b\frac{\partial\varphi^i}{\partial\eta} + \varepsilon\frac{\partial\varphi^i}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial x^2} = 0 \tag{6.3.108}$$

内部解作展开

$$\varphi^i(x,\eta) = \varphi_0^i(x,\eta) + \varepsilon\varphi_1^i(x,\eta) + \cdots \tag{6.3.109}$$

代入式(6.3.108)得 $\varphi_0^i(x,\eta)$满足的方程

$$\frac{\partial^2\varphi_0^i}{\partial\eta^2} + b\frac{\partial\varphi_0^i}{\partial\eta} = 0 \tag{6.3.110}$$

上式的通解为

$$\varphi_0^i(x,\eta) = \alpha(x) + \beta(x)\exp(-b\eta) \tag{6.3.111}$$

其中 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$为任意函数. 下面分三种情况讨论:

(1) $b>0$, 把式(6.3.107)代入上式

$$\varphi_0^i(x,\eta) = \alpha(x) + \beta(x)\exp\left[-b\frac{(y-l)}{\varepsilon}\right], \quad (\text{在 } y = l \text{ 附近}) \tag{6.3.112}$$

如令 $\varepsilon \to 0$, 因$(y-l)<0, b>0$, 第二项指数发散, 不可能与外部解匹配, 于是边界层只能发生在 $y=0$ 处, 在 $y=0$ 处

$$\varphi_0^i(x,\eta) = \alpha(x) + \beta(x)\exp\left(-b\frac{y}{\varepsilon}\right) \tag{6.3.113}$$

因 $b>0$, 当 $\varepsilon \to 0$ 时指数趋向零, 有可能与外部解匹配.

(2) $b<0$, 由上讨论知, 边界层只能发生在 $y=l$ 处, 内部解的零级近似为

$$\varphi_0^i(x,\eta) = \alpha(x) + \beta(x)\exp(-b\eta); \qquad \eta = \frac{(y-l)}{\varepsilon} \tag{6.3.114}$$

(3) $b=0$, 式(6.3.110)的解为

$$\varphi_0^i(x,\eta) = \alpha(x) + \beta(x)\eta \tag{6.3.115}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 第二项发散而不可能与外部解匹配. 事实上, 这时应取内部变量为

$$y = \sqrt{\varepsilon}\eta \text{ 或 } y - l = \sqrt{\varepsilon}\eta$$

内部解满足方程

$$\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} = 0 \tag{6.3.116}$$

显然 $\varphi^i(x,\eta)$的零级近似满足

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^i}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi_0^i}{\partial x} = 0 \tag{6.3.117}$$

可望与外部解匹配, 事实上, 这时 $y=0$ 和 $y=l$ 都是边界层(见下讨论).

其次,来考察 $x=0$ 边界, 令内部变量 $\xi = x/\varepsilon$, 由式(6.3.98)得内部解 $u^i(\xi,y) \equiv \Psi^i(\xi,y)$(在 $x=0$ 附近)满足的方程

$$\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Psi^i}{\partial \xi} + \varepsilon b\frac{\partial \Psi^i}{\partial y} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial y^2} = 0 \tag{6.3.118}$$

相应的零级近似 $\Psi_0^i(\xi,y)$满足

$$\frac{\partial^2 \Psi_0^i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Psi_0^i}{\partial \xi} = 0 \tag{6.3.119}$$

因此有解

$$\Psi_0^i(\xi,y) = \gamma(y) + \delta(y)\exp(-\xi) \tag{6.3.120}$$

当取 $\varepsilon \to 0$ 时, $\Psi_0^i(\xi,y)$指数衰减, 有可能与外部解匹配, 因此 $x=0$ 处是一个边界层.

由以上讨论可以得到结论：(1) 当 $b>0, x=0$ 和 $y=0$ 是边界层；(2) 当 $b<0$，$x=0$ 和 $y=l$ 是边界层；(3) 当 $b=0, x=0$ 、$y=0$ 和 $y=l$ 都是边界层．下面分别进行讨论：

(1) $b>0$，由上讨论知，$x=0$ 和 $y=0$ 处是边界层，因此要求式(6.3.101)中 $u_0(x,y)$满足 $y=l$ 处边界条件(现在是外部解，故增加上标)

$$u_0^o(x,y)\big|_{y=l}=h(x)$$

于是决定出式(6.3.104)中的函数

$$u_0^o(x,y)=h\left[x-\frac{(y-l)}{b}\right] \tag{6.3.121}$$

而边界层内部解式(6.3.113)满足 $y=0$ 处边界条件 $\varphi_0^i(x,\eta)\big|_{\eta=0}=f(x)$．因此

$$\alpha(x)+\beta(x)=f(x) \tag{6.3.122}$$

决定 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$的另一个方程由匹配条件求得

$$[u_0^o(x,\varepsilon\eta)]^i=h\left[x-\frac{(\varepsilon\eta-l)}{b}\right]\Big|_{\varepsilon\to 0}\approx h\left(x+\frac{l}{b}\right)+O(\varepsilon)$$

$$[\varphi_0^i(x,y/\varepsilon)]^o=\alpha(x)+\beta(x)\exp\left(-b\frac{y}{\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon\to 0}=\alpha(x)+O(\varepsilon)$$

由渐近匹配条件

$$[u_0^o(x,\varepsilon\eta)]^i=[\varphi_0^i(x,y/\varepsilon)]^o$$

得

$$\alpha(x)=h\left(x+\frac{l}{b}\right) \tag{6.3.123}$$

代入式(6.3.122)得

$$\beta(x)=f(x)-h\left(x+\frac{l}{b}\right) \tag{6.3.124}$$

于是由式(6.3.113)得 $y=0$ 处的内部解

$$\varphi_0^i(x,\eta)=h\left(x+\frac{l}{b}\right)+\left[f(x)-h\left(x+\frac{l}{b}\right)\right]\exp(-b\eta) \tag{6.3.125}$$

对 $x=0$ 处边界层，$\Psi_0^i(\xi,y)$满足 $\Psi_0^i(\xi,y)\big|_{\xi=0}=g(y)$，于是由式(6.3.120)

$$\gamma(y)+\delta(y)=g(y) \tag{6.3.126}$$

利用 $x=0$ 处的匹配条件$[u_0^o(\varepsilon\xi,y)]^i=[\Psi_0^i(x/\varepsilon,y)]^o$

$$[u_0^o(\varepsilon\xi,y)]^i=h\left[\frac{(l-y)}{b}\right]$$

$$[\Psi_0^i(x/\varepsilon,y)]^o=\gamma(y)+\delta(y)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon\to 0}=\gamma(y)$$

得到

$$\gamma(y) = h\left[\frac{(l-y)}{b}\right] \tag{6.3.127}$$

代入式(6.3.126)得

$$\delta(y) = g(y) - h\left[\frac{(l-y)}{b}\right]$$

因此，在 $x=0$ 处的内部解为

$$\Psi_0^i(\xi, y) = h\left[\frac{(l-y)}{b}\right] + \left\{g(y) - h\left[\frac{(l-y)}{b}\right]\right\}\exp(-\xi) \tag{6.3.128}$$

于是得到复合解

$$u(x,y) \approx h\left[x - \frac{(l-y)}{b}\right] + \left[f(x) - h\left(x + \frac{l}{b}\right)\right]\exp(-b\eta) + \left\{g(y) - h\left[\frac{(l-y)}{b}\right]\right\}\exp(-\xi) \tag{6.3.129}$$

不难验证，在 $x=0$ 附近，上式变成式(6.3.128)，而在 $y=0$ 附近上式变成式(6.3.125).

(2) $b<0$, 讨论同 $b>0$ 相仿.

(3) $b=0$, 这时式(6.3.104)变成

$$u_0(x,y) = F(y) \tag{6.3.130}$$

因在 $y=0$ 和 l 处，$F(0)$和 $F(l)$为常数，故不可能满足边界条件

$$u_0(x,y)\big|_{y=0} = f(x); \qquad u_0(x,y)\big|_{y=l} = h(x)$$

如取 u_0 满足 $u_0(x,y)\big|_{x=0} = g(y)$边界条件，则 $F(y)=g(y)$，于是

$$u_0(x,y) = g(y) \tag{6.3.131}$$

但我们要求当 $x\to\infty$时 $u_0(x,y)=0$，上式一般不可能满足. 因此，综上所述，只有选 $F(y)=0$. 这时外部解的零级近似为零，即 $u_0(x,y)=0$，并且必须同时考虑三个边界层 $x=0, y=0$ 和 l.

(a) 在 $x=0$ 处，由(6.3.120)

$$\Psi_0^i(\xi, y) = g(y)\exp(-\xi); \qquad \xi = x/\varepsilon \tag{6.3.132}$$

(b) 在 $y=0$ 和 l 处，$\varphi_0^i(x,\eta)$满足式(6.3.117)

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^i}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi_0^i}{\partial x} = 0; \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ 或 } \frac{y-l}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{6.3.133}$$

以及边界条件

$$\varphi_0^i(x,\eta)\big|_{\eta=0} = f(x), \quad (y=0); \quad \varphi_0^i(x,\eta)\big|_{\eta=0} = h(x), \quad (y=l) \tag{6.3.134}$$

容易求得式 (6.3.133)和(6.3.134)的解为

$$\varphi_0^i(x,\eta)=\frac{\eta}{\sqrt{4\pi}}\int_x^\infty \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(\sigma-x)}\right]\frac{f(\sigma)}{\sqrt{(\sigma-x)^3}}\mathrm{d}\sigma,\qquad \eta=\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{6.3.135}$$

$$\varphi_0^i(x,\eta)=\frac{\eta}{\sqrt{4\pi}}\int_x^\infty \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(\sigma-x)}\right]\frac{h(\sigma)}{\sqrt{(\sigma-x)^3}}\mathrm{d}\sigma,\qquad \eta=\frac{y-l}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{6.3.136}$$

求得上二式，已利用了无穷远处边界条件 $\varphi_0^i(x,\eta)\to 0(x\to\infty$ 时). 由式(6.3.132)、(6.3.135)和(6.3.136)得复合解

$$u^c(x,y)\approx g(y)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)+\frac{y}{\sqrt{4\varepsilon\pi}}\int_x^\infty \exp\left[\frac{-y^2}{4\varepsilon(\sigma-x)}\right]\frac{f(\sigma)}{\sqrt{(\sigma-x)^3}}\mathrm{d}\sigma$$
$$+\frac{(y-l)}{\sqrt{4\varepsilon\pi}}\int_x^\infty \exp\left[-\frac{(y-l)^2}{4\varepsilon(\sigma-x)}\right]\frac{h(\sigma)}{\sqrt{(\sigma-x)^3}}\mathrm{d}\sigma \tag{6.3.137}$$

需要指出的是，当区域 G 比较复杂时，边界层可能发生在边界的某一段. 进一步的讨论见有关参考书.

6.4 WKB 近似和应用

本节讨论含大参数 λ 的方程，因 $\lambda\to\infty$ 时，如令 $\varepsilon=1/\lambda$，则 $\varepsilon\to 0$，故 6.1～6.3 节的理论和方法仍能应用. 但我们采用其他方法来研究 $\lambda\to\infty$ 时解的特性，特别是本征值问题中 $\lambda_n\to\infty$ 的行为，主要方法是 WKB 近似和 Liouville-Green 变换. 最后介绍利用 WKB 近似方法讨论非均匀波导中波的传播特性.

6.4.1 WKB 近似

考虑含大参数 λ 的二阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}+[\lambda^2 q_1(x)+q_2(x)]\varphi=0 \tag{6.4.1}$$

如果作通常的微扰展开

$$\varphi=\sum_{i=0}^\infty\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^i\varphi_i(x) \tag{6.4.2}$$

零级近似满足方程 $q_1(x)\varphi_0(x)=0$，故只能给出平凡解 $\varphi_0(x)=0$. 为了寻求适当的展开式，试考虑特殊情况：$q_1(x)=$常数，$q_2\equiv 0$. 这时式(6.4.1)可严格求解，其通解为

$$\varphi(x)=c_1\exp(\mathrm{i}\lambda\sqrt{q_1}x)+c_1\exp(-\mathrm{i}\lambda\sqrt{q_1}x),\qquad (q_1>0) \tag{6.4.3}$$

或者

$$\varphi(x) = c_1\exp(\lambda\sqrt{-q_1}x) + c_1\exp(-\lambda\sqrt{-q_1}x), \qquad (q_1 < 0) \tag{6.4.4}$$

由上二式可知，λ 出现在 $\varphi(x)$ 的指数上. 因此求式(6.4.1)下列形式的解

$$\varphi = \exp[\lambda G(x,\lambda)] \tag{6.4.5}$$

代入式(6.4.1)得 $G(x,\lambda)$ 满足的方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q_1 + \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{\lambda^2}q_2 = 0 \tag{6.4.6}$$

对 $G(x,\lambda)$ 作通常的微扰展开

$$G(x,\lambda) = G_0(x) + \frac{1}{\lambda}G_1(x) + \cdots \tag{6.4.7}$$

代入式(6.4.6)，比较 λ 的同次幂可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}G_0}{\mathrm{d}x}\right)^2 + q_1 = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}^2G_0}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}G_0}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{6.4.8}$$

于是可求得

$$G_0(x) = \begin{cases} \pm\,\mathrm{i}\int\sqrt{q_1(x)}\,\mathrm{d}x, & \text{如果 } q_1(x) > 0 \\ \pm\int\sqrt{-q_1(x)}\,\mathrm{d}x, & \text{如果 } q_1(x) < 0 \end{cases}$$

$$G_1(x) = -\ln\sqrt{\frac{\mathrm{d}G_0(x)}{\mathrm{d}x}} \tag{6.4.9}$$

因此近似到 $O(\lambda^{-2})$，式(6.4.6)的解为

$$G(x,\lambda) = \pm\,\mathrm{i}\int\sqrt{q_1(x)}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\lambda}\left[\ln\sqrt{\pm\,\mathrm{i}} + \ln\sqrt[4]{q_1(x)}\right] + O(\lambda^{-2}) \quad \text{如果 } q_1 > 0$$

或者

$$G(x,\lambda) = \pm\int\sqrt{-q_1(x)}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\lambda}\left[\ln\sqrt{\pm 1} + \ln\sqrt[4]{-q_1(x)}\right] + O(\lambda^{-2}) \quad \text{如果 } q_1 < 0$$

上二式代入式(6.4.5)，得式(6.4.1)的近似解

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{\pm\,\mathrm{i}\sqrt[4]{q_1(x)}}\exp\left[\pm\,\mathrm{i}\lambda\int\sqrt{q_1(x)}\,\mathrm{d}x\right], \qquad q_1 > 0 \tag{6.4.10}$$

上式是式(6.4.1)的两个线性独立解，因而通解可写成

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{q_1(x)}}\left\{c_1\cos\left[\lambda\int\sqrt{q_1(x)}\,\mathrm{d}x\right] + c_2\sin\left[\lambda\int\sqrt{q_1(x)}\,\mathrm{d}x\right]\right\} \tag{6.4.11}$$

当 $q_1<0$ 通解为

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{-q_1(x)}}\left\{c_1\exp\left[\lambda\int\sqrt{-q_1(x)}\,\mathrm{d}x\right] + c_2\exp\left[-\lambda\int\sqrt{-q_1(x)}\,\mathrm{d}x\right]\right\} \tag{6.4.12}$$

显然在 $q_1(x)$的零点附近式(6.4.11)或(6.4.12)不成立，这样的点称为**转折点**，在转折点附近存在边界层. 同 6.3 节一样，转折点附近的解称为内部解 $\varphi^i(x)$，而远离转折点的解称为外部解 $\varphi^o(x)$,式(6.4.11)或(6.4.12)即为外部解的分段表达式. 式(6.4.1)的近似解式(6.4.11)或(6.4.12)称为 WKB (Wentzel-Kramer-Brillourin)近似.

下面用 WKB 近似来求解本征值问题

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda^2 q_1(x)\varphi = 0, \qquad x \in (0,1)$$

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = 0 \tag{6.4.13}$$

设在[0,1]内 $q_1(x)>0$，对大本征值 λ

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{q_1(x)}}\left\{c_1\cos\left[\lambda\int_0^x\sqrt{q_1(x)}dx\right] + c_2\sin\left[\lambda\int_0^x\sqrt{q_1(x)}dx\right]\right\} \tag{6.4.14}$$

利用式(6.4.13)中边界条件得到 $c_1=0$ 以及

$$c_2[q_1(1)]^{-1/4}\sin\left[\lambda\int_0^1\sqrt{q_1(\tau)}d\tau\right] = 0 \tag{6.4.15}$$

因 $c_2\neq 0$，本征值 λ 满足

$$\lambda\int_0^1\sqrt{q_1(\tau)}d\tau = n\pi, \qquad (n = 1,2,\cdots) \tag{6.4.16}$$

上式可写成

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = n\pi\left[\int_0^1\sqrt{q_1(\tau)}d\tau\right]^{-1} \tag{6.4.17}$$

如果边界条件换成

$$\varphi'(x)|_{x=0} = 0; \qquad \varphi(x)|_{x=1} = 0$$

同样可得

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = (n+1/2)\pi\left[\int_0^1\sqrt{q_1(\tau)}d\tau\right]^{-1}$$

$$(n = 0,1,2,\cdots) \tag{6.4.18}$$

例 6.4.1 $q_1(x)=(1+x)^2$,式(6.4.16)给出

$$\lambda_n \approx n\pi\left[\int_0^1(1+\tau)d\tau\right]^{-1} = \frac{2}{3}n\pi$$

上式与数值计算求得的严格解相比(见表 6.4.1)，当 $n=1$ 时,相对误差为 1.65%，而当$n=7$ 时，相对误差只有 0.04%，可见已是一个很好的近似.

表 6.4.1　WKB 近似与精确解(数值计算)比较

n	1	2	3	4	5	6	7
λ_n 近似解	2.0944	4.1888	6.2832	8.3776	10.4720	12.5664	14.6608
λ_n 精确解	2.0604	4.1686	6.2691	8.3668	10.4632	12.5590	14.6545
误差 (%)	1.65	0.49	0.23	0.13	0.08	0.06	0.04

6.4.2　Liouville-Green 变换

对标准形式的 Sturm-Liouville 本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\varphi=\lambda\rho(x)\varphi,\qquad x\in(0,l)\tag{6.4.19}$$

$$\left(\alpha_1\varphi-\beta_1\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=0}=0;\qquad\left(\alpha_2\varphi+\beta_2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=l}=0\tag{6.4.20}$$

当 λ 很大时，$\varphi(x)$ 的渐近表达式以及本征值 λ_n 的行为如何？为此利用 Liouville-Green 变换

$$\varphi=f(x)w(z);\qquad z=g(x)\tag{6.4.21}$$

上式相当于同时对式(6.4.19)作自变量和函数变换. 我们希望选择恰当的函数 $f(x)$和 $g(x)$使式(6.4.19)变成简单的形式

$$\frac{\mathrm{d}^2w(z)}{\mathrm{d}z^2}+\lambda w(z)=\Psi(z)w(z)\tag{6.4.22}$$

于是当 $\lambda\to\infty$时，$\lambda w(z)\gg\Psi(z)w(z)$，可求得上式的近似解

$$w(z)=A\cos\sqrt{\lambda}z+B\sin\sqrt{\lambda}z$$

把式(6.4.21)代入式(6.4.19)得

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{[2f'(x)g'(x)p(x)+g''(x)f(x)p(x)+g'(x)f(x)p'(x)]}{[g'(x)]^2p(x)f(x)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$$
$$+\frac{[p(x)f''(x)+p'(x)f(x)-g(x)+\lambda\rho(x)f(x)]}{[g'(x)]^2p(x)f(x)}w=0$$

对照上式与式(6.4.22)，$f(x)$和 $g(x)$应该满足

$$2f'(x)g'(x)p(x)+g''(x)f(x)p(x)+g'(x)f(x)p'(x)=0\tag{6.4.23}$$

$$\frac{\rho(x)f(x)}{[g'(x)]^2f(x)p(x)}=1\tag{6.4.24}$$

由式(6.4.23)和(6.4.24)得

$$\ln[f^2g'(x)p(x)]=\ln c;\qquad g(x)=\int_0^x\sqrt{\frac{\rho(\tau)}{p(\tau)}}\mathrm{d}\tau\tag{6.4.25}$$

取 $c=1$ 则 $f^2=1/\sqrt{p(x)\rho(x)}$，于是如果取 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{p(x)\rho(x)}};\qquad g(x)=\int_0^x\sqrt{\frac{\rho(\tau)}{p(\tau)}}\mathrm{d}\tau \tag{6.4.26}$$

式(6.4.19)化成式(6.4.22)，其中 $\Psi(z)$ 为

$$\Psi(z)=\frac{1}{g'^2(x)f(x)p(x)}[p(x)f''(x)+p'(x)f(x)-q(x)]|_{z=g(x)} \tag{6.4.27}$$

因此当 $\lambda\to\infty$ 时，式(6.4.19)的近似解为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{p(x)\rho(x)}}\{A\cos[\sqrt{\lambda}g(x)]+B\sin[\sqrt{\lambda}g(x)]\} \tag{6.4.28}$$

由上式，要求 $\rho(x)/p(x)>0$，如果 $\rho(x)/p(x)<0$，则式(6.4.24)应为

$$\frac{\rho(x)f(x)}{[g'(x)]^2f(x)p(x)}=-1$$

于是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 应取为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{-p(x)\rho(x)}};\qquad g(x)=\int_0^x\sqrt{-\frac{\rho(\tau)}{p(\tau)}}\mathrm{d}\tau \tag{6.4.29}$$

同时，式(6.4.22)变成

$$\frac{\mathrm{d}^2w(z)}{\mathrm{d}z^2}-\lambda w(z)=\Psi_1(z)w(z) \tag{6.4.30}$$

近似解为

$$w(z)\approx C\exp(-\sqrt{\lambda}z)+D\exp(\sqrt{\lambda}z) \tag{6.4.31}$$

在正则 Sturm-Liouville 问题中 $p(x)>0$ 和 $\rho(x)>0$，因此只要考虑式(6.4.28)即可.

为了简单，取式(6.4.20)中 $\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_1=\beta_2=0$，因此式(6.4.28)中 $A=0$，而本征值 λ_n 满足

$$\sqrt{\lambda_n}g(l)=n\pi,\qquad (n\to\infty)$$

严格地，上式应写成

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi^2n^2}{\lambda_n}\right)=g^2(l) \tag{6.4.32}$$

如果边界条件是 $\varphi'(x)|_{x=0}=0$ 和 $\varphi(x)|_{x=l}=0$，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\lambda_n}=g^2(l) \tag{6.4.33}$$

与式(6.4.32)相应的近似本征函数为

$$\varphi_n(x)\approx\frac{B}{\sqrt[4]{p(x)\rho(x)}}\sin\left[\frac{n\pi}{g(l)}g(x)\right] \tag{6.4.34}$$

其中 B 由归一化条件决定.

例 6.4.2 考虑 $x\in[1,2]$上 Bessel 方程的本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{m^2}{x}\varphi=\lambda x\varphi;\qquad \varphi\mid_{x=1}=\varphi\mid_{x=2}=0 \tag{6.4.35}$$

在区间[1,2]内 $p(x)=x>0,\rho(x)=x>0$ 故上述结果可用. 由式(6.4.32)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}=\frac{1}{\pi^2}\int_1^2\sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}$$

相应的本征函数为

$$\varphi_n(x)\approx\frac{B}{\sqrt{x}}\sin[n\pi(x-1)] \tag{6.4.36}$$

其中 B 为归一化常数.

当 $p(x)$或 $\rho(x)$存在零点(转折点)时, 在转折点附近式(6.4.28)已不成立, 需用边界层理论来处理, 下面用具体例子来说明之.

6.4.3 具有转折点的本征值问题

考虑具体例子

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2(1-x^2)\varphi=0;\qquad \varphi\mid_{x=0}=\varphi\mid_{x=1}=0 \tag{6.4.37}$$

其中 λ 为本征值, $p(x)=1,\rho(x)=(1-x^2)$. 由 WKB 近似求得

$$\varphi(x)\approx\frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}\left[A\cos\left(\lambda\int_0^x\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right)+B\sin\left(\lambda\int_0^x\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right)\right] \tag{6.4.38}$$

因边界点 $x=1$ 是转折点, 上式是外部解, 只能满足 $x=0$ 处边界条件, 故 $A\equiv0$. 于是得外部解

$$\varphi^o(x)\approx\frac{B}{(1-x^2)^{1/4}}\sin\left(\lambda\int_0^x\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right) \tag{6.4.39}$$

在 $x=1$ 点附近, 作内变量变换

$$\xi=(1-x)\lambda^v \tag{6.4.40}$$

代入式(6.4.37)得内部解满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2}+2\lambda^{(2-3v)}\xi\varphi^i=0 \tag{6.4.41}$$

得到上式, 已利用关系 $1-x^2=(1-x)(1+x)\approx2(1-x)$ (在 $x\approx1$ 附近). 分三种情况讨论:

(1) $(2-3v)<0$, 取 $\lambda\to\infty$, 式(6.4.41)变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2}=0$$

于是 $\varphi^i=c_0+c_1\xi$，显然不可能与外部解式(6.4.39)匹配；

(2) $(2-3v)>0$，取 $\lambda\to\infty$，式(6.4.41)变成 $\varphi^i(x)=0$；

(3) $(2-3v)=0$，即 $v=2/3$，这时式(6.4.41)变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2}+2\xi\varphi^i=0 \tag{6.4.42}$$

上式的解具有较复杂的形式，可望能与外部解式(6.4.39)匹配．因此取 $v=2/3$．令 $z=2^{1/3}\xi$，上式变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}z^2}+z\varphi^i=0 \tag{6.4.43}$$

作函数变换 $\varphi^i=\sqrt{z}v$ 得

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+\left(z-\frac{1}{4z^2}\right)v=0 \tag{6.4.44}$$

进一步令 $\eta=(2/3)z^{3/2}$，上式变成 1/3 阶 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\eta}+\left(1-\frac{1}{9\eta^2}\right)v=0 \tag{6.4.45}$$

通解为

$$v(\eta)=c_1J_{1/3}(\eta)+c_2J_{-1/3}(\eta) \tag{6.4.46}$$

回到原来的变量，式(6.4.42)的通解为

$$\varphi^i(\xi)=\sqrt{\xi}\left[c_1J_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right)+c_2J_{-1/3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right)\right] \tag{6.4.47}$$

内部解应满足边界条件 $\varphi^i|_{x=1}=0$ 亦即 $\varphi^i|_{\xi=0}=0$，因

$$J_{1/3}(0)=0,\qquad c_2\sqrt{\xi}J_{-1/3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right)\sim c_2$$

故应取 $c_2\equiv0$，于是式(6.4.47)变成

$$\varphi^i(\xi)=c_1\sqrt{\xi}J_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right) \tag{6.4.48}$$

内部解和外部解中尚有二个待定常数 c_1 和 B，它们由归一化条件和渐近匹配条件决定．下面我们匹配式(6.4.39)和(6.4.48)，求出 B 和 c_1 的关系以及本征值 λ：

(1) 外部解 $\varphi^o(x)$用内变量 $\xi=(1-x)\lambda^{2/3}$表示

$$\varphi^o=\frac{B}{[1-(1-\xi\lambda^{-2/3})^2]^{1/4}}\sin\left(\lambda\int_0^{1-\xi\lambda^{-2/3}}\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau\right) \tag{6.4.49}$$

保持 ξ 不变，作近似 $\lambda\to\infty$

$$\lambda\int_0^{1-\xi\lambda^{-2/3}}\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau=\lambda\int_0^1\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau-\lambda\int_{1-\xi\lambda^{-2/3}}^1\sqrt{(1+\tau)(1-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$\approx \frac{\pi}{4}\lambda + \sqrt{2}\lambda\int_1^{1-\xi\lambda^{-2/3}}\sqrt{1-\tau}\,d\tau = \frac{\pi}{4}\lambda - \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}$$

于是

$$(\varphi^o)^i \approx \frac{B\lambda^{1/6}}{2^{1/4}\sqrt[4]{\xi}}\sin\left(\frac{\pi\lambda}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right); \tag{6.4.50}$$

(2) 内部解 $\varphi^i(\xi)$用变量 $x=1-\xi\lambda^{-2/3}$作外部展开，并作近似 $\lambda\to\infty$得

$$(\varphi^o)^i \approx c_1\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt[4]{\xi}}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right); \tag{6.4.51}$$

(3) 匹配条件$(\varphi^o)^i = (\varphi^i)^o$

$$\frac{B\lambda^{1/6}}{2^{1/4}\sqrt[4]{\xi}}\sin\left(\frac{\pi\lambda}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2}\right) = c_1\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt[4]{\xi}}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\xi^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right)$$

上式恒成立条件是

$$\frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{\pi}{4}\lambda = -\frac{5}{12}\pi, \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{3}}B\lambda^{1/6} \tag{6.4.52}$$

因此本征值 λ_n 的近似解为

$$\lambda_n = 4\left(n + \frac{11}{12}\right), \qquad (n = 1,2,\cdots) \tag{6.4.53}$$

上式与数值计算求得的严格解相比(见表 6.4.2)，即使 $n=1$，相对误差也只有 0.152%，而当 $n=6$ 时，相对误差只有 0.002%，可见是一个很好的近似.

表 6.4.2 WKB 近似与精确解(数值计算)比较

n	1	2	3	4	5	6
λ_n 近似解	3.6667	7.6667	11.6667	15.6667	19.6667	23.6667
λ_n 精确解	3.6723	7.6688	11.6679	15.6675	19.6673	23.6672
误差 (%)	0.152	0.027	0.010	0.005	0.003	0.002

上例中 $x=1$ 是 $\rho(x)=1-x^2$ 的单重零点，因此，内部解 φ^i 满足方程(6.4.42). 下面考虑 $x=\alpha$ 是$\rho(x)$的 m 重零点情形. 为方便，仍设 $p(x)=1$. 因 $x=\alpha$ 是$\rho(x)$的 m 重零点，$\rho(x)$可写成

$$\rho(x) = (x-\alpha)^m f(x) \tag{6.4.54}$$

其中 $f(\alpha)\neq 0$. 在 $x=\alpha$ 附近取内部变量

$$\xi = (x - \alpha)/\lambda^{-v} = \lambda^{v}(x - \alpha) \tag{6.4.55}$$

代入方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \lambda^2(x - \alpha)^m f(x)\,\varphi = 0 \tag{6.4.56}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2} + \lambda^{(2-mv-2v)}\xi^m f(\alpha + \xi\lambda^{-v})\varphi = 0 \tag{6.4.57}$$

为与外部解匹配，应取 v 满足$(2 - mv - 2v) = 0$，即 $v = 2/(m + 2)$. 当 $\lambda \to \infty$，内部解 φ^i 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}\xi^2} + f(\alpha)\xi^m\varphi^i = 0 \tag{6.4.58}$$

上式的解可用 $1/(m+2)$阶 Bessel 函数来表示，因此求得内部解的一般形式是

$$\varphi^i(\xi) = \sqrt{\xi}\left[c_1 J_{1/(m+2)}\left(\frac{2\sqrt{f(\alpha)}}{m+2}\xi^{\frac{m+2}{2}}\right) + c_2 J_{-1/(m+2)}\left(\frac{2\sqrt{f(\alpha)}}{m+2}\xi^{\frac{m+2}{2}}\right)\right] \tag{6.4.59}$$

当 $f(\alpha) < 0$，上式中换成虚宗量 Bessel 函数 $I_{-1/(m+2)}$较方便.

例 6.4.3 考虑本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \lambda^2\rho(x)\varphi = 0; \qquad \varphi\,|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = 0 \tag{6.4.60}$$

其中 $\rho(x) = (1 - x)^m f(x), f(1) > 0$. 显然 $x = 1$ 是 $\rho(x)$的 m 重零点. 外部解为

$$\varphi^o(x) = \frac{B}{\sqrt[4]{(1 - x)^m f(x)}}\sin\left[\lambda\int_0^x \sqrt{(1 - \tau)^m f(\tau)}\mathrm{d}\tau\right] \tag{6.4.61}$$

内部解为

$$\varphi^i(\xi) = C\sqrt{\xi}\,J_{1/(m+2)}\left[\frac{2\sqrt{f(1)}}{m+2}\xi^{\frac{m+2}{2}}\right] \tag{6.4.62}$$

待定常数 B 和 C 由匹配条件和归一化条件求得：

(1) 内部解 φ^i 作外部变量展开，并作近似 $\lambda \to \infty$，容易求得

$$(\varphi^i)^o = \sqrt{\frac{m+2}{\pi\sqrt{f(1)}}}\frac{C}{\xi^{m/4}}\cos\left[\frac{2\sqrt{f(1)}}{m+2}\xi^{\frac{m+2}{2}} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{m+1} + 1\right)\right]; \tag{6.4.63}$$

(2) 外部解 φ^o 作内部变量展开，并作近似 $\lambda \to \infty$，容易求得

$$(\varphi^o)^i = \frac{\lambda^{\frac{m}{2(m+2)}}}{\sqrt[4]{f(1)}}\frac{B}{\xi^{m/4}}\sin\left[\lambda\delta - \frac{2\sqrt{f(1)}}{m+2}\xi^{(m+2)/2}\right] \tag{6.4.64}$$

其中 δ 是积分 $\delta = \int_0^1 \sqrt{(1 - \tau)^m f(\tau)}\mathrm{d}\tau$；

(3) 由$(\varphi^o)^i = (\varphi^i)^o$ 得

$$C = \sqrt{\frac{\pi}{m+2}}\lambda^{\frac{m}{2(m+2)}}B$$

$$\frac{\pi}{2} + n\pi - \lambda\delta = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{m+1} + 1\right) \tag{6.4.65}$$

从上式得本征值 λ_n 的近似解

$$\lambda_n = \frac{\pi}{\delta}\left[n + \frac{1}{4}\left(3 + \frac{2}{m+1}\right)\right] \tag{6.4.66}$$

如果令 $z = -2^{1/3}\xi$，方程(6.4.42)变成

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi^i}{\mathrm{d}z^2} - z\varphi^i = 0 \tag{6.4.67}$$

称为 **Airy 方程**，通解为

$$\varphi^i = a_1 Ai(z) + a_2 Bi(z) \tag{6.4.68}$$

其中 $Ai(z)$和 $Bi(z)$分别称为第一和第二类 Airy 函数. Airy 函数与 1/3 阶 Bessel 函数和虚宗量 Bessel 函数有关系

$$Ai(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{|z|}\left[J_{1/3}(\xi) + J_{-1/3}(\xi)\right], & z \leqslant 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{z}\left[I_{-1/3}(\xi) - I_{1/3}(\xi)\right], & z \geqslant 0 \end{cases} \tag{6.4.69}$$

以及

$$Bi(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{|z|}{3}}\left[-J_{1/3}(\xi) + J_{-1/3}(\xi)\right], & z \leqslant 0 \\ \sqrt{\frac{z}{3}}\left[I_{-1/3}(\xi) + I_{1/3}(\xi)\right], & z \geqslant 0 \end{cases} \tag{6.4.70}$$

其中 $\xi = \frac{2}{3}|z|^{3/2}$.

6.4.4 WKB 近似的应用

本小节介绍 WKB 近似方法应用的一个例子，分析薄长波导中波的传播问题. 考虑膜的横向强迫振动，假定膜的长度远大于宽度，宽度边界 $y = \pm G(x)$固定，如图 6.4.1

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$x \in (0,\infty), \qquad -G(x) < y < G(x) \tag{6.4.71}$$

边界条件

$$u(x,y,t)\big|_{y=\pm G(x)} = 0; \qquad u(0,y,t) = f(y)\cos\omega t \tag{6.4.72}$$

注意:式(6.4.71)对 x 的偏导引进小参数 ε,因为 y 方向固定，该方向的张力远大于 x 方向. 下面用 WKB 近似分析这种波导结构中,波传播产生的有趣物理现象.

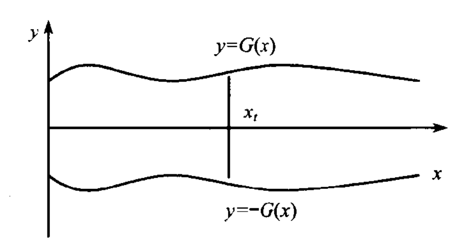


图 6.4.1 薄长波导中波的传播问题

根据 WKB 近似方法，设式(6.4.71)的传播解为

$$u(x,y,t) = \exp i\left[\omega t - \frac{\theta(x)}{\varepsilon^{\alpha}}\right] \cdot [u_0(x,y) + \varepsilon^{\alpha}u_1(x,y) + \cdots] \tag{6.4.73}$$

代入式(6.4.71)给出

$$\varepsilon^{2-2\alpha}\left[-\theta_x^2 u_0 - i\varepsilon^{\alpha}\left(\theta_{xx}u_0 + 2\theta_x\frac{\partial u_0}{\partial x} + \theta_x^2 u_1\right) + \cdots\right] + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \varepsilon^{\alpha}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \cdots$$
$$= -\omega^2\mu^2(u_0 + \varepsilon^{\alpha}u_1 + \cdots) \tag{6.4.74}$$

显然当取 $\alpha = 1$，上式零阶近似为

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (\omega^2\mu^2 - \theta_x^2)u_0 = 0; \qquad u_0(x,y)|_{y=\pm G(x)} = 0 \tag{6.4.75}$$

上式的解可表示为

$$u_0(x,y) = A(x)\sin[\lambda(y+G)] \tag{6.4.76}$$

其中 $\lambda = \sqrt{\omega^2\mu^2 - \theta_x^2}$，把 x 看作常数，上式显然满足式(6.4.75)和边界 $y = -G(x)$的条件．从边界 $y = G(x)$的条件，导出决定 $\theta(x)$的方程

$$2\lambda G = n\pi, \qquad n = 1,2,\cdots \tag{6.4.77}$$

即

$$\theta_x = \pm\sqrt{\omega^2\mu^2 - \lambda_n^2} \tag{6.4.78}$$

其中 $\lambda_n(x) = n\pi/(2G)$．当 n 足够大，即 $\lambda_n > \omega\mu$，θ_x 是虚数．因此高阶模式不传播，而是指数衰减的振动．式(6.4.74)的一阶近似为

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \lambda_n^2 u_1 = i\left(\theta_{xx}u_0 + 2\theta_x\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$$
$$u_1(x,y)|_{y=\pm G(x)} = 0 \tag{6.4.79}$$

第一式两边乘 u_0 并积分

$$\int_{-G}^{G}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \lambda_n^2 u_1\right)u_0 dy = i\int_{-G}^{G}\left(\theta_{xx}u_0 + 2\theta_x\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)u_0 dy \tag{6.4.80}$$

右边分部积分二次，并利用式(6.4.75)，可证明右边积分为零，即

$$\int_{-G}^{G}\left(\theta_{xx}u_0+2\theta_x\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)u_0\mathrm{d}y=\int_{-G}^{G}\frac{\partial(\theta_x u_0^2)}{\partial x}\mathrm{d}y=0 \tag{6.4.81}$$

上式是 u_0 必须满足的条件，称为**可解性条件**. 利用变上下限积分的微分规则上式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-G}^{G}\theta_x u_0^2\mathrm{d}y-\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\theta_x u_0^2\right)\Bigg|_{y=-G}^{y=G}=0 \tag{6.4.82}$$

利用边界条件，第二项为零，于是

$$\theta_x\int_{-G}^{G}u_0^2\mathrm{d}y=a(\text{常数}) \tag{6.4.83}$$

式(6.4.76)代入上式得到 $A=a/\sqrt{\theta_x G(x)}$. 因此，最后得到WKB近似解为

$$u(x,y,t)\approx\frac{a}{\sqrt{\theta_x G(x)}}\exp\left\{\mathrm{i}\left[\omega t\pm\frac{\theta(x)}{\varepsilon}\right]\right\}\sin[\lambda_n(y+G)] \tag{6.4.84}$$

其中

$$\theta=\int_0^x\sqrt{\omega^2\mu^2-\lambda_n^2}\mathrm{d}x;\qquad\lambda_n=\frac{n\pi}{2G(x)}\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{6.4.85}$$

第一式中的不定积分表示振动的相位因子，由式(6.4.72)中初始条件决定. 当 $\theta_x(x)=0$，式(6.4.84)不成立，因而存在转折点. 转折点 x_t 的决定方程为

$$\mu(x_t)=\frac{n\pi}{2\omega G(x_t)} \tag{6.4.86}$$

假定上式只有一个解，即只存在一个转折点. 在转折点附近形成边界层，令坐标变换为

$$\xi=(x-x_t)\varepsilon^{-\beta} \tag{6.4.87}$$

内部解展开为

$$u^i(\xi,y,t)=\varepsilon^{\gamma}\mathrm{e}^{i\omega t}\{u_0^i(\xi)\sin[\lambda_n(y+G_t)]+\cdots\} \tag{6.4.88}$$

其中 $G_t\equiv G(x_t)$. 上二式代入式(6.4.71)得到内部解满足的方程

$$\varepsilon^{2-2\beta}\frac{\mathrm{d}^2u_0^i}{\mathrm{d}\xi^2}+\theta_x^2u_0^i+\cdots=0 \tag{6.4.89}$$

其中

$$\theta_x^2(x_t+\varepsilon^{\beta}\xi)=\theta_x^2(x_t)+\varepsilon^{\beta}\xi\frac{\mathrm{d}\theta_x^2(x_t)}{\mathrm{d}x}+\cdots=\varepsilon^{\beta}\xi\frac{\mathrm{d}\theta_x^2(x_t)}{\mathrm{d}x}+\cdots \tag{6.4.90}$$

匹配要求 $2-2\beta=\beta$，即 $\beta=2/3$. 式(6.4.89)变成

$$\frac{\mathrm{d}^2u_0^i(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}-\kappa\xi u_0^i(\xi)=0 \tag{6.4.91}$$

其中 $\kappa=-\mathrm{d}\theta_x^2(x_t)/\mathrm{d}x$，假定 $\kappa>0$，则上式的通解为

$$u_0^i(\xi)=a_1Ai(\kappa^{1/3}\xi)+a_2Bi(\kappa^{1/3}\xi) \tag{6.4.92}$$

因第二项当 $\xi\to\infty$ 时发散，故取 $a_2=0$. 外部解由式(6.4.84)取为

$$u(x,y,t)\approx\begin{cases}u_L(x,y,t), & 0\leqslant x<x_t\\ u_R(x,y,t), & x_t<x<\infty\end{cases} \tag{6.4.93}$$

其中

$$u_L\approx\frac{1}{\sqrt{\theta_xG(x)}}\left\{a_L\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t-\frac{\theta(x)}{\varepsilon}\right)\right]+b_L\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t+\frac{\theta(x)}{\varepsilon}\right)\right]\right\}\cdot\sin[\lambda_n(y+G)] \tag{6.4.94}$$

$$u_R=\frac{a_R}{\sqrt{|\theta_x|G(x)}}\exp\left[\mathrm{i}\omega t-\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right]\cdot\sin[\lambda_n(y+G)]$$

其中

$$\theta x=\int_x^{x_t}\sqrt{\omega^2\mu^2-\lambda_n^2}\,\mathrm{d}x;\qquad \varphi(x)=\int_{x_t}^{x}\sqrt{\lambda_n^2-\omega^2\mu^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.4.95}$$

注意：在转折点 $\theta_x(x)=0$，即 $\omega^2\mu^2-\lambda_n^2=0$，而在转折点左边 $\omega^2\mu^2-\lambda_n^2>0$，右边 $\omega^2\mu^2-\lambda_n^2<0$，因此在转折点右边把解取成指数衰减形式. 通过式(6.4.92)与式(6.4.93)匹配，可以求得

$$\gamma=-1/6;\qquad a_1=\frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa^{1/6}G_t^{1/2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}a_L$$

$$b_L=-\mathrm{i}a_L;\qquad a_R=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}a_L \tag{6.4.96}$$

其中常数 a_L 由(6.4.72)第二式决定. 分析式(6.4.94)，可以得到结论：

(1) 如果 $0<x_t<\infty$，在转折点左边，波由两部分组成，即入射波和反射波，转折点具有反射面作用，而在转折点右边，振动指数衰减；

(2) 从式(6.4.86)可知，转折点位置与激发频率 ω 和模式 n 有关，一般，随着频率 ω 下降，转折点向左移动，当频率 ω 下降到 $\omega=\omega_c$，转折点位于原点，即 $x_t=0$，因此频率 ω 低于 ω_c 时，所有 $n\neq0$ 的模式都不能传播，ω_c 称为**低频截止频率**；

(3) 当 n 足够大，使 $x_t\leqslant0$，因此高阶模式不能传播.

考虑特殊情况，即宽度均匀 $G(x)=l$(常数)且密度均匀 $\mu(x)=\mu_0$(常数)

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{2l},\qquad(n=1,2,\cdots);\qquad\theta_x=\sqrt{\omega^2\mu_0^2-\lambda_n^2} \tag{6.4.97}$$

当 $\omega=\lambda_n/\mu_0$ 时，也有 $\theta_x=0$. 这一性质与 x 无关，因而不是转折点引起的. 此时，激发源的振动频率与系统共振频率一致，产生共振，应考虑系统的阻尼或非线性！

习 题 六

6.1 求第一个本征值和相应本征函数的微扰至 $O(\varepsilon)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda(1 - \varepsilon \sin^2 x)u = 0, \qquad x \in (0,\pi)$$

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

6.2 求第一个本征值和相应本征函数的微扰至 $O(\varepsilon)$

$$-\nabla^2 u + \varepsilon xyu = \lambda u, \qquad x, y \in (0,\pi)$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,\pi)}{\partial y} = 0$$

6.3 求球内第一个本征值的微扰至 $O(\varepsilon)$

$$-\nabla^2 u + (\lambda - \varepsilon r^2)u = 0, \qquad r < 1$$

$$u(x,y,z) = 0, \qquad r = 1$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

6.4 导出下列 Sturm-Liouville 本征值问题的微扰方法,本征值的微扰至 $O(\varepsilon)$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)u = \lambda u, \qquad x \in (0,l)$$

(a) $\varepsilon \dfrac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} - u(0) = 0; \qquad u(l) = 0;$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} - \varepsilon u(0) = 0; \qquad u(l) = 0.$

6.5 使用微扰法解边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2 u = 1, \qquad x^2 + y^2 < 1$$

$$u(x,y) = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

提示:用极坐标.

6.6 使用微扰法解边值问题

$$[1 + \varepsilon(x^2 + y^2)]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, \qquad x^2 + y^2 < 1$$

$$u(x,y) = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

提示:用极坐标.

6.7 使用微扰法解边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + \varepsilon y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \qquad 0 < y < \pi$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,\pi) = 0; \qquad u(x,0) = 1.$$

6.8 利用边界微扰法解 Laplace 方程的第二类边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < l, \qquad \varepsilon x < y < L$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,L)}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u(x,\varepsilon x)}{\partial n}=\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

6.9 利用边界微扰法解 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \varepsilon\sin y<x<l,\qquad y>0$$

$$u(\varepsilon\sin y,y)=u(l,y)=0,\qquad y>0$$

$$u(x,0)=\sin(\pi x/l),0<x<l;\qquad u(x,y)<\infty,y\to\infty.$$

6.10 用多尺度展开法解弱阻尼波动方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon u-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad x\in(-\infty,\infty),\qquad t>0$$

$$u(x,0)=f(x);\qquad u_t(x,0)=0.$$

6.11 考虑单摆运动，如果摆的长度随时间缓慢变化，则运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+k(\varepsilon t)\sin\theta=0,\qquad t>0$$

$$\theta(0)=\varepsilon;\qquad \theta'(0)=0$$

利用多尺度展开法求足够长时间后的近似表达式.

6.12 在非线性声学中，声压满足方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\varepsilon\beta\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}$$

其中 c 和 β 是正的常数.

(a) 对小的 ε，证明通常的正则微扰

$$p(x,t)\approx p_0(kx-\omega t)+\varepsilon p_1(x,t)+\cdots$$

将出现久期项;

(b) 采用多尺度法求微扰展开的前二项.

6.13 考虑非线性波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left[1+\varepsilon f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad x\in(0,\infty),\qquad t>0$$

其中 $u(0,t)=g(t)$和 $u(x,0)=u_t(x,0)=0$，f 和 g 是光滑函数且

$$f(0)=g(0)=g'(0)=0$$

(a) 对小的 ε，证明通常的正则微扰

$$u(x,t)\approx u_0(t-x)+\varepsilon u_1(x,t)+\cdots$$

将出现久期项;

(b) 采用多尺度法求微扰展开的前二项.

6.14 考虑常微分方程的奇异微扰问题

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+b(x)y=0,\qquad x\in(0,1)$$

$$y(0)=\alpha;\qquad y(1)=\beta$$

(a) 假定 $a(x)>0$ 且边界层在 $x=0$ 处，求近似解；

(b) 假定 $a(x)<0$ 且边界层在 $x=1$ 处，求近似解.

6.15 利用边界层方法求下列问题的近似解

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,\qquad x>0,\qquad y>0$$

$$u(x,0)=x\mathrm{e}^{-x};\qquad u(0,y)=y\mathrm{e}^{-y}$$

$$u(x,y)\to 0,\qquad x\to\infty,\qquad y\to\infty.$$

6.16 考虑边值问题

$$\varepsilon a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}+u=0,\qquad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y)=x,\qquad x^2+y^2=1$$

其中 a 是常数. 试决定边界层的位置. 当 $a=-1$ 或 $a=1$ 时，分别求远离点 $(x,y)=(0,-1)$或$(x,y)=(0,1)$的近似解.

6.17 考虑弹簧的老化后，振动方程和初始条件为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\kappa^2(\varepsilon t)y=0,\qquad t>0;\qquad y(0)=a;\qquad y'(0)=b$$

作变换 $\tau=\varepsilon t$，然后用 WKB 求微扰解并且比较用多尺度方法得到的解.

6.18 考虑高频声波的激发和传播

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\mu^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial t}+\beta(x)u,\qquad x\in(0,\infty),\qquad t>0$$

$$u(0,t)=\cos\omega t$$

作高频展开

$$u(x,t)\approx\exp\{\mathrm{i}[\omega t-\omega^\gamma\theta(x)]\}\cdot\left[u_0(x)+\frac{1}{\omega^\gamma}u_1(x)+\cdots\right]$$

证明(a) $\gamma=1$；

(b) $\theta(x)$ 和 $u_0(x)$满足方程

$$(\theta_x)^2=\mu^2(x)$$

$$\theta_{xx}u_0+2\theta_x\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\alpha u_0;$$

(c) 满足边界条件的解为

$$u(x,t)\approx\sqrt{\frac{\mu(0)}{\mu(x)}}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\alpha(s)}{\mu(s)}\mathrm{d}s\right]\cos\left[\omega t-\omega\int_0^x\mu(s)\mathrm{d}s\right].$$

6.19 考虑薄长膜的振动

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mu^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$x\in(0,\infty),y\in(0,1),\qquad t>0$$

$$u(x,0,t)=u(x,1,t)=0;\qquad u(0,y,t)=f(y)\cos\omega t;$$

$$u(x,y,t) < \infty \qquad (x \to \infty)$$

其中 $\mu(x)>0, \alpha(x)>0, \mu'(x)<0$.

(1) 利用 WKB 近似求边界层区域以外的长时近似解；

(2) 假定转折点 $x_t>0$，求边界层区域的一级近似解；

(3) 匹配边界层区域内外的解.

第七章　数学物理方程的逆问题

近二十多年来，在系统控制和识别、地球物理勘探、医学以及量子力学等自然科学和工程技术领域中，提出了各种不同形式的逆问题和求解逆问题的方法．但是，逆问题作为一个新的研究方向，在各个学科领域中尚处于起步阶段．由于逆问题的不适定性和非线性，其求解比相应的正问题困难得多．本章介绍数学物理方程逆问题的基本概念和常用方法：7.1 节介绍逆问题基本概念和分类，以及第一类积分方程的正则化方法；7.2 节介绍脉冲谱技术求解数学物理方程的逆问题；7.3 节介绍本征值逆问题；最后，在 7.4 节中介绍波动方程的逆散射问题和二维近场成像理论．关于一维 Schrödinger 方程的逆散射问题，将在第八章详细介绍．

7.1　逆问题基本概念和分类

本节介绍数学物理方程逆问题的基本概念和分类．对于偏微分方程控制的系统，逆问题大致可分为五大类：(1) 系数逆问题，如反演热扩散方程的扩散系数；(2) 逆源问题，如声学系统中噪声源和化学污染中污染源的反演；(3) 初始条件逆问题，要求从系统现在的状态反演过去的状态；(4) 边界条件逆问题；(5) 边界形状逆问题．由于大部分数学物理方程逆问题最终归结为求解第一类积分方程，因此 7.1.3 小节和 7.1.4 小节介绍求解第一类积分方程的正则化方法．

7.1.1　逆问题基本概念

在前面各章中，涉及的是数学物理方程的正问题：在一定的初始条件和边界条件下，求解数学物理方程，得到物理量(温度、压力和电势等)在空间的分布和随时间演化的规律，实现对某一物理量的预测．以波动方程为例

$$\rho(\boldsymbol{r})u_{tt} + \mathbf{L}u = F(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{r}\in G, \qquad 0<t<\infty \tag{7.1.1}$$

其中 $\mathbf{L}u = -\nabla\cdot(p\nabla u)+qu$；$p(\mathbf{r})>0, \rho(\boldsymbol{r})>0, q(\boldsymbol{r})\geqslant 0$．在区域边界 ∂G，给定边界条件

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = B(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{r}\in\partial G, \qquad 0<t<\infty \tag{7.1.2}$$

以及初始条件

$$u\big|_{t=0} = f(\boldsymbol{r}); \qquad u_t\big|_{t=0} = g(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\in G+\partial G \tag{7.1.3}$$

正问题：给定方程及边界条件中各项系数 $p(\boldsymbol{r})>0, \rho(\boldsymbol{r})>0, q(\boldsymbol{r})\geqslant 0, \alpha(\boldsymbol{r})$ 和 $\beta(\boldsymbol{r})$，以及函数 $F(\boldsymbol{r},t)$、$B(\boldsymbol{r},t)$、$f(\boldsymbol{r})$ 和 $g(\boldsymbol{r})$，求场函数 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的空间分布和随时间的变化.

显然，上述正问题可解的必要条件是：(1) 算子 $\mathbf{L}$ 确定，即方程(7.1.1)的各项系数是确定的；(2) 区域 G 与边界 ∂G 确定；(3) 边界条件确定，即方程(7.1.2)的形式和系数确定；(4) 初始条件式(7.1.3)确定，即对非定常问题，有确定的初始分布. 在第一章，我们已经详细讨论了三类典型方程定解问题的提法以及正问题的适定性.

但是，如果把正问题的上述四个必要条件的一个或几个作为未知函数(或因素)，而把正问题中待求的函数 $u(\boldsymbol{r},t)$[或部分 $u(\boldsymbol{r},t)$，例如在部分边界 ∂G_1 上，如图 7.1.1]，作为已知条件，就构成了某类逆问题(逆问题的分类见 7.1.2 小节讨论). 因此，在逆问题中，正问题的部分求解目标成了逆问题的已知条件(通过实验测量得到)，而正问题中必须已知的条件却成了逆问题的求解目标.

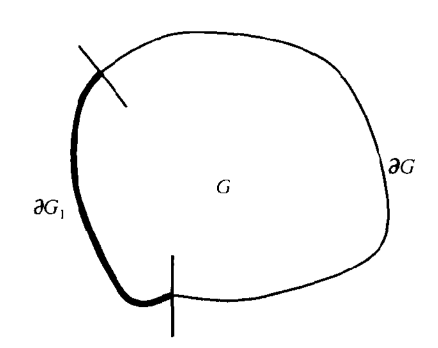


图 7.1.1　已知部分边界 ∂G_1 上 $u(\boldsymbol{r},t)$

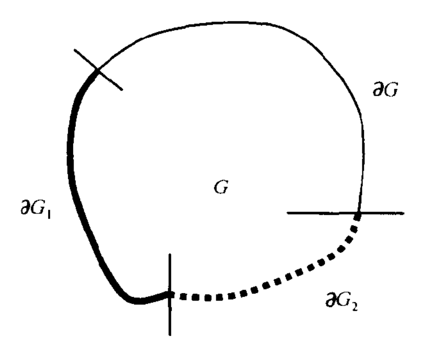


图 7.1.2　部分边界 ∂G_1 和 ∂G_2

下面举几个逆问题例子.

例 7.1.1　非均匀介质的热扩散问题，热扩散方程为

$$u_t+\nabla\cdot[D(\boldsymbol{r})\nabla u]=F(\boldsymbol{r},t),\qquad \boldsymbol{r}\in G,\qquad 0<t<\infty \tag{7.1.4}$$

其中 $D(\boldsymbol{r})$ 为热扩散系数的空间分布. 正问题：给定 $D(\boldsymbol{r})$、$u(\boldsymbol{r},t)$ 的初始分布和边界条件，求温度场的空间和时间分布 $u(\boldsymbol{r},t)$. 逆问题：已知部分边界 ∂G_1 的温度和另一部分边界 ∂G_2 热流，如图 7.1.2

$$u\big|_{\partial G_1}=u_0(\boldsymbol{r}_1,t);\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_2}=\varphi(\boldsymbol{r}_2,t)$$
$$\boldsymbol{r}_1\in\partial G_1,\qquad \boldsymbol{r}_2\in\partial G_2,\qquad 0<t<\infty \tag{7.1.5}$$

求 G 中的热扩散系数 $D(\boldsymbol{r})$.

例 7.1.2　Randon 变换和逆变换是医学中 X-CT(computertomograhy)成像的

数学基础. 二维函数 $f(x,y)$的 Randon 变换定义为沿直线 L 的线积分，如图 7.1.3

$$(Rf)(l,\theta) = \int_L f(x,y)\mathrm{d}L \tag{7.1.6}$$

其中 l 为原点到直线的距离，θ 为 x 轴与 l 的夹角. 正问题：已知函数 $f(x,y)$，求该函数的 Randon 变换. 逆问题：已知函数 $f(x,y)$的 Randon 变换，求函数 $f(x,y)$本身. 转动图 7.1.3 中的坐标$(x,y)\rightarrow(l,s)$,坐标变换为

$$x = l\cos\theta + s\sin\theta; \qquad y = l\sin\theta - s\cos\theta$$

于是式(7.1.6)变成

$$(Rf)(l,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\theta + s\sin\theta, l\sin\theta - s\cos\theta)\mathrm{d}s \tag{7.1.7}$$

变化 l 将给出一系列平行直线上的线积分，而变化角度 θ 给出不同方向直线的线积分. 对式(7.1.6)的变量 l 作一维 Fourier 变换

$$F_l[(Rf)(l,\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\theta + s\sin\theta, l\sin\theta - s\cos\theta)\exp(\mathrm{i}k_l l)\mathrm{d}s\mathrm{d}l. \tag{7.1.8}$$

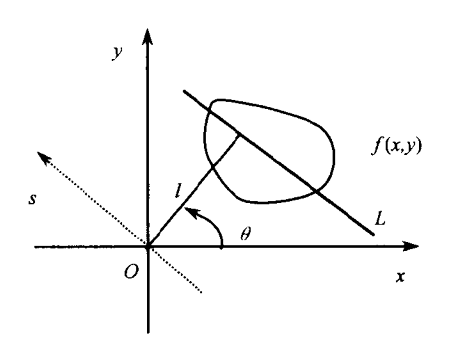


图 7.1.3　函数 $f(x,y)$的 Randon 变换

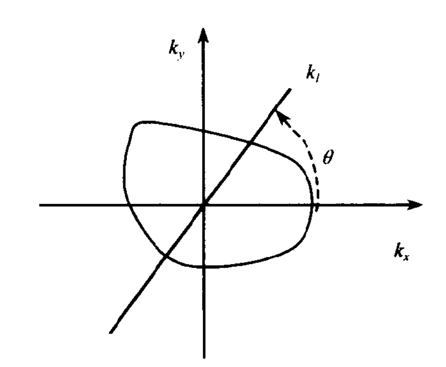


图 7.1.4　频率空间中直线 k_l

另一方面，分析函数 $f(x,y)$的二维 Fourier 变换 $\tilde{f}(k_x,k_y)$在直线 k_l 上的值，如图 7.1.4

$$\tilde{f}(k_l\cos\theta, k_l\sin\theta) = \iint_{xy} f(x,y)\exp[\mathrm{i}k_l(x\cos\theta + y\sin\theta)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

利用转动坐标系(l,s)，上式的二重积分为

$$\tilde{f}(k_l\cos\theta, k_l\sin\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\theta + s\sin\theta, l\sin\theta - s\cos\theta)\exp(\mathrm{i}k_l l)\mathrm{d}l\mathrm{d}s \tag{7.1.9}$$

比较式(7.1.8)与上式右边可知

$$F_l[(Rf)(l,\theta)] = \tilde{f}(k_l\cos\theta, k_l\sin\theta) \tag{7.1.10}$$

于是固定角度 θ，且对变量 l 作 Fourier 变换，即可得到 $\tilde{f}(k_x,k_y)$在直线 k_l 上的值. 因此，只要变化角度 θ，就可得到整个平面(k_x,k_y)上 $\tilde{f}(k_x,k_y)$的值. 通过逆 Fourier 变换即可反演函数 $f(x,y)$.

例 7.1.3 心脏电势逆问题，设心脏边界为∂G_1，人体边界为∂G_2，如图 7.1.5. 心电场的电势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in G \tag{7.1.11}$$

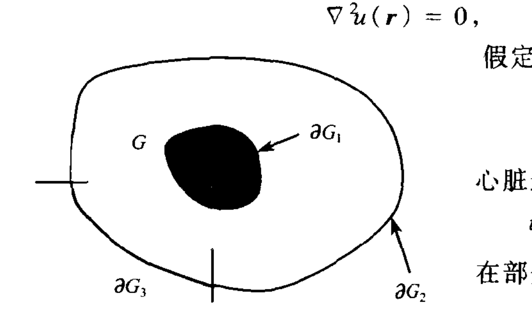


图 7.1.5 心脏电势的逆问题

假定人体表面为绝缘边界

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_2} = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in \partial G_2$$

心脏边界的势分布为

$$u|_{\partial G_1 \otimes} = u_0(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in \partial G_1$$

在部分人体∂G_3上，电势可测量

$$u|_{\partial G_3} = \varphi(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in \partial G_3$$

逆问题：已知 $\varphi(\boldsymbol{r})$，求心脏的电势 $u_0(\boldsymbol{r})$，即通过测量部分人体表面的心电势分布，来判断心脏的功能.

7.1.2 方程逆问题分类

尽管不同的物理问题可以提出不同的逆问题，但最后的数学形式基本相似. 数学物理方程的逆问题可归纳为五大类，下面分别讨论：

系数逆问题：也称为参数识别(parameter identification)问题，是最经典的一类逆问题，有比较成熟的分析方法. 系数逆问题可表述为：通过方程的解在区域或边界上的部分信息，确定原方程的一个或多个系数. 例 7.1.1 即是典型的系数逆问题. 方程的系数一般表征介质的某种性质，因此，求解系数逆问题通常是推求介质的特性. 例如，在地球物理勘探中，由地面上接收到的地震波大小来推断地层结构，控制方程为波动方程，而方程系数为弹性系数和密度分布. 目前，石油勘探中广泛采用这种方法. 假定问题可化简为一维振动，波动方程为

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left[E(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0, \qquad z > 0, \qquad t > 0 \tag{7.1.12}$$

边界条件和初始条件为

$$-E(0)\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = g(t), \qquad t > 0$$

$$u(z,t)|_{t=0} = u_t(z,t)|_{t=0} = 0, \qquad z \geqslant 0 \tag{7.1.13}$$

其中 z 为深度，$u(z,t)$为位移场，$\rho(z)$和 $E(z)$分别为地层密度和弹性模量的深度分布，$g(t)$为爆炸引起的外力．设在$(0,T)$时间内记录到地面振动的振幅为

$$u(z,t)\big|_{z=0} = u_0(t), \qquad 0 < t < T \tag{7.1.14}$$

逆问题：能否由 $u_0(t)$确定出函数 $\rho(z)$和 $E(z)$？显然要同时确定二个函数是困难的，为此作走时变换

$$x = \int_0^z \sqrt{\frac{\rho(z)}{E(z)}}\mathrm{d}z$$

于是，方程(7.1.12)和(7.1.13)变成

$$\begin{gathered}\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0, \qquad x > 0, \qquad t > 0 \\ -\sigma(0)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = g(t), \qquad t > 0 \\ u(x,t)\big|_{t=0} = u_t(x,t)\big|_{t=0} = 0, \qquad x \geqslant 0\end{gathered} \tag{7.1.15}$$

其中 $\sigma = \sqrt{\rho E}$ 为声阻抗分布．这一变换的优点是明显的，它使式(7.1.12)变成单参数的逆问题．

逆源问题：已知方程中除源(或汇)项以外的各个系数，通过方程的解在区域或边界上的部分信息，确定源(或汇)的强度分布．

在环境噪声控制工程中，假定已测得某一曲面上的声压，希望反演噪声源的空间分布．考虑如图 7.1.6 的封闭区域 G，其边界为∂G，测量点位于曲线或曲面 Γ 上，非齐次声波方程为

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t) - u_{tt}(\boldsymbol{r},t) = q(\boldsymbol{r},t) \tag{7.1.16}$$

边界条件

$$\left(au + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = b(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{r} \in \partial G \tag{7.1.17}$$

测量附加条件

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_\Gamma = \varphi(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{r} \in \Gamma, \qquad t > 0 \tag{7.1.18}$$

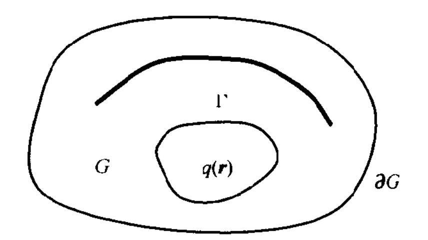


图 7.1.6　封闭空间噪声源的反演

对上述方程作 Fourier 变换

$$\begin{gathered}\nabla^2 U(\boldsymbol{r},\omega) + \omega^2 U(\boldsymbol{r},\omega) = Q(\boldsymbol{r},\omega) \\ \left(aU + \beta\frac{\partial U}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial G} = B(\boldsymbol{r},\omega)\end{gathered} \tag{7.1.19}$$

及

$$U(\boldsymbol{r},\omega)\big|_\Gamma = \Phi(\boldsymbol{r},\omega) \tag{7.1.20}$$

利用 Green 函数，由式(3.3.11)可得

$$U(\boldsymbol{r},\omega)=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\,Q(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}\tau'+U_B(\boldsymbol{r},\omega) \tag{7.1.21}$$

其中边界贡献

$$U_B(\boldsymbol{r},\omega)=\begin{cases}-\iint_{\partial G}\dfrac{B^*(\boldsymbol{r}',\omega)}{\alpha}\cdot\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)}{\partial n'}\mathrm{d}S', & \alpha\neq 0\\ \iint_{\partial G}\dfrac{B^*(\boldsymbol{r}',\omega)}{\beta}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}S', & \beta\neq 0\end{cases}$$

利用测量条件式(7.1.20)

$$[U-U_B]|_\Gamma=\int_G G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\Big|_{\boldsymbol{r}\in\Gamma}Q(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}\tau' \tag{7.1.22}$$

显然，对给定的频率 ω，上式为第一类积分方程，它的解不稳定，具体解法将在下面讨论.

考虑开空间情况并且假定：(1) 源分布在有限区域；(2) 二维问题；(3) 测量曲线是半径为 R 的足够大圆. 由式(3.3.61)

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

其中

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\approx|\boldsymbol{r}|\left(1-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}|^2}\right)$$

利用 Hankel 函数的渐近表达式

$$H_0^{(1)}(k\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi k\,|\boldsymbol{r}|}}\exp\left\{\mathrm{i}\left[k\,|\boldsymbol{r}|\left(1-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}|}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\right\}$$

因为 $\boldsymbol{r}$ 在测量圆上变化，故 $|\boldsymbol{r}|=R$，式(7.1.22)简化为

$$[U-U_B]_\Gamma=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{8\pi kR}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\pi/4)}\iint_G\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{k\boldsymbol{r}}{R}\right)\cdot\boldsymbol{r}'\right]Q(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}\tau' \tag{7.1.23}$$

进一步假定源分布的时间与空间部分可分离

$$Q(\boldsymbol{r}',\omega)=\overline{Q}(\boldsymbol{r}')\Omega(\omega)$$

并令 $\overline{\boldsymbol{K}}=k\boldsymbol{r}/R$，以及

$$\overline{U}(\overline{\boldsymbol{K}})=[U-U_B]_\Gamma\frac{\sqrt{8\pi kR}}{\mathrm{i}\Omega(\omega)}\exp\left[-\mathrm{i}\left(kR-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

式(7.1.23)变成

$$\overline{U}(\overline{\boldsymbol{K}})=\iint_G\exp(-\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{r}')\overline{Q}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{7.1.24}$$

因此，$\overline{Q}(\boldsymbol{r})$ 即为 $\overline{U}(\overline{\boldsymbol{K}})$ 的逆 Fourier 变换

$$\overline{Q}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\iint_K \overline{Q}(\overline{\boldsymbol{K}})\exp(\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{K}} \tag{7.1.25}$$

其中积分在频谱空间进行.

初始条件逆问题:已知方程的每个系数,对确定的区域和边界,根据边界条件和 $t=T>0$ 时刻变量的空间分布,推求 $t=0$ 时刻变量的空间分布,即为初始条件逆问题. 在第一章中,我们已知道波动方程对时间反演具有不变性,可从 $t=T>0$ 的波动状态反推 $t=0$ 的波动状态. 但对热传导方程逆时间问题是不稳定的.

考虑 2.3.2 小节中非均匀介质的热传导问题

$$\rho(\boldsymbol{r})u_t + \mathbf{L}u = 0, \qquad \boldsymbol{r}\in G, \qquad 0 < t < T \tag{7.1.26}$$

逆问题:已知 $t=T$ 时刻的温度分布

$$u(\boldsymbol{r},t)\mid_{t=T} = f(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\in G \tag{7.1.27}$$

求 $t=0$ 时刻温度场 $u(\boldsymbol{r},0)$. 由式(2.3.34),混合问题的一般解为

$$u(\boldsymbol{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n t) \tag{7.1.28}$$

利用式(7.1.27)

$$u(\boldsymbol{r},T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n T) = f(\boldsymbol{r})$$

故

$$a_n = \frac{[\varphi_n(\boldsymbol{r}),f(\boldsymbol{r})]}{\|\varphi_n\|^2}\exp(\lambda_n T)$$

于是混合问题的形式解为

$$u(\boldsymbol{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\varphi_n(\boldsymbol{r}),f(\boldsymbol{r})]}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n(\boldsymbol{r})\exp[\lambda_n(T-t)] \tag{7.1.29}$$

因此 $t=0$ 时刻的温度场为

$$u(\boldsymbol{r},0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\varphi_n(\boldsymbol{r}),f(\boldsymbol{r})]}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n(\boldsymbol{r})\exp(\lambda_n T) \tag{7.1.30}$$

由 2.2 节讨论,如果 $\mathbf{L}$ 是正算子,$\lambda_n>0$,又 $\lambda_n\to\infty$(当 $n\to\infty$). 故对一般的初始分布 $f(\boldsymbol{r})$,级数式(7.1.30)存在收敛性问题. 必须寻求其他形式的解.

设初始温度分布为 $u(\boldsymbol{r},0)=g(\boldsymbol{r})$,则 $t=T$ 时刻的温度场为

$$u(\boldsymbol{r},T) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\varphi_n(\boldsymbol{r}),g(\boldsymbol{r})]}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n(\boldsymbol{r})\exp(-\lambda_n T) \tag{7.1.31}$$

注意:上式有较好的收敛性. 逆问题变为:寻找 $g(\boldsymbol{r})$使泛函

$$J(g) = \int_G\left|u(\boldsymbol{r},T) - f(\boldsymbol{r})\right|^2\mathrm{d}\tau \tag{7.1.32}$$

取极小 $\min[J(g)]$. 因此，逆问题变为一个最优控制问题.

边界条件逆问题：已知方程的每个系数，对确定的区域或边界，根据函数在区域或边界上的部分(或全部)信息，确定边界条件的类型或参数，即为边界条件逆问题. 边界条件的类型或参数取决于边界的性质，从而取决于边界的材料. 因而，选择边界材料的问题实质上是边界条件逆问题. 在现实生活中这样的例子很多. 一个建筑声学的例子是，已知厅堂的混响时间，决定墙面铺设的吸声材料具有的吸声性能.

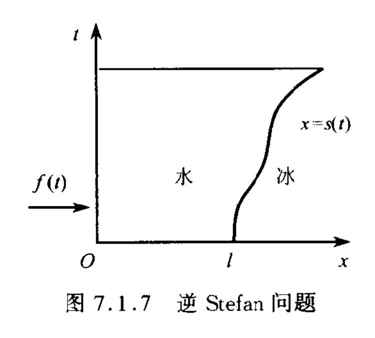


图 7.1.7　逆 Stefan 问题

一个典型的问题是所谓逆 Stefan 问题. 考虑冰的融化，如图 7.1.7，当 $t<0$，水与冰的平衡分界点为 $x=l$，当 $t>0$，在 $x=0$ 处施加热源 $f(t)$，由于冰融化，水-冰界面与时间有关，为 $s(t)$. 水中温度场 $u(x,t)$满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<s(t),\quad t>0 \tag{7.1.33}$$

边界和初始条件

$$\begin{aligned} -k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}&=f(t),\qquad t>0\\ u(x,t)\big|_{t=0}&=u_0(x),\qquad 0<x<l \end{aligned} \tag{7.1.34}$$

其中 D 和 k 为水的热扩散和热传导系数. 此外，水－冰界面的速率方程为

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=-\alpha\frac{\partial u[s(t),t]}{\partial x},\qquad t>0 \tag{7.1.35}$$

其中 α 为已知常数. 正问题：已知 $f(t)$和 $u_0(x)$，求 $s(t)$；逆问题：已知水－冰界面 $s(t)$，求边界热流 $f(t)$.

边界形状逆问题：已知方程的每个系数，对确定的边界∂G_1和未确定的边界∂G_2，根据函数在区域或边界上的部分(或全部)信息，确定未知边界∂G_2 的形状，即为边界形状逆问题. 这类逆问题常称为最优形状设计问题，是当前逆问题研究中最为活跃的领域之一. 在数学物理方程的五类逆问题中，边界形状逆问题是通过区域边界的几何形状的变化来影响系统的特性，它不可避免要涉及动边界问题，因而最为复杂.

考虑声波的逆散射问题. 设声波受不可穿透物体 G 的散射，如图 7.1.8，Helmholtz 方程和边界条件为

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \qquad r \in \overline{G}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0 \text{ 或 } u\,|_{\partial G} = 0 \tag{7.1.36}$$

其中 u 为声压，k 为声波波数，$\overline{G}$ 表示 G 的外部. 式(7.1.36)中边界条件第一式对应于不可穿透物体 G 是刚性物质，而第二式对应于软性物质.

总的声场为入射声场 u_i 和散射声场 u_s 之和

$$u(\boldsymbol{r},k) = u_i(\boldsymbol{r},k) + u_s(\boldsymbol{r},k)$$

散射声场满足辐射条件

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - \mathrm{i}ku_s\right) = 0 \tag{7.1.37}$$

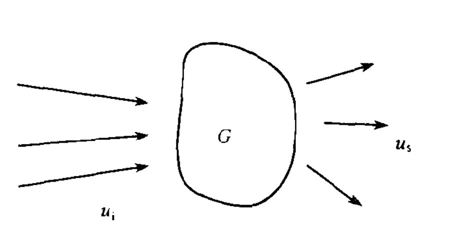


图 7.1.8　声波的散射

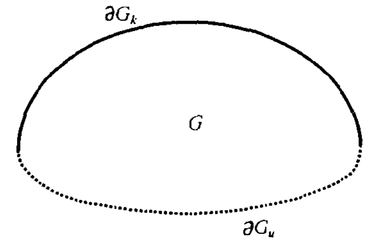


图 7.1.9　部分边界的反演

散射场的无限远特征为(详细见 7.4 节)

$$u_s(\boldsymbol{r},k) = \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}\left[u_\infty(\boldsymbol{e}) + O(r^{-1})\right] \tag{7.1.38}$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 为单位方向矢量，具体定义见 7.4 节. 正问题：已知区域 G 的形状和入射场，求散射场的分布；逆问题：假定对某入射场，已测得远场不同方向的分布 $u_\infty(\boldsymbol{e})$，决定区域 G 的边界形状 ∂G. 我们将在 7.4 节详细讨论声波的逆散射问题.

在导电材料的电磁无损检测中，经常遇到 Laplace 方程或椭圆型方程的边界逆问题. 以二维问题为例：电势在闭区域 G 内满足椭圆型方程

$$\nabla\cdot[\sigma\nabla u] = 0, \qquad (x,y)\in G \tag{7.1.39}$$

其中 $\sigma = \sigma(x,y)$ 是电导分布，$u = u(x,y)$ 是电势. 闭区域 G 的边界可分成 ∂G_k 和 ∂G_u，如图 7.1.9. 边界 ∂G_k 已知(如材料表面)，且电势 $u(x,y)$ 和法向导数可测量

$$u\,|_{\partial G_k} = \varphi(x,y), \qquad (x,y)\in\partial G_k$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_k} = \psi(x,y), \qquad (x,y)\in\partial G_k$$

未知边界 ∂G_u 表示导电介质与非导电介质的分界线，法向导数为零

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_u} = 0$$

逆问题：已知边界∂G_k 和∂G_k 上电势 $u(x,y)$和法向导数，反演未知边界∂G_u 和电导分布$\sigma=\sigma(x,y)$. 如果区域内电导为常数，逆问题仅需反演未知边界∂G_u.

显然，上述问题与 1.4.4 小节中 Laplace 方程的 Cauchy 问题类似，是不适定的. 由于 Laplace 方程的逆边界问题比较复杂，以后不作进一步的介绍.

7.1.3 不适定问题的正则化方法

正则化方法是把不适定问题转化为条件适定问题的有效方法. 考虑方程

$$\mathbf{K}\varphi = g \tag{7.1.40}$$

一般 $\mathbf{K}$ 是积分算子，上式的解不稳定. 设右边存在测量误差 δ

$$\| g - g^{\delta} \| \leqslant \delta$$

因此，代替式(7.1.40)，必须解扰动方程

$$\mathbf{K}\varphi^{\delta} = g^{\delta} \tag{7.1.41}$$

严格讲，上式的解不存在，因为积分算子 $\mathbf{K}$ 的作用是平滑化，经过 $\mathbf{K}$ 作用后的函数比较光滑，而式(7.1.41)右边存在测量误差 δ，不可能光滑.

因此只能寻找式(7.1.41)的广义解，也就是构成某一个近似算子 $\mathbf{R}$ 代替逆算子 $\mathbf{K}^{-1}$. 设近似算子 $\mathbf{R}$ 是一个依赖于参数 α 的线性、有界算子序列 $\mathbf{R}_\alpha(\alpha>0)$，且满足

$$\lim_{\alpha\to 0}\mathbf{R}_\alpha\mathbf{K}\varphi = \varphi \tag{7.1.42}$$

即算子序列 $\mathbf{R}_\alpha\mathbf{K}$ 收敛到恒等算子，称 $\mathbf{R}_\alpha$ 为**正则化算子**，α 为**正则化参数**. $\mathbf{K}\varphi=g$ 的近似解定义为

$$\varphi^{\alpha,\delta} \equiv \mathbf{R}_\alpha g^{\delta} \tag{7.1.43}$$

称上式为式(7.1.40)的**正则化解**. 近似解的误差为

$$\begin{aligned}\| \varphi^{\alpha,\delta} - \varphi \| &= \| (\mathbf{R}_\alpha g^{\delta} - \mathbf{R}_\alpha g) + (\mathbf{R}_\alpha g - \varphi) \| \\ &\leqslant \| \mathbf{R}_\alpha g^{\delta} - \mathbf{R}_\alpha g \| + \| \mathbf{R}_\alpha g - \varphi \| \\ &\leqslant \| \mathbf{R}_\alpha \| \cdot \| g^{\delta} - g \| + \| \mathbf{R}_\alpha\mathbf{K}\varphi - \varphi \|\end{aligned}$$

即

$$\| \varphi^{\alpha,\delta} - \varphi \| \leqslant \delta \| \mathbf{R}_\alpha \| + \| \mathbf{R}_\alpha\mathbf{K}\varphi - \varphi \| \tag{7.1.44}$$

因此，精确解与近似解的误差由二部分组成：第一项表示测量数据误差而引起的解的误差，一般有

$$\lim_{\alpha\to 0}\delta \| \mathbf{R}_\alpha \| \to \infty$$

第二项表示 $\mathbf{R}_\alpha$ 代替逆算子 $\mathbf{K}^{-1}$引起的误差，一般有关系

$$\lim_{\alpha\to 0} \| \mathbf{R}_\alpha\mathbf{K}\varphi - \varphi \| \to 0$$

如图 7.1.10 所示．一方面，稳定性要求 α 足够大，另一方面，近似精度要求 α 足够小．因此存在正则化参数 α 的最佳选择 α^*，使解的误差 $\|\varphi^{\alpha,\delta}-\varphi\|$ 最小．一般正则化参数 α 是测量数据误差 δ 的函数 $\alpha=\alpha(\delta)$．α 的选择原则是，解的误差不可能小于测量数据的误差，即

$$\|\mathbf{KR}_\alpha\varphi^\delta-\varphi^\delta\| = \gamma\delta \tag{7.1.45}$$

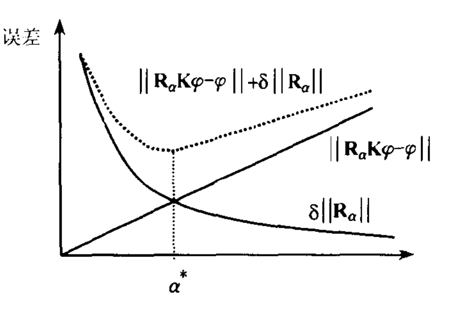


图 7.1.10　误差随正则化参数 α 的变化

其中 $\gamma\geqslant 1$．上式称为**残差原理**．

下面介绍正则算子 $\mathbf{R}_\alpha$ 的构成．在 Hilbert 空间中，正则算子 $\mathbf{R}_\alpha$ 可通过 $\mathbf{K}$ 的奇异值分解系统构成．如果 $\mathbf{K}$ 是 Hilbert 空间中的 Hermite 算子，即满足

$$(\mathbf{K}\varphi,\psi) = (\varphi,\mathbf{K}\psi)$$

根据式(5.3.6)对形如 $\varphi=\mathbf{K}f, f\in L^2[a,b]$ 的函数，可将 φ 展成 $\{\varphi_n\}$ 的 Fourier 级数

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n,\varphi)\varphi_n;\quad \mathbf{K}\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\varphi_n,\varphi)\varphi_n \tag{7.1.46}$$

对 Hilbert 空间中的任意算子，定义算子 $\mathbf{K}$ 的奇异值为 Hermite 算子 $(\mathbf{K}^+\mathbf{K})$ 的本征值的平方根，且有

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\mu_3\geqslant\cdots$$

算子理论告诉我们，存在正交归一序列 $\{\varphi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$ 满足

$$\mathbf{K}\varphi_n = \mu_n\psi_n;\qquad \mathbf{K}^+\psi_n = \mu_n\varphi_n \tag{7.1.47}$$

根据 5.3.5 小节讨论，对 Hilbert 空间中形如 $\varphi=\mathbf{K}f, f\in L^2[a,b]$ 的函数 φ 可作奇异值分解

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n,\varphi)\varphi_n;\qquad \mathbf{K}\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\varphi_n,\varphi)\psi_n = g \tag{7.1.48}$$

显然，上式是式(7.1.46)的推广，如果 $\mathbf{K}$ 是 Hermite 算子，二者一致．$\{\mu_n,\varphi_n,\psi_n\}$ 称为算子 $\mathbf{K}$ 的**奇异系统**．(7.1.48)第二式两边用 ψ_m 取内积并利用 ψ_m 的正交归一性质得到

$$\mu_n(\varphi_n,\varphi) = (\psi_n,g)$$

于是，算子方程 $\mathbf{K}\varphi=g$ 的解可用 $\mathbf{K}$ 的奇异系统表示为

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}(\psi_n,g)\varphi_n \tag{7.1.49}$$

由(7.1.47)第二式

$$\mu_n(\varphi_n,\varphi) = (\varphi,\mathbf{K}^+\psi_n)^* = (\mathbf{K}\varphi,\psi_n)^* = (g,\psi_n)^* = (\psi_n,g)$$

因此式(7.1.49)成立的条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}|(\psi_n,g)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(\varphi_n,\varphi)|^2=\|\varphi\|^2<\infty$$

如果方程 $\mathbf{K}\varphi=g$ 右边含误差 $g^\delta=g+\delta g$ 由式(7.1.49)，解的误差为

$$\varphi^\delta=\varphi+\frac{\delta\varphi_n}{\mu_n}$$

显然，误差比

$$\frac{\|\varphi^\delta-\varphi\|}{\|g^\delta-g\|}=\frac{1}{\mu_n}$$

由于奇异值趋向零而发散．因此奇异值趋向零的速度控制方程 $\mathbf{K}\varphi=g$ 的病态性质．如果奇异值趋向零速度较慢，我们说 $\mathbf{K}\varphi=g$ 中度病态；反之，如果奇异值很快趋向零，则说 $\mathbf{K}\varphi=g$ 重度病态．

式(7.1.49)表明，$\mathbf{K}\varphi=g$ 的病态性来源于 $\mu_n\to0(n\to\infty)$，这一特性提示我们能否通过改变式(7.1.49)中 μ_n 的结构得到 $\mathbf{K}\varphi=g$ 的正则化解？为此，把正则化算子表示成

$$\mathbf{R}_\alpha g=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}q(\alpha,\mu_n)(\psi_n,g)\varphi_n \tag{7.1.50}$$

显然要求 $q(\alpha,\mu_n)$满足

$$\lim_{\alpha\to0}q(\alpha,\mu_n)=1 \tag{7.1.51}$$

另外，函数 $q(\alpha,\mu_n)$的选择还要求满足正则化条件式(7.1.42)．下面我们介绍一种常用的正则化方法，即 **Tikhonov 正则化方法**．

对超定的有限维线性系统 $\mathbf{K}\varphi=g$，通常的解法是求泛函 $J(\varphi)=\|\mathbf{K}\varphi-g\|$ 的极小．但对无限维系统，求 $\|\mathbf{K}\varphi-g\|$ 的极小化问题仍然是病态的．因此只能进一步对极小函数 $\|\mathbf{K}\varphi-g\|$ 放宽要求为

$$J_\alpha(\varphi)=\|\mathbf{K}\varphi-g\|+\alpha\|\varphi\|^2 \tag{7.1.52}$$

然后求新泛函 $J_\alpha(\varphi)$的极小．新泛函 $J_\alpha(\varphi)$称为 **Tikhonov 泛函**，而第二项称为**稳定泛函**．我们求使 Tikhonov 泛函取极小所满足的方程，因为

$$\begin{aligned}J_\alpha(\varphi)=\|\mathbf{K}\varphi-g\|+\alpha\|\varphi\|^2&=\|\mathbf{K}\varphi_\alpha-g\|+\alpha\|\varphi_\alpha\|^2\\&+2\mathrm{Re}[(\varphi-\varphi_\alpha),\alpha\varphi_\alpha+\mathbf{K}^+(\mathbf{K}\varphi_\alpha-g)]\\&+\|\mathbf{K}(\varphi-\varphi_\alpha)\|+\alpha\|\varphi-\varphi_\alpha\|^2\end{aligned}$$

当 φ_α 满足

$$\alpha\varphi_\alpha+\mathbf{K}^+(\mathbf{K}\varphi_\alpha-g)=0$$

即

$$\alpha\varphi_\alpha+\mathbf{K}^+\mathbf{K}\varphi_\alpha=\mathbf{K}^+g \tag{7.1.53}$$

时,$J_\alpha(\varphi)$取极小. 显然，如果 $\mathbf{K}\varphi=g$ 是第一类积分方程，上式即为稳定的第二类积分方程.

把式(7.1.53)的解写作 $\varphi_\alpha=\mathbf{R}_\alpha g$，其中 $\mathbf{R}_\alpha$ 定义为逆算子

$$\mathbf{R}_\alpha = (\alpha\mathbf{I}+\mathbf{K}^+\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^+ \tag{7.1.54}$$

用算子 K 的奇异系统$\{\mu_n,\varphi_n,\psi_n\}$表示，令式(7.1.53)的解为

$$\varphi_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha)\varphi_n \tag{7.1.55}$$

代入式(7.1.53)并利用式(7.1.47)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha)(\alpha+\mu_n^2)\varphi_n = \mathbf{K}^+ g$$

于是

$$c_n(\alpha) = \frac{(\varphi_n,\mathbf{K}^+ g)}{\alpha+\mu_n^2} = \frac{(\mathbf{K}\varphi_n,g)}{\alpha+\mu_n^2} = \frac{\mu_n(\psi_n,g)}{\alpha+\mu_n^2}$$

立即可得 $\mathbf{K}\varphi=g$ 的正则化解

$$\varphi_\alpha = \mathbf{R}_\alpha g = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{\alpha+\mu_n^2}(\psi_n,g)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}q(\alpha,\mu_n)(\psi_n,g)\varphi_n \tag{7.1.56}$$

其中

$$q(\alpha,\mu_n) = \frac{\mu_n^2}{\alpha+\mu_n^2} \tag{7.1.57}$$

因此，Tikhonov 正则化相当于取式(7.1.50)中的函数 $q(\alpha,\mu_n)$为式(7.1.57). 对 Tikhonov 正则化算子，存在惟一的 $\alpha=\alpha(\delta)$使残差公式(7.1.45)成为

$$\|\mathbf{K}\mathbf{R}_\alpha\varphi^\delta-\varphi^\delta\| = \delta.$$

7.1.4 第一类 Fredholm 积分方程的正则化方法

考虑有限区间$[a,b]$上的第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = g(x) \tag{7.1.58}$$

取稳定泛函为

$$\Omega(\varphi) = \int_a^b\left[q_0(y)\varphi^2(y)+q_1(y)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]\mathrm{d}y \tag{7.1.59}$$

其中 $q_0(y)\geqslant 0$ 和 $q_1(y)>0$ 为选定的已知函数. Tikhonov 泛函可选择为

$$\begin{aligned} J(\varphi,g) &= \|\mathbf{K}\varphi-g\|^2+\alpha\Omega(\varphi) \\ &= \int_a^b\left[\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y-g(x)\right]^2\mathrm{d}x+\alpha\Omega(\varphi) \end{aligned} \tag{7.1.60}$$

式(7.1.58)的 Tikhonov 正则化解即为求以上泛函的极小,即

$$\delta J(\varphi, g) = 0 \tag{7.1.61}$$

设 $\varphi(x)=\varphi_\alpha(x)$ 时 $J(\varphi,g)$ 取极小,令 $\varphi(x)=\varphi_\alpha(x)+\lambda\eta(x)$, 则

$$J(\varphi,g) = J(\varphi_\alpha,g) + 2\lambda Q(\varphi_\alpha,\eta) + \lambda^2 J_\alpha(\eta,g) \equiv J(\lambda)$$

其中

$$\begin{aligned}
Q(\varphi_\alpha,\eta) &= \int_a^b \left\{ \left[\int_a^b k(x,y)\varphi_\alpha(y)\mathrm{d}y - g(x) \right] \cdot \int_a^b k(x,y)\eta(y)\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x \\
&\quad + \alpha \int_a^b [q_0(y)\varphi_\alpha(y)\eta(y) + q_1(y)\varphi'_\alpha \eta'(y)]\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \left\{ \int_a^b \overline{K}(y,t)\varphi_\alpha(t)\mathrm{d}t - b(y) \right. \\
&\quad \left. - \alpha\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(q_1(y)\frac{\mathrm{d}\varphi_\alpha(y)}{\mathrm{d}y} \right) - q_0(y)\varphi_\alpha(y) \right] \right\} \eta(y)\mathrm{d}y \\
&\quad + \alpha q_1(y)\varphi_\alpha(y)\eta(y) \Big|_a^b
\end{aligned}$$

其中

$$\overline{K}(y,t) = \int_a^b k(\xi,y)k(\xi,t)\mathrm{d}\xi; \qquad b(y) = \int_a^b k(\xi,y)g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

因当 $\varphi(x)=\varphi_\alpha(x)$ 时,$J(\varphi,g)$ 取极小, 故$J'(\lambda)|_{\lambda=0}=0$,于是

$$Q(\varphi_\alpha,\eta) = 0 \tag{7.1.62}$$

由 $\eta(x)$ 的任意性,应有

$$\int_a^b \overline{K}(y,t)\varphi_\alpha(t)\mathrm{d}t - \alpha\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[q_1(y)\frac{\mathrm{d}\varphi_\alpha(y)}{\mathrm{d}y} \right] - q_0(y)\varphi_\alpha(y) \right\} = b(y) \tag{7.1.63}$$

且

$$q_1(y)\varphi'_\alpha(y)\Big|_a^b = 0 \tag{7.1.64}$$

下面根据待求函数 $\varphi(x)$ 在端点 $x=a$ 和 b 的性质分别进行讨论.

(1) 已知 $\varphi(a)=\varphi_a$ 和 $\varphi(b)=\varphi_b$,即端点固定. 这时式(7.1.64)自动满足,式(7.1.58)的 Tikhonov 正则化解满足带边界条件的积分-微分方程

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \overline{K}(y,t)\varphi_\alpha(t)\mathrm{d}t - \alpha\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[q_1(y)\frac{\mathrm{d}\varphi_\alpha(y)}{\mathrm{d}y} \right] - q_0(y)\varphi_\alpha(y) \right\} \\
&\quad = b(y); \qquad \varphi_\alpha(a) = \varphi_a; \qquad \varphi_\alpha(b) = \varphi_b
\end{aligned} \tag{7.1.65}$$

(2) 不知道端点的任何信息, 则式(7.1.64)为自然边界条件. 它等价于

$$\varphi'_\alpha(a) = \varphi'_\alpha(b) = 0 \tag{7.1.66}$$

而积分-微分方程不变,仍然为式(7.1.65).

(3) 如果给定的边界条件既不是自然边界条件也不是固定边界,例如要求满

足 $\varphi'_\alpha(a)=h$(常数),则应首先作适当的变换，如 $\tilde{\varphi}_\alpha(x)=\varphi_\alpha(x)-hx$，然后求 $\tilde{\varphi}_\alpha(x)$的正则化解.

从式(7.1.59)可看出，稳定泛函存在的基本条件是 $\varphi(x)$的导数平方可积. 如果要求 $\varphi(x)$有更高的光滑性,如 p 阶导数平方可积，那么稳定泛函应取

$$\Omega(\varphi)=\int_a^b\sum_{r=0}^p q_r\left[\frac{\mathrm{d}^r\varphi(y)}{\mathrm{d}y^r}\right]^2\mathrm{d}y \tag{7.1.67}$$

其中 $q_r(y)\geqslant 0$, $(r=1,2,\cdots,p-1)$, $q_p(y)>0$. 相应的正则方程为

$$\int_a^b\overline{K}(y,t)\varphi_\alpha(t)\mathrm{d}t+\alpha\sum_{r=1}^p(-1)^r\frac{d^r}{dy^r}\left[q_r(y)\frac{d^r\varphi_\alpha(y)}{dy^r}\right]=b(y) \tag{7.1.68}$$

边界条件可取为

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(a)&=\varphi'_\alpha(a)=\cdots=\varphi_\alpha^{(p-1)}(a)\\ \varphi_\alpha(b)&=\varphi'_\alpha(b)=\cdots=\varphi_\alpha^{(p-1)}(b)\end{aligned} \tag{7.1.69}$$

7.2　脉冲谱技术(PST)

脉冲谱(pulse spectrum technique,PST)是一种求解逆问题的重要方法，其优点在于三个方面:首先，PST 方法不受维数的限制，无论是一维、二维问题还是三维问题都可用 PST 方法；其次，PST 方法不受方程类型的限制，无论是椭圆型、双曲型还是抛物型方程，涉及的逆问题都可用 PST 方法；最后，PST 方法不受问题类型的限制，对 7.1.2 小节所述的五类逆问题都可以用 PST 方法. 本节介绍 PST 方法的基本原理以及在方程逆问题中的应用.

7.2.1　PST 的基本原理

设算子 $\mathbf{L}$ 的初－边值问题为

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}[a(\boldsymbol{r}),t]u(\boldsymbol{r},t)=f(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in G,\quad t>0\\ &\mathbf{B}[u(\boldsymbol{r},t)]=b(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in\partial G,\quad t>0\\ &\mathbf{E}[u(\boldsymbol{r},t)]=q(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in G+\partial G\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

其中 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 分别是边界和初始算子，$a(\boldsymbol{r})$是算子 $\mathbf{L}$ 的待求系数. 假定部分边界 ∂G_1上的测量值为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_1}=\varphi(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in\partial G_1,\quad t>0 \tag{7.2.2}$$

逆问题：从测量值 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$求算子 $\mathbf{L}$ 的系数 $a(\boldsymbol{r})$.

PST 方法的基本过程如下：

首先，对式(7.2.1)中方程和边界条件，以及测量附加条件式(7.2.2)关于时间变量 t 作 Laplace 变换(或 Fourier 变换)，即

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{L}}[a(\boldsymbol{r}),s]U(\boldsymbol{r},s)=F(\boldsymbol{r},s),\quad \boldsymbol{r}\in G\\&\widetilde{\mathbf{B}}[U(\boldsymbol{r},s)]=B(\boldsymbol{r},s),\quad \boldsymbol{r}\in\partial G\\&\left.\frac{\partial U(\boldsymbol{r},s)}{\partial n}\right|_{\partial G_1}=\Phi(\boldsymbol{r},s),\quad \boldsymbol{r}\in\partial G_1\end{aligned}\tag{7.2.3}$$

其中 $\widetilde{\mathbf{L}}$、$\widetilde{\mathbf{B}}$、U、F、B 和 Φ 分别是 $\mathbf{L}$、$\mathbf{B}$、u、f、b 和 φ 的 Laplace 变换(或 Fourier 变换)映象.

其次，构成 Newton 型迭代

$$\left.\begin{aligned}a_{n+1}(\boldsymbol{r})&=a_n(\boldsymbol{r})+\delta a_n(\boldsymbol{r})\\U_{n+1}(\boldsymbol{r},s)&=U_n(\boldsymbol{r},s)+\delta U_n(\boldsymbol{r},s)\end{aligned}\right.(n=0,1,2,\cdots)\tag{7.2.4}$$

其中 $a_0(\boldsymbol{r})$是初始猜测值，假定每次增量很小，即

$$\|\delta a_n(\boldsymbol{r})\|\ll\|a_n(\boldsymbol{r})\|;\qquad\|\delta U_n(\boldsymbol{r},s)\|\ll\|U_n(\boldsymbol{r},s)\|$$

将式(7.2.4)代入式(7.2.3)，并略去二阶以上的增量，以增量的阶数分类得到

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{L}}[a_n(\boldsymbol{r}),s]U_n(\boldsymbol{r},s)=F(\boldsymbol{r},s),\quad \boldsymbol{r}\in G\\&\widetilde{\mathbf{B}}[U_n(\boldsymbol{r},s)]=B(\boldsymbol{r},s),\quad \boldsymbol{r}\in\partial G\end{aligned}\tag{7.2.5}$$

以及

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{L}}[a_n(\boldsymbol{r}),s]\,\delta U_n(\boldsymbol{r},s)=Z[\boldsymbol{r},s,\delta a_n(\boldsymbol{r}),U_n(\boldsymbol{r},s),\cdots],\quad \boldsymbol{r}\in G\\&\widetilde{\mathbf{B}}[\delta U_n(\boldsymbol{r},s)]=0,\quad \boldsymbol{r}\in\partial G\end{aligned}\tag{7.2.6}$$

其中 Z 是运算过程中定义的已知函数，且线性依赖于 δa_n. 设式(7.2.5)的 Green 函数为 $G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)$，则式(7.2.6)等价于积分方程

$$\delta U_n(\boldsymbol{r},s)=\int_G G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)Z[\boldsymbol{r}',s,\delta a_n(\boldsymbol{r}'),U_n(\boldsymbol{r}',s),\cdots]\,\mathrm{d}\tau'\tag{7.2.7}$$

关于变量 $\boldsymbol{r}$ 求边界法向导数得到

$$\left.\frac{\partial\delta U_n(\boldsymbol{r},s)}{\partial n}\right|_{r\in\partial G_1}=\int_G\left.\frac{\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)}{\partial n}\right|_{r\in G_1}\cdot Z[\boldsymbol{r}',s,\delta a_n(\boldsymbol{r}'),U_n(\boldsymbol{r}',s),\cdots]\mathrm{d}\tau'$$

取近似

$$\delta U_n(\boldsymbol{r},s)\approx U(\boldsymbol{r},s)-U_n(\boldsymbol{r},s)$$

并利用附加条件得

$$\left[\Phi(\boldsymbol{r},s)-\frac{\partial U_n(\boldsymbol{r},s)}{\partial n}\right]_{r\in\partial G_1}=\int_G\left.\frac{\partial G_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',s)}{\partial n}\right|_{r\in G_1}$$

$$\cdot Z[\boldsymbol{r}', s, \delta a_n(\boldsymbol{r}'), U_n(\boldsymbol{r}', s), \cdots]\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{7.2.8}$$

对给定的 $s, U_n(\boldsymbol{r}, s)$从正问题式(7.2.5)求得，而 Green 函数的法向导数可通过数值方法得到，于是上式是关于 $\delta a_n(\boldsymbol{r})$的第一类 Fredholm 积分方程，它是不适定的，必须用正则化方法求之.

因此 PST 方法的迭代过程如下：

(1) 给定初始猜测值 $a_0(\boldsymbol{r})$，一般取均匀分布为初值；

(2) 对选定的一组 s，求正问题式(7.2.5)，得到 $U_0(\boldsymbol{r}, s)$；

(3) 求 Green 函数

$$\widetilde{\mathbf{L}}[a_0(\boldsymbol{r}), s]G_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', s) = \delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}[G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', s)] = 0$$

数值计算 $G_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', s)$的法向导数；

(4) 用正则化方法解积分方程(7.2.8)，得到 $\delta a_0(\boldsymbol{r})$，从而令

$$a_1(\boldsymbol{r}) = a_0(\boldsymbol{r}) + \delta a_0(\boldsymbol{r})$$

重复迭代过程，直到达到满意的精度.

利用 PST 求解方程逆问题主要由二部分组成：(1) 正问题求解；(2) 第一类积分方程求解. 而积分方程的核含有 Green 函数，对一般的变系数微分算子和边界条件，Green 函数只能通过数值方法求得. N 维问题对应的 Green 函数是 $2N$ 维的，而且 Green 函数含有奇性，因此，Green 函数的计算工作量巨大.

如何避免计算 Green 函数计算是 PST 方法的一大问题. 研究发现，在一些特定条件下，Green 函数的计算可以避免，这样的 PST 方法称为**广义 PST 方法**. 下面以具体例子来说明.

7.2.2　光热测量中热导系数的反演

考虑光热测量中热导系数深度分布的逆问题. 如图 7.2.1，实验过程为，激光束垂直入射到样品表面提供热产生源，从而在样品内部产生温度场分布. 假定样品表面全吸收，于是温度场 $T(z, t)$满足热扩散方程和边界条件

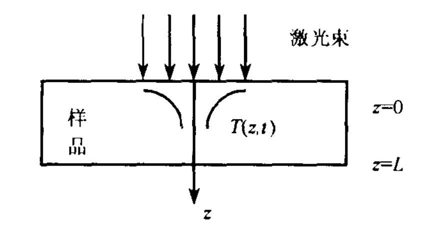


图 7.2.1　光热测量样品表面的温度

$$\begin{aligned} &\rho c \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\right] = 0, \qquad z \in (0, L) \\ &-k(0)\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = g(t); \qquad k(L)\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=L} = 0 \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

其中 ρ 和 c 分别是材料的密度和比热，可假定与深度无关，$k(z)$是材料的热导系

数深度分布，依赖于深度 z，L 是样品的厚度. 式(7.2.9)中 $g(t)$是样品吸收光能而产生的表面热流，第二式是由于空气的热导系数与样品相比可忽略不计，因而下表面热流为零. 实验中可测量的量为表面的瞬态温度

$$T(z,t)\big|_{z=0} = T_0(t) \tag{7.2.10}$$

逆问题：通过实验测量数据 $T_0(t)$，求热导系数深度分布 $k(z)$.

PST 方法的过程如下. 首先，对式(7.2.9)和(7.2.10)作 Fourier 变换

$$\begin{gathered} \mathrm{i}\omega\rho\, cT(z,\omega) - \frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial}{\partial z}T(z,\omega)\right] = 0, \qquad z\in(0,L) \\ -k(0)\frac{\mathrm{d}T(z,\omega)}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=0} = g(\omega); \qquad k(L)\frac{\mathrm{d}T(z,\omega)}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=L} = 0 \\ T(z,\omega)\big|_{z=0} = T_0(\omega) \end{gathered} \tag{7.2.11}$$

注意：这里用 Fourier 变换，而不用 Laplace 变换，因为 $T_0(\omega)$可直接测量，而无须测量瞬态信号 $T_0(t)$，后者的测量反而比较困难.

第二步：建立迭代过程，令

$$\begin{gathered} T^{k+1}(z,\omega) = T^k(z,\omega) + \delta T^k(z,\omega) \\ k^{k+1}(z) = k^k(z) + \delta k^k(z) \end{gathered} \tag{7.2.12}$$

代入式(7.1.11)，并忽略 $\delta T^k(z,\omega)$和 $\delta k^k(z)$的高阶项，得

$$\begin{gathered} \mathrm{i}\omega\rho c T^k(z,\omega) - \frac{\partial}{\partial z}\left[k^k(z)\frac{\partial}{\partial z}T^k(z,\omega)\right] = 0, \qquad z\in(0,L) \\ -k^k(0)\frac{\partial T^k(z,\omega)}{\partial z}\bigg|_{z=0} = g(\omega); \qquad k^k(L)\frac{\partial T^k(z,\omega)}{\partial z}\bigg|_{z=L} = 0 \end{gathered} \tag{7.2.13}$$

以及

$$\begin{gathered} \mathrm{i}\omega\rho c\,\delta T^k(z,\omega) - \frac{\partial}{\partial z}\left[k^k(z)\frac{\partial}{\partial z}\delta T^k(z,\omega)\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\delta k^k(z)\frac{\partial}{\partial z}T^k(z,\omega)\right] \\ -k^k(0)\frac{\partial\delta T^k(z,\omega)}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \delta k^k(0)\frac{\partial T^k(z,\omega)}{\partial z}\bigg|_{z=0} \\ k^k(L)\frac{\partial\delta T^k(z,\omega)}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=L} = \delta k^k(L)\frac{\partial T^k(z,\omega)}{\partial z}\bigg|_{z=L} \end{gathered} \tag{7.2.14}$$

为了避免使用 Green 函数，利用过程:式(7.2.13)和(7.2.14)第一式两边分别乘 δT^k 和 T^k，二式相减并对变量 z 积分得到

$$\int_0^L\left[\delta T^k\frac{\partial}{\partial z}\left(k^k\frac{\partial T^k}{\partial z}\right) - T^k\frac{\partial}{\partial z}\left(k^k\frac{\partial\delta T^k}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}z = \int_0^L T^k\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta k^k\frac{\partial T^k}{\partial z}\right)\mathrm{d}z$$

对上式分部积分，并且利用式(7.2.13)和(7.2.14)中的边界条件得到

$$\int_0^L\delta k^k(z)\left[\frac{\partial T^k(z,\omega)}{\partial z}\right]^2\mathrm{d}z = -\delta T^k(0,\omega)g(\omega) \tag{7.2.15}$$

引进近似

$$\delta T^{k}(0,\omega) = T^{k+1}(0,\omega) - T^{k}(0,\omega) \approx T_0(\omega) - T^{k}(0,\omega)$$

于是得到关于 $\delta k^{k}(z)$的积分方程

$$\int_0^L \delta k^{k}(z)\left[\frac{\partial T^{k}(z,\omega)}{\partial z}\right]^2 \mathrm{d}z = g(\omega)\left[T^{k}(0,\omega) - T_0(\omega)\right] \quad (7.2.16)$$

第三步：正则化方法解第一类积分方程，用完备的正交归一函数集$\{h_i(z), i=1,2,\cdots\}$展开 $\delta k^{k}(z)$，并作截断($j\leqslant N$)近似

$$\delta k^{k}(z) = \sum_{j=1}^{N} x_j h_j(z) \quad (7.2.17)$$

假定实验中测量的频率点为$\{\omega_i, i=1,2,\cdots,M\}$，式(7.1.16)离散成

$$\sum_{j=1}^{N} w_{ij}x_j = q_i \qquad (i = 1,2,\cdots,M) \quad (7.2.18)$$

其中

$$q_i = q(\omega_i)\left[T^{k}(0,\omega_i) - T_0(\omega_i)\right]$$

$$w_{ij} = \int_0^L \left[\frac{\partial T^{k}(z,\omega_i)}{\partial z}\right]^2 h_j(z)\mathrm{d}z \quad (7.2.19)$$

$$(i = 1,2,\cdots,M; j = 1,2,\cdots,N)$$

式(7.2.18)写成矢量形式

$$\mathbf{W}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} \quad (7.2.20)$$

其中 $\mathbf{W}=\{w_{ij}\}$是 $M\times N$ 矩阵，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)^{\mathrm{T}}$和 $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_M)^{\mathrm{T}}$(上标 T 表示转置)分别是 N 与M 个分量的列矢量．因此，热扩散方程的逆问题转化为求解 $M\times N$ 阶代数方程．注意到 M 是实验中测量频率点数目，N 是正交归一函数集的截断数，一般取 $M\gg N$．因此线性代数方程(7.2.20)是超定的．另一方面，数值计算表明，矩阵 $\mathbf{W}$ 的奇异值迅速趋向零，因此式(7.2.20)是严重病态的．事实上，式(7.2.20)是第一类积分方程(7.2.16)离散化而来，而第一类积分方程是不适定的．

根据 7.1.4 小节，用 Tikhonov 正则化方法求式(7.2.20)的正则化解，由式(7.1.56)

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{\alpha + \mu_n^2}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}_n^*)\boldsymbol{u}_n \quad (7.2.21)$$

其中$\{\mu_n, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_n\}$是 $\mathbf{W}$ 的奇异系统

$$\mathbf{W}\boldsymbol{u}_n = \mu_n\boldsymbol{v}_n; \qquad \mathbf{W}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_n = \mu_n\boldsymbol{u}_n \quad (7.2.22)$$

为了寻找最佳的正则化参数 α，定义误差函数

$$E(\alpha) = \frac{\| T^{k}(0,\omega,\alpha) - T_0(\omega) \|}{\| T_0(\omega) \|} \quad (7.2.23)$$

其中模的定义为

$$\|\cdot(\omega)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}|\cdot(\omega_i)|^2}$$

函数集 $h_j(z)$ 取简单的形式

$$h_j(z) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{N}{L}}, & 对 \quad (j-1)\dfrac{L}{N} < z < j\dfrac{L}{N}, (j = 1,2,\cdots,N) \\ 0, & 对其他\ z \end{cases} \tag{7.2.24}$$

计算机数值实验过程如下：

(1) 给定热导系数的分布 $k(z)$，利用数值方法(如差分法)求各个频率点样品表面的温度 $T_0(\omega_i)$ 作为测量数据. 真实测量数据的误差通过加白噪声到 $T_0(\omega_i)$ 来模拟.

(2) 选择初始分布 $k^0(z)$，一般取为常数. 由式(7.2.13)，利用数值方法(如差分法)求各个频率点的温度分布 $T^0(z,\omega_i)$，然后由式(7.2.19)可求出 w_{ij} 和 q_i.

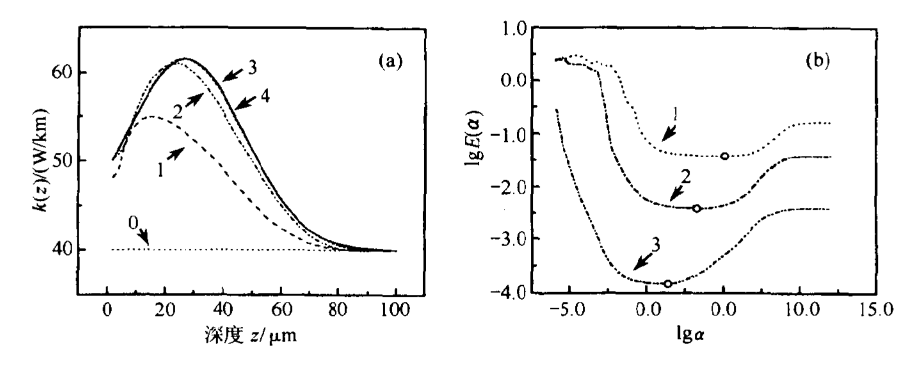


图 7.2.2 (a)三次迭代中热导系数的分布(b)误差函数 $E(\alpha)$ 随正则代参数 α 的变化

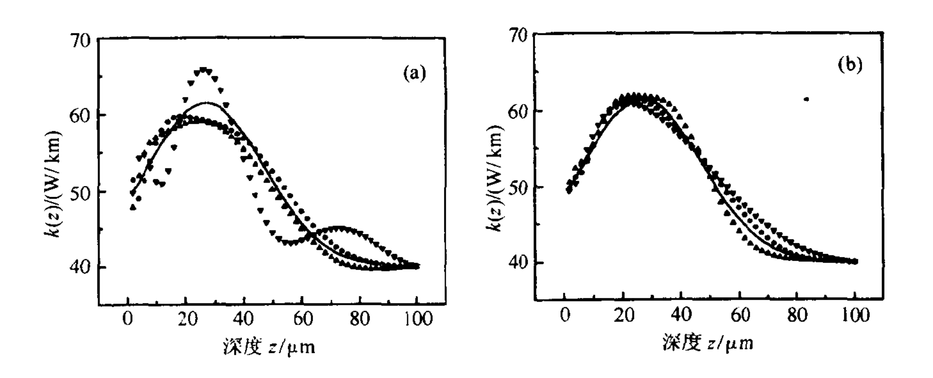


图 7.2.3 不同噪声强度热导系数分布反演的数值例子

(a)利用温度场的振幅；(b)利用温度场的相位

(3) 结合式(7.2.21)和(7.2.23)，尝试正则化参数，求出最佳正则化参数，于是求得 $\delta k^0(z)$，完成第一次迭代，得到

$$k^1(z) = k^0(z) + \delta k^0(z).$$

(4) 重复(2)和(3)得到

$$k^{k+1}(z) = k^k(z) + \delta k^k(z)$$

精度判据为

$$I_k = \int_0^L [k^k(z) - k^{k+1}(z)]^2 \mathrm{d}z$$

当 $I_k < \epsilon$，迭代结束. 图 7.2.2 (a) 给出三次迭代过程热导系数的分布，初始猜测为常数 $k^0(z)=40$. 实线为 $k(z)$模型. 图 7.2.2(b)为误差函数 $E(\alpha)$随参数 α 的变化，从图可见：存在 α^* 使$E(\alpha)$极小，而且对每一次迭代,α^*不同.

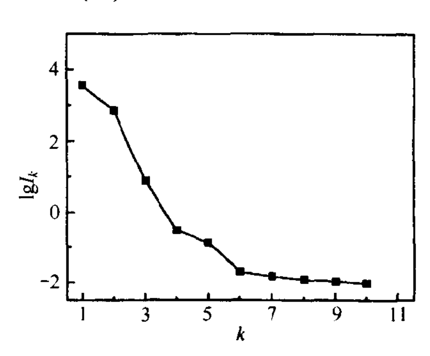


图 7.2.4　精度与迭代次数的关系

图 7.2.3 给出测量信号含不同强度噪声后反演结果的数值计算例子. 实线为热导系数分布 $k(z)$模型. (a)是用振幅信号反演的结果，白噪声强度分别是原信号强度的 2%(•)、5%(▲)和 10% (▼)；(b)是用相位信号反演的结果，白噪声与原信号相位差分别为 0.2°(•)、0.5°(▲)、和 1.0°(▼). 图 7.2.4 为精度判据随迭代次数的变化，可见收敛速度较快，一般通过 10 次迭代即可满足要求.

7.2.3　应用于二维波动方程的逆问题

在非均匀的流体介质中，二维声波方程为

$$\nabla \cdot (k \nabla u) = \rho u_{tt} + f, \qquad (x,y) \in G, \qquad t > 0 \tag{7.2.25}$$

其中 $k = k(x, y)$为流体压缩系数，$u = u(x,y,t)$为压力场,$f = f(x,y,t)$为外力，G 为下半平面,Ω 为图 7.2.5 所示的二维不均匀区域，初始和边界条件为

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \quad (x,y) \in G$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{7.2.26}$$

图 7.2.5　二维波动方程反演

第二式对应于表面法向应力自由. 测量附加条件为表面速度

$$u_t\big|_{y=0} = \varphi(x,t), \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{7.2.27}$$

假定密度分布 $\rho(x,y)$已知. 逆问题: 从测量数据 $\varphi(x,t)$, 反演系数 $k(x,y)$.

根据 PST 原理, 首先对方程(7.2.25)~(7.2.27)作 Laplace 变换

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot(k\nabla U)-\rho s^2 U=F \\
\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{y=0}=0;\qquad sU|_{y=0}=\Phi(x,s)
\end{gathered}
\tag{7.2.28}
$$

其中 $U=U(x,y,s)$和 $F=F(x,y,s)$分别为 $u(x,y,t)$与 $f(x,y,t)$的象函数, $s>0$. 其次, 作迭代

$$
\begin{gathered}
U_{n+1}(x,y,s)=U_n(x,y,s)+\delta U_n(x,y,s) \\
k_{n+1}(x,y)=k_n(x,y)+\delta k_n(x,y)
\end{gathered}
\tag{7.2.29}
$$

代入式(7.2.28)得

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot(k_n\nabla U_n)-\rho s^2 U_n=F,\qquad (x,y)\in G \\
\left.\frac{\partial U_n}{\partial n}\right|_{y=0}=0,\qquad x\in(-\infty,\infty)
\end{gathered}
\tag{7.2.30}
$$

以及

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot(k_n\nabla\delta U_n)-\rho s^2\delta U_n=-\nabla\cdot(\delta k_n\nabla U_n),\qquad (x,y)\in G \\
\left.\frac{\partial\delta U_n}{\partial n}\right|_{y=0}=0,\qquad x\in(-\infty,\infty)
\end{gathered}
\tag{7.2.31}
$$

定义 Green 函数 $G=G(x,y,x',y',s)$

$$
\begin{gathered}
-\nabla\cdot(k_n\nabla G)+\rho s^2 G=\delta(x,y,x',y'),\qquad (x,y,x',y')\in G \\
\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{y=0}=0,\qquad x\in(-\infty,\infty)
\end{gathered}
\tag{7.2.32}
$$

于是,式(7.2.31)化为积分方程

$$
\delta U_n(x,y,s)=\iint_G G\nabla\cdot(\delta k_n\nabla U_n)\mathrm{d}\sigma'
\tag{7.2.33}
$$

其中 $\mathrm{d}\sigma'$为二维面元, 即

$$
\begin{aligned}
\delta U_n(x,y,s)&=\iint_G\nabla\cdot(\delta k_n G\nabla U_n)\mathrm{d}\sigma'-\iint_G\delta k_n(\nabla G\cdot\nabla U_n)\mathrm{d}\sigma' \\
&=\int_{\partial G}\delta k_n G\frac{\partial U_n}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-\iint_G\delta k_n(\nabla G\cdot\nabla U_n)\mathrm{d}\sigma'
\end{aligned}
\tag{7.2.34}
$$

其中第一项已利用平面 Green 公式化成了边界上的积分. 由边界条件, 第一项为零, 于是

$$
\delta U_n(x,y,s)=-\iint_G\delta k_n(\nabla G\cdot\nabla U_n)\mathrm{d}\sigma'
$$

由(7.2.28)第三式测量条件

$$
\iint_G\delta k_n(\nabla G\cdot\nabla U_n)\mathrm{d}\sigma'\approx U_n-\frac{\Phi}{s}
\tag{7.2.35}
$$

由于在 Ω 外 $\delta k_n=0$，上式简化成

$$\iint_{\Omega}\delta k_n(\nabla G\cdot\nabla U_n)\mathrm{d}\sigma'\approx U_n-\frac{\Phi}{s}$$

利用 7.1 节的正则化方法，可求得上式的解，完成一次迭代过程.

因式(7.2.35)涉及 Green 函数的梯度计算，这是非常困难的. 另一个计算方法是用有限元法直接求解式(7.2.30)和(7.2.31). 根据变分原理，式(7.2.30)和(7.2.31)等价的变分问题为

$$J(U_n)=-\frac{1}{2}\iint_G[k_n(\nabla U_n)^2+s^2\rho U_n^2]\,\mathrm{d}\sigma-\iint_G U_nF\mathrm{d}\sigma \tag{7.2.36}$$

$$\begin{aligned}I(\delta U_n)=&-\frac{1}{2}\iint_G[k_n(\nabla\delta U_n)^2+s^2\rho\delta U_n^2]\,\mathrm{d}\sigma\\&-\iint_G\delta k_n(\nabla\delta U_n)\cdot(\nabla U_n)U_nF\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{7.2.37}$$

对区域 G 进行三角形划分，可以得到关于 δk_n 的超定线性方程组，然后用正则化方法求解，这样不仅避免了 Green 函数的梯度计算，而且避免了求解正问题式(7.2.30).

7.2.4 应用于环境污染控制的逆源问题

设河道长为 L，上游端点污染浓度为常数 n_0，在河段 L_1 区间内存在与时间无关的污染源，其强度为 $f(x)$，如图 7.2.6.下游远处污染浓度趋向均匀. 逆问题:假定在河段 L_2 内污染浓度要求控制在 n^* 以下，求污染源的强度分布. 假定河道及排污情况可用一维近似，污染物浓度 $n(x,t)$满足一维对流-扩散方程

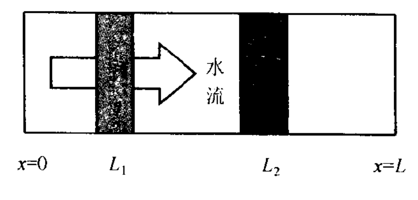


图 7.2.6 一维逆源问题

$$\frac{\partial n}{\partial t}+u\frac{\partial n}{\partial x}=k\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+f(x),\qquad x\in(0,L),\qquad t>0 \tag{7.2.38}$$

初始和边界条件为

$$\begin{aligned}&n(x,0)=0,\qquad x\in(0,L)\\&n(0,t)=n_0;\qquad \left.\frac{\partial n}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\qquad t>0\end{aligned} \tag{7.2.39}$$

其中 u 为水流速度，k 为污染物扩散系数. 式(7.2.38)第二项表示对流作用，即由于水流作用而使 x 点的污染浓度变小. 在 L_2 区域，污染浓度限制在可允许值以下

$$n(x,t)|_{x\in L_2}\leqslant n^*(L_2,t) \tag{7.2.40}$$

对式(7.2.38)和(7.2.39)作 Laplace 变换

$$
\begin{aligned}
&sN + u\frac{\partial N}{\partial x} = k\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{1}{s}f(x), \qquad s > 0 \\
&N(0,s) = \frac{n_0}{s}; \qquad \left.\frac{\partial N(x,s)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \qquad s > 0
\end{aligned} \tag{7.2.41}
$$

可允许条件变成

$$
N(x,s)\big|_{x\in L_2} \leqslant N^*(L_2,s), \qquad s > 0 \tag{7.2.42}
$$

逆问题变成：确定 $f(x)$，使由 $f(x)$ 通过边值问题式(7.2.41)决定的浓度分布 $N(x,s)$ 满足式(7.2.42)．把 $f(x)$ 看作决定变量，$N(x,s)$ 看作参变量，这一逆问题实际上是一个优化问题，即求泛函的条件极小

$$
\min J(f) = \int_{x\in L_2} |N(x,s) - N^*(L_2,s)|^2 \mathrm{d}x \tag{7.2.43}
$$

约束条件为：$N(x,s)$ 满足边值问题式(7.2.41)．因此，关键问题是求 J 关于 f 的一阶变分．下面用 PST 方法求之．

作迭代

$$
\begin{aligned}
N_{k+1}(x,s) &= N_k(x,s) + \delta N_k(x,s) \\
f_{k+1}(x) &= f_k(x) + \delta f_k(x)
\end{aligned} \tag{7.2.44}
$$

代入式(7.2.41)

$$
\begin{aligned}
&sN_k + u\frac{\partial N_k}{\partial x} = k\frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} + \frac{1}{s}f_k(x), \qquad s > 0 \\
&N_k(0,s) = \frac{n_0}{s}; \qquad \left.\frac{\partial N_k(x,s)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \qquad s > 0
\end{aligned} \tag{7.2.45}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&s\delta N_k + u\frac{\partial \delta N_k}{\partial x} = k\frac{\partial^2 \delta N_k}{\partial x^2} + \frac{1}{s}\delta f_k(x), \qquad s > 0 \\
&\delta N_k(0,s) = 0; \qquad \left.\frac{\partial \delta N_k(x,s)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \qquad s > 0
\end{aligned} \tag{7.2.46}
$$

显然，式(7.2.45)是普通的边值问题，而上式的意义在于建立了 δN_k 和 $\delta f_k(x)$ 之间的关系．利用 Green 函数

$$
\begin{aligned}
&sG(x,x',s) + u\frac{\partial G(x,x',s)}{\partial x} - k\frac{\partial^2 G(x,x',s)}{\partial x^2} = \delta(x,x') \\
&G(0,x',s) = 0; \qquad \left.\frac{\partial G(x,x',s)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0
\end{aligned} \tag{7.2.47}
$$

可以得

$$
\delta N_k(x,s) = \int_0^L \frac{1}{s}G(x,x',s)\delta f_k(x')\mathrm{d}x'
$$

因为污染源仅仅存在于 L_1 区间，所以上式为

$$\delta N_k(x,s)=\int_{x'\in L_1}\frac{1}{s}G(x,x',s)\delta f_k(x')\mathrm{d}x' \tag{7.2.48}$$

另一方面，由式(7.2.43)可以得到 k 次迭代过程中 $J(f)$ 的一阶变分

$$\delta J_k(f)=2\int_{x\in L_2}[N_k(x,s)-N^*(L_2,s)]\,\delta N_k(x,s)\mathrm{d}x$$

由式(7.2.48)得到

$$\delta J_k(f)=\frac{2}{s}\int_{x'\in L_1}\int_{x\in L_2}[N_k(x,s)-N^*(L_2,s)]G(x,x',s)\delta f_k(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'$$

因此有

$$\frac{\delta J_k(f)}{\delta f_k}=\frac{2}{s}\int_{x\in L_2}[N_k(x,s)-N^*(L_2,s)]G(x,x',s)\mathrm{d}x \tag{7.2.49}$$

我们可以把泛函 $J(f)$ 取极小的必要条件近似为

$$\left\|\frac{\delta J_k(f)}{\delta f_k}\right\|=\frac{4}{s^2}\int_{x'\in L_1}\left|\int_{x\in L_2}[N_k(x,s)-N^*(L_2,s)]G(x,x',s)\mathrm{d}x\right|^2\mathrm{d}x'<\varepsilon \tag{7.2.50}$$

其中 ε 是预先设定的小正数．在迭代过程中，如果上式满足，即完成迭代．反之，可用求泛函极值的方法继续迭代．需要注意的是，这里的泛函 $J(f)$ 与 f 关系比较复杂，4.4 节中介绍的共轭梯度法要作较复杂的修正，这里不作进一步展开介绍．

7.3　本征值逆问题

本征值逆问题有重要的应用，最简单的例子是如何从测量的共振频率决定弦的不均匀密度分布．另一个例子是从人的发声，反演声道的形状．本节主要讨论简单的 Sturm-Liouville 本征值逆问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)u(x)=\lambda u(x),\qquad x\in(0,l)$$

$$u'(0)-hu(0)=0;\qquad u'(l)+Hu(l)=0 \tag{7.3.1}$$

正问题：已知函数 $q(x)$，求本征值 λ_n 及相应的本征函数 $u_n(x)$，而逆问题为：已知本征值的分布 $\lambda_n(n=1,2,3,\cdots)$，求函数 $q(x)$．对一般形式的 Sturm-Liouville 方程可通过 6.4 节的 Liouville-Green 变换化为上述简单形式．

7.3.1　本征值的渐近特征

在 6.4 节中我们已讨论了本征值的渐近特征，但在本征值逆问题中，必须知道更精确的渐近表达式来证明本征值逆问题的惟一性．为了简单，以下讨论限于第一类边值问题，即假定 $h\to\infty$ 和 $H\to\infty$．

由常微分方程理论，对给定的函数 $q \in L^2(0,l)$ 和 $\lambda \in C$，下列二个初值问题的解存在且惟一

$$
\begin{gathered}
-\frac{\mathrm{d}^2 u_1(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u_1(x) = \lambda u_1(x), \qquad x \in (0,l) \\
u_1(0) = 1; \qquad u'_1(0) = 0
\end{gathered} \tag{7.3.2}
$$

以及

$$
\begin{gathered}
-\frac{\mathrm{d}^2 u_2(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u_2(x) = \lambda u_2(x), \qquad x \in (0,l) \\
u_2(0) = 0; \qquad u'_2(0) = 1
\end{gathered} \tag{7.3.3}
$$

函数 $\{u_1, u_2\}$ 称为常微分方程

$$
-\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x), \qquad x \in (0,l)
$$

的**基本系统**. 因为函数 $\{u_1, u_2\}$ 的 Wronskian 行列式具有性质

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u_1,u_2] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix} = u_1 u''_2 - u''_1 u_2 = u_1(q-\lambda)u_2 - u_2(q-\lambda)u_1 = 0
$$

且由初始条件得 $[u_1, u_2]_{x=0} = 1$，故 $[u_1, u_2] = 1$. 因此函数 u_1 和 u_2 线性独立. 于是，方程的通解可由基本系统构成

$$
u(x) = Au_1(x) + Bu_2(x) \tag{7.3.4}
$$

其中 A 和 B 是常数，由边界条件 $u(0) = u(l) = 0$，显然应该有 $A = 0$ 和 $u_2(l) = 0$. 由于函数 $\{u_1, u_2\}$ 依赖于 q 和 λ，可表示成 $u_1(x,\lambda,q)$ 和 $u_2(x,\lambda,q)$，因此 $u(l) = 0$，即

$$
f(\lambda) \equiv u_2(l,\lambda,q) = 0 \tag{7.3.5}
$$

是决定本征值 λ 的方程，$f(\lambda)$ 称为本征值问题式(7.3.1)的**特征函数**.

例 7.3.1 $q = 0$，式(7.3.1)的基本系统为

$$
u_1(x,\lambda,0) = \cos\sqrt{\lambda}x; \qquad u_2(x,\lambda,0) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \tag{7.3.6}
$$

不难用 WKB 近似证明，对任意的 $q \in L^2(0,l)$，当 $\lambda \to \infty$，式(7.3.1)的基本系统具有以上渐近特性.

下面证明初值问题式(7.3.2)和(7.3.3)与下列第二类 Volterra 积分等价

$$
u_1(x) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)u_1(t)\mathrm{d}t \tag{7.3.7}
$$

$$
u_2(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)u_2(t)\mathrm{d}t \tag{7.3.8}
$$

其中 $x \in [0,l]$.

方程(7.3.7)证明如下. 为了方便，令函数

$$C(x) \equiv \cos\sqrt{\lambda}x\,; \qquad S(x) \equiv \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$$

利用积分关系

$$\int_a^b [f''(t)g(t) - f(t)g''(t)]\,\mathrm{d}t = [f'(t)g(t) - f(t)g'(t)]_a^b$$

如果 u_1 满足式(7.3.2)，则

$$\int_0^x S(x-t)q(t)u_1(t)\mathrm{d}t = \int_0^x S(x-t)[\lambda u_1(t) + u_1''(t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x u_1(t)[\lambda S(x-t) + S''(x-t)]\,\mathrm{d}t + [u_1'(t)S(x-t) + u_1(t)S(x-t)]\Big|_{t=0}^{t=x}$$

$$= u_1(x) - \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

即为式(7.3.7). 反过来，证明如果 u_1 满足式(7.3.7)，必满足式(7.3.2). 显然式(7.3.7)满足边界条件，对式(7.3.7)求一阶和二阶导数得到

$$u_1'(x) = -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}(x-t)q(t)u_1(t)\mathrm{d}t$$

$$u_1''(x) = -\lambda\cos\sqrt{\lambda}x + q(x)u_1(x) - \sqrt{\lambda}\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-t)q(t)u_1(t)\mathrm{d}t$$

$$= -\lambda u_1(x) + q(x)u_1(x)$$

即为式(7.3.2). 类似地，可证明式(7.3.8).

为了讨论本征值的渐近特征，式(7.3.8)改写成

$$u_2(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}[1 + q_1(x)] - \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}q_2(x) \tag{7.3.9}$$

其中

$$q_1(x) \equiv \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}t q(t)u_2(t)\mathrm{d}t$$

$$q_2(x) \equiv \int_0^x \sin\sqrt{\lambda}t q(t)u_2(t)\mathrm{d}t \tag{7.3.10}$$

因此由式(7.3.5)，本征值形式上满足方程

$$\tan(\sqrt{\lambda}l) = \frac{q_2(l)}{1 + q_1(l)} \tag{7.3.11}$$

另一方面式(7.3.9)可写成

$$u_2(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}[q_1(x)\sin\sqrt{\lambda}x - q_2(x)\cos\sqrt{\lambda}x]$$

$$\equiv \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{a(\sqrt{\lambda},x)}{\sqrt{\lambda}} \tag{7.3.12}$$

代入式(7.3.10)

$$q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{2}\int_0^x \sin 2\sqrt{\lambda}t q(t)\mathrm{d}t + \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}t q(t) a(\sqrt{\lambda}, t)\mathrm{d}t\right]$$

$$q_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^x \cos 2\sqrt{\lambda}t q(t)\mathrm{d}t + \int_0^x \sin\sqrt{\lambda}t q(t) a(\sqrt{\lambda}, t)\mathrm{d}t\right]$$

显然上二式中的积分除 $q_2(x)$的第一项外，当 $\lambda\to\infty$，阶数都是 $O(\lambda^{-1/2})$，因此

$$q_1(x) = \frac{O(\lambda^{-1/2})}{\sqrt{\lambda}}$$

$$q_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t + O(\lambda^{-1/2})\right] \tag{7.3.13}$$

代入式(7.3.11)得到

$$\tan(\sqrt{\lambda}l) = \frac{q_0/\sqrt{\lambda} + O(\lambda^{-1})}{1 + O(\lambda^{-1})} \tag{7.3.14}$$

其中 $2q_0 \equiv \int_0^l q(t)\mathrm{d}t$. 因为当 $q(x)=0$, $\sqrt{\lambda}l = n\pi$,故令 $\sqrt{\lambda}l = n\pi + \delta$,代入上式

$$\tan(\delta) = \frac{q_0 l/(n\pi) + O(n^{-2})}{1 + O(n^{-2})}$$

从而 $\delta = q_0 l/(n\pi) + O(n^{-2})$,因此本征值的渐近特征为

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi + \frac{q_0 l}{n\pi} + O(n^{-2})$$

两边平方得

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + \frac{1}{l}\int_0^l q(t)\mathrm{d}t + O(n^{-1}) \tag{7.3.15}$$

相应的本征函数渐近表达式为

$$u_n(x) = A_n\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}} + O(n^{-2}) \tag{7.3.16}$$

系数 A_n 由本征函数的归一化条件决定

$$\int_0^l |u_n(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{A_n^2}{\lambda_n}\int_0^l \sin^2\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x + O(n^{-3}) = \frac{A_n^2 l}{2\lambda_n}\left[1 - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}l}{2\sqrt{\lambda_n}l}\right] + O(n^{-3})$$

$$= \frac{A_n^2 l}{2\lambda_n}[1 + O(1/n)] \equiv 1$$

即 $A_n = \sqrt{2\lambda_n/l}\,[1 + O(1/n)]$，因此归一化本征函数的渐近表达式为

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_n}x + O(n^{-1}) \tag{7.3.17}$$

可以证明，函数系列$\{g_n = \sin\sqrt{\lambda_n}x\}$在 $L^2(0,l)$空间是完备系，即如果对所有的

n 都成立关系

$$\int_0^l f(x)g_n(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{7.3.18}$$

那么 $f(x)=0$. 注意 $g_n(x)$与 $u_n(x)$的区别.

对任意的 $h>0$ 和 $H>0$，可以得到类似的渐近表达式. 例如本征值问题

$$\begin{gathered} -\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x), \qquad x\in(0,l) \\ u(0)=0; \qquad u'(l)+Hu(l)=0 \end{gathered} \tag{7.3.19}$$

特征函数为

$$f(\lambda) = \frac{\mathrm{d}u_2(l,\lambda,q)}{\mathrm{d}x} + Hu_2(l,\lambda,q)\ . \tag{7.3.20}$$

例 7.3.2 当 $q=0, u_2(x)$ 由(7.3.6)第二式表示，因此特征函数为

$$f(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}l + H\frac{\sin(\sqrt{\lambda}l)}{\sqrt{\lambda}}$$

进一步，如果 $H=0$，本征值为熟知的

$$\lambda_n = \frac{(n+1/2)^2\pi^2}{l^2}, \qquad n=0,1,2,\cdots$$

可以证明，式(7.3.19)的本征值和本征函数的渐近表达式分别为

$$\begin{gathered} \lambda_n = \frac{(n+1/2)^2\pi^2}{l^2} + 2H + \frac{1}{l}\int_0^l q(t)\mathrm{d}t + O(n^{-1}) \\ u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left[\frac{(n+1/2)\pi x}{l}\right] + O(n^{-1}). \end{gathered} \tag{7.3.21}$$

7.3.2 本征值逆问题的惟一性

一般来说，本征值逆问题不是惟一的，简单的例子是，如果 λ 是下列问题的本征值

$$\begin{gathered} -\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x), \qquad x\in(0,l) \\ u(0)=0; \qquad u(l)=0 \end{gathered} \tag{7.3.22}$$

相应的本征函数为 u，那么 λ 也是下列问题的本征值

$$\begin{gathered} -\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} + \tilde{q}(x)v(x) = \lambda v(x), \qquad x\in(0,l) \\ v(0)=0; \qquad v(l)=0 \end{gathered} \tag{7.3.23}$$

相应的本征函数为 $v(x)\equiv u(l/2-x)$，其中 $\tilde{q}(x)\equiv q(l/2-x)$. 可见，从单一的本征值不能惟一决定函数 $q(x)$. 除非我们知道本征函数的某些特征，如上例中假定 $q(x)$和 $u(x)$关于 $l/2$ 对称，或者知道其他边界条件下本征值的分布.

为了证明本征值逆问题的惟一性，首先介绍 Gelfand-Levitan-Marchenko (GLM)积分算子，它的意义在于把二个初值问题 $-u''(x)+q(x)u(x)=\lambda u(x)$ 和 $-v''(x)+p(x)v(x)=\lambda v(x)$ 的解通过积分方程联系起来，而更重要的是 GLM 积分算子的核与本征值 λ 无关.

设 $p,q\in L^2(0,l)$，u 和 v 分别是下列初值问题的解

$$-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)u(x)=\lambda u(x);\qquad u(0)=0 \tag{7.3.24}$$

及

$$-\frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2}+p(x)v(x)=\lambda v(x);\qquad v(0)=0 \tag{7.3.25}$$

且 $u'(0)=v'(0)$，那么存在积分关系

$$u(x)=v(x)+\int_0^x K(x,t)v(t)\mathrm{d}t,\qquad x\in[0,l] \tag{7.3.26}$$

其中 GLM 积分算子的核 $K(x,t)$ 是下列 Goursat 问题的弱解

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial t^2}+[p(t)-q(x)]K(x,t)=0,\qquad (0<t<x<l)\\ K(x,0)=0,\qquad x\in[0,l]\\ K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x[q(s)-p(s)]\,\mathrm{d}s,x\in[0,l]\end{gathered} \tag{7.3.27}$$

可以证明 Goursat 问题的弱解存在且惟一.

下面证明式(7.3.26)，首先假定 $p,q\in C^2(0,l)$，定义函数

$$w(x)\equiv v(x)+\int_0^x K(x,t)v(t)\mathrm{d}t,\qquad x\in[0,l] \tag{7.3.28}$$

只要证明 $w(x)=u(x)$ 即可. 显然满足初始条件 $w(0)=v(0)=0=u(0)$. 对上式求一阶导数

$$w'(x)=v'(x)+K(x,x)v(x)+\int_0^x K_x(x,t)v(t)\mathrm{d}t,\qquad x\in(0,l)$$

初始条件 $w'(0)=v'(0)=u'(0)$ 也满足. 进一步求二阶导数

$$\begin{aligned}w''(x)&=v''(x)+v(x)\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}+K(x,x)v'(x)+K_x(x,x)v(x)+\int_0^x K_{xx}(x,t)v(t)\mathrm{d}t\\ &=\left[p(x)-\lambda+\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}+K_x(x,x)\right]v(x)+K(x,x)v'(x)\\ &\quad+\int_0^x\{[q(x)-p(t)]K(x,t)+K_{tt}(x,t)\}v(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

分部积分

$$\int_0^x K_{tt}(x,t)v(t)\mathrm{d}t=\int_0^x K(x,t)v''(t)\mathrm{d}t+[K_t(x,t)v(t)-K(x,t)v'(t)]\Big|_{t=0}^{t=x}$$

$$= \int_0^x [p(t) - \lambda]K(x,t)v(t)\mathrm{d}t + K_t(x,x)v(x) - K(x,x)v'(x)$$

注意到微分关系

$$\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x} + \left.\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_{t=x} = K_x(x,x) + K_t(x,x)$$

$$= \frac{1}{2}[q(x) - p(x)]$$

因此

$$w''(x) = \left[p(x) - \lambda + \frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x} + K_x(x,x) + K_t(x,x)\right]v(x)$$

$$+ [q(x) - \lambda]\int_0^x K(x,t)v(t)\mathrm{d}t$$

$$= [q(x) - \lambda]\left[v(x) + \int_0^x K(x,t)v(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= [q(x) - \lambda]w(x)$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)w(x) = \lambda w(x)$$

由初值问题解的惟一性，$w(x) = u(x)$.

对 $p, q \in L^2(0,l)$，取序列$\{p_n, q_n\} \in C^2(0,l)$，两个函数序列分别收敛到 p，$q \in L^2(0,l)$：$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$，对序列的每个元素 p_n 和q_n，有

$$w_n(x) \equiv v_n(x) + \int_0^x K_n(x,t)v_n(t)\mathrm{d}t \tag{7.3.29}$$

可证明，函数 u_n、v_n 和K_n 一致收敛到u、v 和K.

例 7.3.3　取 $p(x) = 0$，那么

$$v(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \tag{7.3.30}$$

因此，$u(x)$可表示为

$$u(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x K(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{d}t, \qquad x \in [0,l] \tag{7.3.31}$$

其中核 $K(x,t)$是下列 Goursat 问题的弱解

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} - q(x)K(x,t) = 0, \qquad (0 < t < x < l)$$

$$K(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l] \tag{7.3.32}$$

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(s)\mathrm{d}s, \qquad x \in [0,l]$$

根据式(7.3.26)可证明本征值逆问题的惟一性定理. 设 H 是实数，$p,q\in L^2(0,l)$，$\lambda_n(p)$ 和 $\lambda_n(q)$分别是下列本征值问题的本征值

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+p(x)u(x)=\lambda u(x);\qquad u(0)=u(l)=0 \tag{7.3.33}$$

$$-\frac{d^2v(x)}{dx^2}+q(x)v(x)=\lambda v(x);\qquad v(0)=v(l)=0 \tag{7.3.34}$$

进一步假定 $\mu_n(p)$和 $\mu_n(q)$分别是下列本征值问题的本征值

$$\begin{aligned}&-\frac{d^2\tilde{u}(x)}{dx^2}+p(x)\tilde{u}(x)=\mu\tilde{u}(x)\\&\tilde{u}(0)=0;\qquad \tilde{u}'(l)+H\tilde{u}(l)=0\end{aligned} \tag{7.3.35}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{d^2\tilde{v}(x)}{dx^2}+q(x)\tilde{v}(x)=\mu\tilde{v}(x)\\&\tilde{v}(0)=0;\qquad \tilde{v}'(l)+H\tilde{v}(l)=0\end{aligned} \tag{7.3.36}$$

如果对所有的 n，恒有

$$\lambda_n(p)=\lambda_n(q)\ \text{和}\ \mu_n(p)=\mu_n(q) \tag{7.3.37}$$

则 $p(x)=q(x)$.

证明：由本征值的渐近表达式(7.3.15)

$$\begin{aligned}\lambda_n(p)&=\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{1}{l}\int_0^l p(t)dt+O(n^{-1})\\\lambda_n(q)&=\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{1}{l}\int_0^l q(t)dt+O(n^{-1})\end{aligned} \tag{7.3.38}$$

因此

$$\int_0^l[p(t)-q(t)]\,dt=l\lim_{n\to\infty}[\lambda_n(p)-\lambda_n(q)]=0$$

由(7.3.27)第三式即有

$$K(l,l)=0 \tag{7.3.39}$$

设 u_n 和 v_n 分别是对应于 $\lambda_n(p)$和 $\lambda_n(q)$的本征函数，并假定 u_n 和 v_n 归一化到 $u'_n(0)=v'_n(0)=1$(我们总可以做到这点，而不失一般性)，于是由式(7.3.26)

$$u_n(x)=v_n(x)+\int_0^x K(x,t)v_n(t)dt,\qquad x\in[0,l] \tag{7.3.40}$$

利用边界条件 $u_n(l)=0$ 和 $v_n(l)=0$，上式取 $x=l$，于是

$$0=\int_0^l K(l,t)v_n(t)dt$$

因为$\{v_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$是完备系，由式(7.3.18)

$$K(l,t)=0,\qquad t\in[0,l] \tag{7.3.41}$$

对 $\tilde{u}_n$ 和 $\tilde{v}_n$，同样有

$$\tilde{u}_n(x) = \tilde{v}_n(x) + \int_0^x K(x,t)\tilde{v}_n(t)\mathrm{d}t, \qquad x \in [0,l] \tag{7.3.42}$$

上式微分并且取 $x = l$

$$\tilde{u}'_n(l) = \tilde{v}'_n(l) + K(l,l)\tilde{v}_n(l) + \int_0^l K_x(l,t)\tilde{v}_n(t)\mathrm{d}t \tag{7.3.43}$$

式(7.3.42)中取 $x = l$，并乘 H，然后与上式相减，得到

$$\begin{aligned}&[\tilde{u}'_n(l) - \tilde{v}'_n(l)] + H[\tilde{u}_n(l) - \tilde{v}_n(l)] + K(l,l)\tilde{v}_n(l)\\ &\quad + \int_0^l [K_x(l,t) - HK(l,t)]\tilde{v}_n(t)\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{7.3.44}$$

利用式(7.3.39)和(7.3.41)，以及边界条件 $\tilde{u}'_n(l) + H\tilde{u}_n(l) = 0$ 和 $\tilde{v}'_n(l) + H\tilde{v}_n(l) = 0$，有

$$\int_0^l K_x(l,t)\tilde{v}_n(t)\mathrm{d}t = 0$$

而 $\{\tilde{v}_n(x)\}(n = 1,2,\cdots)$ 是完备系，由式(7.3.18)

$$K_x(l,t) = 0, \qquad t \in [0,l] \tag{7.3.45}$$

因此，核函数 $K(x,t)$ 满足双曲方程的齐次 Cauchy 问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} + [p(t) - q(x)]K(x,t) = 0, \qquad (0 < t < x < l)\\ &K(l,t) = 0; \qquad K_x(l,t) = 0, \qquad t \in [0,l]\end{aligned} \tag{7.3.46}$$

故只有零解，即 $K(x,t)$ 恒为零. 于是，由(7.3.27)第三式

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x [q(s) - p(s)]\,\mathrm{d}s = 0 \tag{7.3.47}$$

求一阶导数给出 $p(x) = q(x)$，于是惟一性得证.

7.3.3　热导方程系数逆问题的惟一性

考虑热导方程的系数逆问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - q(x)U(x,t), \qquad x \in (0,l), \qquad t \in (0,T)\\ &U(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]\\ &U(0,t) = 0; \qquad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = f(t), \qquad t \in (0,T)\end{aligned} \tag{7.3.48}$$

正问题：已知函数 $f(t)$ 和 $q(x)$，求温度场的分布 $U(x,t)$. 由 1.4 节的讨论，正问题的解是惟一的. 逆问题：已知函数 $f(t)$ 和 $U(l,t)$，求系数 $q(x)$. 本节利用 Sturm-Liouville 本征值问题的性质，证明该逆问题的解惟一，也就是说，从 $f(t)$ 和 $U(l,t)$，原则上惟一决定 $q(x)$.

设 U_1 和 U_2 是式(7.3.48)的解，它们分别对应于 $q=q_1(x)\geqslant 0$ 和 $q=q_2(x)\geqslant 0$，以及同一 $f(t)$. 如果 $U_1(l,t)=U_2(l,t)$，且 $f(0)=0$ 和 $f'(0)\neq 0$，则在区间$[0,l]$上，$q_1(x)=q_2(x)$.

该结论的证明如下：设 λ_n 和 $u_n(x)$是下列本征值问题的解

$$-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)u(x)=\lambda u(x)$$

$$u(0)=0;\qquad u'(l)=0 \tag{7.3.49}$$

假定本征函数已归一化，即 $\|u_n(x)\|=1$. 另一方面，不失一般性，假定本征函数有性质 $u_n(l)>0$. 从式(7.3.21)，本征值和本征函数的渐近表达式为

$$\begin{aligned}\lambda_n&=\frac{(n+1/2)^2\pi^2}{l^2}+\frac{1}{l}\int_0^l q(t)\mathrm{d}t+O(n^{-1})\\ u_n(x)&=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{(n+1/2)\pi}{l}x+O(n^{-1})\end{aligned} \tag{7.3.50}$$

由于$\{u_n(x)\}$是 $L^2(0,l)$上的完备系，因此可作广义 Fourier 展开

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)u_n(x) \tag{7.3.51}$$

其中展开系数为

$$a_n(t)=\int_0^l U(x,t)u_n(x)\mathrm{d}x$$

上式微分可得

$$\begin{aligned}a'_n(t)&=\int_0^l\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}u_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^l\left[\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}-q(x)U(x,t)\right]u_n(x)\mathrm{d}x\\&=\left[u_n(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}-U(x,t)u'_n(x)\right]_{x=0}^{x=l}\\&\quad+\int_0^l U(x,t)[u''_n(x)-q(x)u_n(x)]\,\mathrm{d}x\\&=f(t)u_n(l)-\lambda_n a_n(t)\end{aligned}$$

利用初始条件 $a_n(0)=0$，上式的解为

$$a(t)=u_n(l)\int_0^t f(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)] \tag{7.3.52}$$

因此，式(7.3.48)的解为

$$U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(l)u_n(x)\int_0^t f(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{7.3.53}$$

由于

$$\int_0^t f(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\lambda_n}f(t)-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t f'(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau\rightarrow\frac{1}{\lambda_n}$$

由式(7.3.50)和上式知道，式(7.3.53)中级数在 $t\in(0,T)$内一致收敛，因此积分与求和可交换. 对边界点 $x=l$，式(7.3.53)给出

$$U(l,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n^2(l)\int_0^t f(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t f(\tau)\sum_{n=0}^{\infty}u_n^2(l)\exp[-\lambda_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau\equiv\int_0^t f(\tau)A(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

对 $U_1(l,t)$和 $U_2(l,t)$都有类似的表达式

$$U_1(l,t)=\int_0^t f(\tau)A^{(1)}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$U_2(l,t)=\int_0^t f(\tau)A^{(2)}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{7.3.54}$$

其中

$$A^{(1)}(t-\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}[u_n^{(1)}(l)]^2\exp[-\lambda_n^{(1)}(t-\tau)]$$

$$A^{(2)}(t-\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}[u_n^{(2)}(l)]^2\exp[-\lambda_n^{(2)}(t-\tau)]$$

上标(1)和(2)分别对应于 $q_1(x)$和 $q_2(x)$. 从条件 $U_1(l,t)=U_2(l,t)$得

$$\int_0^t f(\tau)[A^{(1)}(t-\tau)-A^{(2)}(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau=0$$

即

$$\int_0^t f(t-\tau)[A^{(1)}(\tau)-A^{(2)}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau=0 \tag{7.3.55}$$

令 $w(\tau)\equiv A^{(1)}(\tau)-A^{(2)}(\tau)$，因此 $w(\tau)$是第一类 Volterra 积分方程的解. 对上式微分两次，并且利用条件 $f(0)=0$ 和 $f'(0)\neq 0$

$$f'(0)w(t)+\int_0^t f''(t-\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad t\in[0,T]$$

显然上式是齐次的第二类 Volterra 积分方程，只有零解 $w(t)=0$. 因此有等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}[u_n^{(1)}(l)]^2\exp[-\lambda_n^{(1)}t]=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n^{(2)}(l)]^2\exp[-\lambda_n^{(2)}t]$$

由 t 的任意性，可推出

$$u_n^{(1)}(l)=u_n^{(2)}(l);\qquad \lambda_n^{(1)}=\lambda_n^{(2)}. \tag{7.3.56}$$

进一步，与式(7.3.40)类似的方程为

$$u_n^{(1)}(x)=u_n^{(2)}(x)+\int_0^x K(x,\xi)u_n^{(2)}(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{7.3.57}$$

上式中取 $x=l$，并且利用(7.3.56)第一式

$$\int_0^l K(l,\xi)u_n^{(2)}(\xi)\mathrm{d}\xi=0$$

即

$$K(l,\xi) = 0 \tag{7.3.58}$$

式(7.3.57)微分并取 $x=l$，得到与式(7.3.43)类似的表达式

$$u'^{(1)}_n(l) = u'^{(2)}_n(l) + K(l,l)u'^{(2)}_n(l) + \int_0^l K_x(l,\xi)u_n^{(2)}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

利用 $K(l,l)=0$ 和式(7.3.49)中边界条件得到

$$\int_0^l K_x(l,\xi)u_n^{(2)}(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$$

即

$$K_x(l,\xi) = 0 \tag{7.3.59}$$

因此 $K(x,\xi)$满足齐次 Cauchy 问题式(7.3.46)，故 $K(x,\xi)$恒为零，从式(7.3.47)类似的方程可得：$q_1(x)=q_2(x)$ ，于是定理得证.

7.3.4 数值方法

首先介绍基于特征函数 $f(\lambda)$的数值近似方法. 由 7.3.2 小节，我们知道下列本征值逆问题

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x), \qquad x\in(0,l)\\ u(0) = u(l) = 0\end{gathered} \tag{7.3.60}$$

的解一般不惟一，但当 $q(x)$关于 $x=l/2$ 对称，则 $q(x)$有惟一解. 下面假定 $q(x)$具有这种性质. 根据特征函数 $f(\lambda)$的性质，本征值逆问题可看作求解下列特征方程

$$f(\lambda) = u_2(l,\lambda,q) = 0 \tag{7.3.61}$$

以决定 $q(x)$. 一般只知道有限个本征值：$\lambda_n(n=1,2,\cdots,N)$，因此假定 $q(x)$有形式

$$q(x,\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{N} a_n q_n(x), \qquad x\in[0,1] \tag{7.3.62}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_N)$，$q_n(x)$是一类线性独立的偶函数，例如可取

$$q_n(x) = \cos\left[\frac{2\pi(n-1)x}{l}\right], n = 1,2,\cdots,N$$

因此式(7.3.61)变成非线性方程

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{a}) = 0 \tag{7.3.63}$$

其中非线性算子 $\mathbf{F}$ 的分量为 $F_n(\boldsymbol{a})$

$$F_n(\boldsymbol{a}) = u_2[l,\lambda_n,q(\cdot,\boldsymbol{a})],\ n = 1,2,\cdots,N$$

上式中 $q(\cdot,\boldsymbol{a})$表示 $F_n(\boldsymbol{a})$与 $q(x,\boldsymbol{a})$有关，但已与 x 无直接函数关系. 一般不可能直接求出 $\mathbf{F}(\boldsymbol{a})$的函数形式，故只能通过迭代法求近似解. 例如简单的 New-

ton 迭代法

$$a^{k+1} = a^k - [\nabla \mathbf{F}(a^k)]^{-1}\mathbf{F}(a^k), k = 0,1,2,\cdots \tag{7.3.64}$$

迭代过程如下：

(1) 给定初始值 $a^0 = (a_1^0, a_2^0, \cdots, a_N^0)$，式(7.3.62)代入式(7.3.60)，求得 $u_2[l,\lambda_n,q(\cdot,a^0)]$，如果 $\mathbf{F}(a^0)<\varepsilon$(给定的精度)，则 $a=a^0$，否则进行下一步计算；

(2) 由式(7.3.64)，计算 a^{k+1}，式(7.3.62)代入式(7.3.60)，求得 $u_2[l,\lambda_n,q(\cdot,a^{k+1})]$，如果 $\mathbf{F}(a^{k+1})<\varepsilon$(给定的精度)，则 $a=a^{k+1}$，否则继续由式(7.3.64)进行下一步迭代.

从式(7.3.64)可见，迭代过程需计算逆矩阵 $[\nabla \mathbf{F}(a^k)]^{-1}$，下面介绍其方法.令

$$u_2^{k+1} = u_2^k + \delta u_2^k; \qquad q^{k+1} = q^k + \delta q^k \tag{7.3.65}$$

注意到在迭代过程中，本征值 $\lambda_n(n=1,2,\cdots,N)$ 保持为常数，上式代入式(7.3.3)，并忽略二次小量

$$\begin{gathered} -\frac{d^2 u_2^k(x,\lambda_n)}{dx^2} + q^k(x)u_2^k(x,\lambda_n) = \lambda_n u_2^k(x,\lambda_n) \\ u_2^k(0,\lambda_n) = 0; \qquad \frac{du_2^k(x,\lambda_n)}{dx} = 1 \end{gathered} \tag{7.3.66}$$

$$\begin{gathered} -\frac{d^2\delta u_2^k(x,\lambda_n)}{dx^2} + [q^k(x) - \lambda_n]\,\delta u_2^k(x,\lambda_n) = -\delta q^k(x)u_2^k(x,\lambda_n) \\ \delta u_2^k(0,\lambda_n) = 0; \qquad \frac{d\delta u_2^k(x,\lambda_n)}{dx} = 0 \end{gathered} \tag{7.3.67}$$

根据 3.2 节，上述 Cauchy 问题的解可用 Green 函数 $G^k(x,x',\lambda_n)$表示

$$\delta u_2^k(x,\lambda_n) = -\int_0^x G^k(x,x',\lambda_n)\delta q^k(x')u_2^k(x',\lambda_n)dx' \tag{7.3.68}$$

其中 Green 函数定义为

$$-\frac{d^2 G^k(x,x',\lambda_n)}{dx^2} + [q^k(x) - \lambda_n]G^k(x,x',\lambda_n) = \delta(x,x') \tag{7.3.69}$$

因为

$$\delta q^k = \sum_{i=1}^{N}\delta a_i^k q_i(x) \tag{7.3.70}$$

代入式(7.3.68)，并取 $x=l$

$$\begin{aligned} \delta u_2^k(l,\lambda_n) &= -\sum_{i=1}^{N}\delta a_i^k\int_0^l G^k(l,x',\lambda_n)q_i(x')u_2^k(x',\lambda_n)dx' \\ &= \sum_{i=1}^{N}\delta a_i^k a_{in}^k \end{aligned} \tag{7.3.71}$$

其中

$$a_{in}^k \equiv -\int_0^l G_2^k(l,x',\lambda_n)q_i(x')u_2^k(x',\lambda_n)\mathrm{d}x'$$

因此

$$[\nabla \mathbf{F}(\boldsymbol{a}^k)]_{in} = \frac{\delta u_2^k(l,\lambda_n)}{\delta a_i^k} = a_{in}^k, \qquad (i,\ n = 1,2,\cdots,N) \quad (7.3.72)$$

然后求矩阵算子$\nabla\mathbf{F}(\boldsymbol{a}^k)$的逆算子$[\nabla \mathbf{F}(\boldsymbol{a}^k)]^{-1}$. 一般$\nabla\mathbf{F}(\boldsymbol{a}^k)$与$\boldsymbol{a}^k$有关，每一次迭代都需要计算$\nabla\mathbf{F}(\boldsymbol{a}^k)$和它的逆，计算量非常大. 可以证明迭代公式(7.3.64)可修改成

$$\boldsymbol{a}^{k+1} = \boldsymbol{a}^k - [\nabla \mathbf{F}(0)]^{-1}\mathbf{F}(\boldsymbol{a}^k), k = 0,1,2,\cdots \quad (7.3.73)$$

下面介绍的数值计算方法基于 7.3.2 小节中的 Goursat 问题. 假定已知下列二个本征值问题的本征值

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)u(x) = \lambda u(x); \qquad u(0) = u(l) = 0 \quad (7.3.74)$$

$$-\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x)v(x) = \mu v(x)$$

$$v(0) = 0; \qquad v'(l) + Hv(l) = 0 \quad (7.3.75)$$

的前 N 个本征值λ_n 和$\mu_n(n=1,2,\cdots,N)$，求函数 $q(x)$.

首先从有限个 λ_n 和 μ_n 求 Goursat 问题的 Cauchy 数据，设

$$K(l,t) = \sum_{k=1}^N a_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \quad (7.3.76)$$

由式(7.3.31)

$$u_n(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}} + \int_0^x K(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}}\mathrm{d}t \quad (7.3.77)$$

且取 $x=l$ 导致N 个线性方程

$$\sum_{k=1}^N a_k\int_0^l \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right)\sin\sqrt{\lambda_n}t\mathrm{d}t = -\sin\sqrt{\lambda_n}l, (n = 1,2,\cdots,N) \quad (7.3.78)$$

把式(7.3.77)中 $u_n(x)$改成 $v_n(x)$，代入边界条件 $v'_n(l)+Hv_n(l)=0$ 得到

$$\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}l + H\sin\sqrt{\mu_n}l + \int_0^l [K_x(l,t) + HK(l,t)]\sin\sqrt{\mu_n}t\mathrm{d}t = 0$$

$$(7.3.79)$$

令

$$K_x(l,t) + HK(l,t) = \sum_{k=1}^N b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \quad (7.3.80)$$

代入式(7.3.79)得到

$$\sum_{k=1}^N b_k\int_0^l \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right)\sin\sqrt{\mu_n}t = -\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}l - H\sin\sqrt{\mu_n}l \quad (7.3.81)$$

其中 $n=1,2,\cdots,N$. 从式(7.3.78)和上式可求得 N 个系数 a_k 和 $b_k(k=1,2,\cdots,N)$，即求得 Cauchy 数据 $K(l,t)$和 $K_x(l,t)$. 考虑 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}-q(x)K(x,t)=0,\qquad (0<t<x<l)$$

$$K(x,0)=0,\qquad x\in(0,l)$$

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(s)\mathrm{d}s,\qquad x\in[0,l] \tag{7.3.82}$$

$$K(l,t)=g(t);\qquad K_x(l,t)=f(t,)\qquad t\in[0,l]$$

其中 $g(t)$和 $f(t)$由式(7.3.76)和(7.3.80)给出. 可以证明上述问题给出关系

$$q(x)\equiv 2\mathbf{T}(q) \tag{7.3.83}$$

其中积分算子定义为

$$\mathbf{T}(q)=-\int_x^l q(y)K(y,2x-y)\mathrm{d}y+g(2x-l)+f'(2x-l)$$

注意:积分核 $K(y,2x-y)$由 Goursat 问题式(7.3.82)决定，仍然是 $q(x)$的函数，故式(7.3.83)是非线性方程！可用迭代法解之

$$q^{k+1}(x)=2\mathbf{T}(q^k) \tag{7.3.84}$$

如取 $q^0(x)=0$，则 $q^1(x)=g(2x-l)+f'(2x-l)$，进一步的迭代要解上述 Goursat 问题.

7.4　波动方程的逆散射

散射理论是 20 世纪数学物理的主要研究内容之一. 从天空为什么是蓝的(Rayleigh 的解释)、Rutherford 原子核模型到现代医学成像(X-CT、核磁共振成像 NMR-CT，以及正电子 CT)，一个多世纪来，散射现象一直是科学界引人入胜的课题. 广义地讲，散射理论研究的内容是当波(声波、电磁波以及 de Broglie 波)入射到非均匀介质而发生的物理效应. 如果假定总的场为入散场与散射场之和,散射理论的正问题为，根据入散场和控制方程以及相应的边界决定散射场. 而我们更感兴趣的是散射理论的逆问题：从散射场的远场性质，反演非均匀介质的特性或重构控制方程，或者决定控制方程的定义区域. 本节主要介绍波动方程逆散射的一些主要概念和结果. 7.4.1 小节介绍波的散射和远场特性;7.4.2 小节和 7.4.3 小节介绍波动方程逆散射理论中十分重要的二个近似方法，即 Kirchhoff 近似和 Born 近似(包括 Rytov 近似)；最后在 7.4.4 小节中介绍二维近场逆散射成像理论.

7.4.1　波的散射和远场特性

波的散射特性依赖于入射波波长 λ 和散射体的大小,如果用 l 来表征散射体

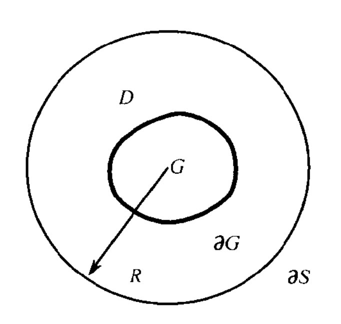


图 7.4.1 半径 R 的球包含散射体

的线度，当 $\lambda/l \gg 1$，即低频情况，入射波波长远大于散射体，可用 Born 近似来讨论；当 $\lambda/l \ll 1$，即高频情况，入射波长远小于散射体，可用 Kirchhoff 近似来讨论．在这两种近似情况下，逆散射问题均能被有效地线性化，我们将在后面专门讨论．但当入射波波长与散射体线度在同一数量级时，即 $\lambda/l \approx 1$（称为共振散射区），散射和逆散射问题要复杂得多，只能通过数值方法才能求解．

首先，分析 Helmholtz 方程辐射解的基本特性

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \qquad r \in \overline{G} \tag{7.4.1}$$

其中 $\overline{G}$ 是闭区域 G 的外部．在任意有界闭区域 D，Green 公式为

$$\int_D (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

其中 ∂D 是 D 的边界．取包含散射体 G 且半径足够大的球 R，如图 7.4.1，假定 D 为 ∂G 和球面 ∂S 包围的区域，使用上式

$$\int_D (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S + \iint_{\partial S}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

如果 u 是 Helmholtz 方程(7.4.1)的解，而 v 是 Helmholtz 方程的基本解

$$v \equiv G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}k\,|\,\boldsymbol{r} - \mathbf{r}'\,|)}{|\,\boldsymbol{r} - \mathbf{r}'\,|} \tag{7.4.2}$$

于是

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}) = &\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' \\ &+ \iint_{\partial S}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' \end{aligned} \tag{7.4.3}$$

下面证明当球半径 $R \to \infty$ 时，上式第二项面积分为零．事实上，通过球面的声能量应为常数，即

$$\iint_{\partial S} |\,u\,|^2 \mathrm{d}S = c(\text{常数}) \tag{7.4.4}$$

因此

$$\begin{aligned} &\iint_{\partial S} u(\boldsymbol{r}')\left[\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \mathrm{i}kG(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \\ &\leqslant \left[\iint_{\partial S} |\,u(\boldsymbol{r}')\,|^2 \mathrm{d}S'\right]^{1/2} \cdot \left[\iint_{\partial S}\left|\frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \mathrm{i}kG(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right|^2 \mathrm{d}S'\right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$= c\left[\iint_{\partial S}\left|\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \mathrm{i}kG(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right|^2 \mathrm{d}S'\right]^{1/2} \to 0, \qquad r' \to \infty$$

同样

$$\iint_{\partial S} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \mathrm{i}ku(\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S'$$

$$\leqslant \left[\iint_{\partial S}|G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|^2\mathrm{d}S'\right]^{1/2}\left[\iint_{\partial S}\left|\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \mathrm{i}ku(\boldsymbol{r}')\right|^2\mathrm{d}S'\right]^{1/2}$$

$$= c\left[\iint_{\partial S}\left|\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \mathrm{i}ku(\boldsymbol{r}')\right|^2\mathrm{d}S'\right]^{1/2} \to 0, \qquad r' \to \infty$$

其中对 u 和 G 已利用了辐射条件式(7.1.37)，上二式相减得到

$$\lim_{r'\to\infty}\iint_{\partial S}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' = 0$$

因此式(7.4.3)简化成

$$u(\boldsymbol{r}) = \iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S', \qquad \boldsymbol{r}\in\overline{G} \tag{7.4.5}$$

下面利用上式分析辐射场的远场特性. 当$|\boldsymbol{r}|\gg|\boldsymbol{r}'|$时，由近似

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = \sqrt{|\boldsymbol{r}|^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}' + |\boldsymbol{r}'|^2} \approx |\boldsymbol{r}| - \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}' + O(1/|\boldsymbol{r}|)$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 为单位方向矢量$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$，可得

$$\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \approx \frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}[\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}') + O(1/|\boldsymbol{r}|)]$$

$$\frac{\partial}{\partial n'}\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \approx \frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}\left[\frac{\partial\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')}{\partial n'} + O(1/|\boldsymbol{r}|)\right]$$

代入式(7.4.5)得到远场表达式

$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}[u_\infty(\boldsymbol{e}) + O(1/|\boldsymbol{r}|)], \qquad |\boldsymbol{r}|\to\infty \tag{7.4.6}$$

其中远场角分布 $u_\infty(\boldsymbol{e})$为

$$u_\infty(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}') - \frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.7}$$

上式写成算子的形式

$$\mathbf{F}(u) = u_\infty(\boldsymbol{e}) \tag{7.4.8}$$

其中积分算子为

$$\mathbf{F}(u) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}') - \frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S'$$

显然式(7.4.8)类似于第一类 Fredholm 积分方程. 从测量的远场分布 $u_\infty(\boldsymbol{e})$，要

求重构 Helmholtz 方程的解 $u(\boldsymbol{r})$和定义域 G.

现在考虑波的散射问题，设入射波为 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的平面波

$$u^i(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) = u_0\exp(\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{7.4.9}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$为入射场的单位方向矢量. 由于 Helmholtz 方程是关于 u 的线性方程，而式(7.4.9)满足 Helmholtz 方程，故总声场由入射场和散射场之和组成

$$u(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) = u^i(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) + u^s(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}})$$

由式(7.4.5)得散射波(辐射解)的积分方程

$$u^s(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) = \iint_{\partial G}\left[u^s(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u^s(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.10}$$

另一方面，入射场在整个空间都满足 Helmholtz 方程，因此有

$$0 = \iint_{\partial G}\left[u^i(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u^i(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.11}$$

上二式相加

$$u(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) = u^i(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) + \iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.12}$$

如果边界条件为$u|_{\partial G}=0$(软边界)，则有

$$u(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) = u^i(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) - \iint_{\partial G}\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'$$

利用式(7.4.7)可得到远场分布

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\hat{\boldsymbol{k}}) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})}{\partial n'}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.13}$$

如果边界条件为$\partial u/\partial n|_{\partial G}=0$(刚性边界)，则有

$$u(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) = u^i(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}) + \iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'$$

远场分布为

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\hat{\boldsymbol{k}}) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})\frac{\partial}{\partial n'}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S' \tag{7.4.14}$$

对二维情况，Helmholtz 方程的基本解为

$$v = G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{7.4.15}$$

当$|\boldsymbol{r}|\to\infty$，远场近似为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k|\boldsymbol{r}|}}\exp[\mathrm{i}k(|\boldsymbol{r}|-\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}\pi/4]\cdot[1+O(1/|\boldsymbol{r}|)] \tag{7.4.16}$$

与辐射条件式(7.1.37)相应，二维情况为

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{|\boldsymbol{r}|}\left(\frac{\partial u}{\partial|\boldsymbol{r}|}-\mathrm{i}ku\right)=0 \tag{7.4.17}$$

而与式(7.4.6)相应的远场表达式为

$$u(\boldsymbol{r})=\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|)}{\sqrt{|\boldsymbol{r}|}}[u_\infty(\boldsymbol{e})+O(1/|\boldsymbol{r}|)] \tag{7.4.18}$$

其中远场角分布 $u_\infty(\boldsymbol{e})$为

$$u_\infty(\boldsymbol{e})=\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\iint_{\partial G}\left[u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')-\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S'.$$

7.4.2 边界反演的 Kirchhoff 近似

原则上，从式(7.4.8)的 $u_\infty(\boldsymbol{e})$($\boldsymbol{e}$ 覆盖整个单位球面)可反演出散射体的边界，而且数学上可证明反演结果是惟一的. 但这是十分困难的，相关的研究也不成熟，我们不进一步展开讨论. 下面介绍一种有用的近似方法，即 Kirchhoff 近似，它能给出比较简洁的边界反演表达式.

以刚性边界条件$\partial u/\partial n|_{\partial G}=0$ 为例，重写严格的远场分布式(7.4.14)

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\hat{\boldsymbol{k}})=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}[u(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}})\nabla\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S' \tag{7.4.19}$$

在高频近似下，入射波在边界上的散射可看作平面反射，如图 7.4.2，在入射波的另一个面形成无法探测的阴影区. 在刚性平面上，反射波与入射波的振幅和相位都相等，因此在边界∂G_1 上，可近似为

$$u(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}})|_{\partial G_1}=[u^i(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}_i)+u^s(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}_s)]|_{\partial G_1}$$

$$\approx 2u^i(\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{k}}_i)|_{\partial G_1}$$ 于是

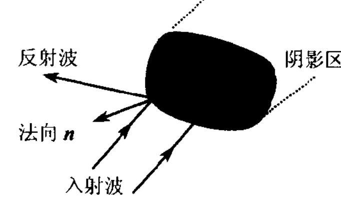


图 7.4.2　高频近似，在入射波的另一侧形成无法探测的阴影区

$${}_\infty(\boldsymbol{e},\hat{\boldsymbol{k}}_i)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\partial G_1}[u^i(\boldsymbol{r}',\hat{\boldsymbol{k}}_i)\nabla\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S' \tag{7.4.20}$$

其中∂G_1 为入射波照射的一面边界. 设入射波为 $\boldsymbol{k}_i$ 方向传播的平面波式(7.4.9)，代入上式，并注意到 $k=k_i$

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\hat{\boldsymbol{k}}_i)=\frac{-\mathrm{i}k_i}{2\pi}\iint_{\partial G_1}\exp[\mathrm{i}k(\hat{\boldsymbol{k}}_i-\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{r}']\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S' \tag{7.4.21}$$

如果测量的是背向散射(backscattering)，即发射和接收为同一换能器

$$\hat{\boldsymbol{k}}_i-\boldsymbol{e}=2\hat{\boldsymbol{k}}_i;\qquad \boldsymbol{e}=-\hat{\boldsymbol{k}}_i$$

代入式(7.4.21)

$$u_\infty(\boldsymbol{e},\hat{\boldsymbol{k}}_i)=\frac{\mathrm{i}k_i}{2\pi}\iint_{\partial G_1}\exp(\mathrm{i}2k\hat{\boldsymbol{k}}_i\cdot\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{k}}_i\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S' \tag{7.4.22}$$

同样，如果在物体的另一边用相同的平面波照射，则有

$$u_\infty(\boldsymbol{e}, -\hat{\boldsymbol{k}}_i) = \frac{\mathrm{i}k_i}{2\pi}\iint_{\partial G_2} \exp(-\mathrm{i}2k\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{r}')(-\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}S' \quad (7.4.23)$$

其中∂G_2为入射波照射的另一面边界，显然有$\partial G = \partial G_1 + \partial G_2$. 上式取复共轭并与式(7.4.22)相加

$$u_\infty(\boldsymbol{e}, \hat{\boldsymbol{k}}_i) + u_\infty^*(\boldsymbol{e}, -\hat{\boldsymbol{k}}_i) = \frac{\mathrm{i}k_i}{2\pi}\iint_{\partial G} \exp(\mathrm{i}2k\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S' \quad (7.4.24)$$

利用 Gauss 定理，上述面积分化为 G 上的体积分

$$\begin{aligned} u_\infty(\boldsymbol{e}, \hat{\boldsymbol{k}}_i) + u_\infty^*(\boldsymbol{e}, -\hat{\boldsymbol{k}}_i) &= \frac{\mathrm{i}k_i}{2\pi}\iint_{\partial G} \exp(\mathrm{i}2k\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S' \\ &= \frac{\mathrm{i}k_i}{2\pi}\int_G \nabla \cdot \left[\hat{\boldsymbol{k}}_i \exp(\mathrm{i}2k\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{k_i^2}{\pi}\int_G \exp(\mathrm{i}2k\hat{\boldsymbol{k}}_i \cdot \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \end{aligned} \quad (7.4.25)$$

定义形状函数

$$\gamma(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \boldsymbol{r} \in G \\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{r} \notin G \end{cases}$$

并且令

$$\boldsymbol{K} = 2\boldsymbol{k}_i; \qquad \Gamma(\boldsymbol{k}) = -4\pi\left[\frac{u_\infty(\boldsymbol{e}, \hat{\boldsymbol{k}}_i) + u_\infty^*(\boldsymbol{e}, -\hat{\boldsymbol{k}}_i)}{\boldsymbol{K}^2}\right]$$

于是式(7.4.25)成为

$$\Gamma(\boldsymbol{K}) = \int_R \gamma(\boldsymbol{r})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau' \quad (7.4.26)$$

因此，形状函数 $\gamma(\boldsymbol{r})$是$\Gamma(\boldsymbol{K})$的 Fourier 变换

$$\gamma(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_K \Gamma(\boldsymbol{K})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau_k \quad (7.4.27)$$

上式称为 **Bojarski 等式**，给出了从远场散射数据重构凸散射物边界的方法. 然而，我们面临二个困难：①与 Kirchhoff 近似条件的矛盾，在导出 Bojarski 等式时，假定高频近似成立，即入射波长远小于散射体尺寸，但式(7.4.27)的积分包括了低频在内的一切频率；②实际测量的困难，式(7.4.27)要求从一切方位角测量背向散射场. 在所有方位角和所有频率范围取得散射信息的要求是不实际的.

假定在 $\boldsymbol{K}$ 空间中某个区域D 内 $\Gamma(\boldsymbol{K})$已知，为此定义 $\boldsymbol{K}$ 空间的特征函数

$$A(\boldsymbol{K}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \boldsymbol{K} \in D \\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{K} \notin D \end{cases}$$

$A(\boldsymbol{K})$称为散射信息孔径函数，它由实际测量而得. 孔径函数的 Fourier 变换为

$$a(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int_K A(\boldsymbol{K})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\tau_k$$

显然,$A(\boldsymbol{K})$ 和 $a(\boldsymbol{r})$由实际测量给出，故可认为已知. 同样 $A(\boldsymbol{K})\Gamma(\boldsymbol{K})$也由实际测量给出，故

$$f(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int_K A(\boldsymbol{K})\Gamma(\boldsymbol{K})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau_k \tag{7.4.28}$$

也可认为是已知的. 由 Fourier 变换的卷积性质得到

$$a(\boldsymbol{r}) \otimes \gamma(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int_K A(\boldsymbol{K})\Gamma(\boldsymbol{K})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau_k$$

上式左边即为

$$a(\boldsymbol{r}) \otimes \gamma(\boldsymbol{r}) = \int_R a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\gamma(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

因此

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_R a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\gamma(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{7.4.29}$$

其中 $f(\boldsymbol{r})$和 $a(\boldsymbol{r})$已知，而 $\gamma(\boldsymbol{r})$待求，故是第一类积分方程，必须用 7.1.3 小节介绍的正则化方法求解.

7.4.3　非均匀介质反演的 Born 和 Rytov 近似

设介质的声速 $c(\boldsymbol{r})$不均匀，声波方程满足变系数 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2(\boldsymbol{r})}\left(1+\mathrm{i}\frac{\gamma}{\omega}\right)u = 0 \tag{7.4.30}$$

其中 γ 表示介质的耗散. 假定不均匀区为 G，在 G 外，背景介质的声速为常数 c_0，且无声耗散 $\gamma=0$. 引进折射率

$$n(\boldsymbol{r}) = \frac{c_0^2}{c^2(\boldsymbol{r})}$$

式(7.4.30)变成

$$(\nabla^2+k_0^2)u(\boldsymbol{r}) = k_0^2 Q(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.31}$$

其中 $k_0=\omega/c_0$ 为背景介质中的波数，$Q(\boldsymbol{r})$定义为 $Q(\boldsymbol{r})=1-n(\boldsymbol{r})$. 在背景介质中 $n(\boldsymbol{r})=1$，因此 $Q(\boldsymbol{r})=0$. 设入射波为 u^i，满足背景介质中的 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2+k_0^2)u^i(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7.4.32}$$

因此，散射波满足的方程为

$$(\nabla^2+k_0^2)u^s(\boldsymbol{r}) = k_0^2 Q(\boldsymbol{r})[u^s(\boldsymbol{r})+u^i(\boldsymbol{r})] \tag{7.4.33}$$

利用 Green 函数式(7.4.2)或(7.4.15)，散射波满足的积分方程为

$$u^s(\boldsymbol{r}) = -k_0^2\int_G Q(\boldsymbol{r}')[u^s(\boldsymbol{r}') + u^i(\boldsymbol{r}')]\,G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

其中散射场满足辐射条件. 用总场表示

$$u(\boldsymbol{r}) = u^i(\boldsymbol{r}) - k_0^2\int_G Q(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' \qquad (7.4.34)$$

上式称为 **Lippmann-Schwinger 积分方程**. 令积分算子

$$\mathbf{T}(u) = k_0^2\int_G Q(\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

式(7.4.34)可写成

$$u = u^i - \mathbf{T}(u) \qquad (7.4.35)$$

下面估计积分算子的模

$$\|\mathbf{T}(u)\| \leqslant k_0^2\|Q\|_\infty \cdot \|u\|_\infty \max_{|r|<a}\int_{|r'|<a}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau', \qquad \boldsymbol{r}\in(0,a)$$

即

$$\|\mathbf{T}\|_\infty \leqslant k_0^2\|Q\|_\infty \max_{|r|<a}\int_{|r'|<a}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau' = \frac{(ka)^2}{2}\|Q\|_\infty$$

其中假定半径为 a 的球包含不均匀区 G. 模 $\|Q\|_\infty$ 定义为 $\|Q\|_\infty = \max_{|r|<a}|Q|$. 当 $\|\mathbf{T}\|_\infty < 1$，即 $(ka)^2\|Q\|_\infty < 2$ 时，式(7.4.35)的解可表示成 Neumann 级数

$$u = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\mathbf{T}^j u^i \qquad (7.4.36)$$

Neumann 级数的前二项

$$u(\boldsymbol{r}) \approx u^i(\boldsymbol{r}) - k_0^2\int_G Q(\boldsymbol{r}')u^i(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \qquad (7.4.37)$$

称为 **Born 近似**.

利用式(7.4.6)，式(7.4.34)的远场特性为

$$u(\boldsymbol{r}) = u^i(\boldsymbol{r}) + \frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}[u_\infty(\boldsymbol{e}) + O(1/|\boldsymbol{r}|)] \qquad (7.4.38)$$

远场分布为

$$u_\infty(\boldsymbol{e}) = -\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')u(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 为单位方向矢量 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$. 对 Born 近似，远场分布

$$u_\infty^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{e}) = -\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}k_0\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}')u^i(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \qquad (7.4.39)$$

设入射波为 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 方向的平面波式(7.4.9)，代入上式

$$u_\infty^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{e},\hat{\boldsymbol{k}}) = -\frac{k_0^2}{4\pi}\int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp[\mathrm{i}k_0(\hat{\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{r}']\,\mathrm{d}\tau' \qquad (7.4.40)$$

令

$$\Gamma_B(\boldsymbol{K}) = -4\pi\frac{u_\infty^B(\boldsymbol{e},\hat{\boldsymbol{k}})}{k_0^2}; \qquad \boldsymbol{K} = k_0(\hat{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{e})$$

式(7.4.40)变成

$$\Gamma_B(\boldsymbol{K}) = \int_G Q(\boldsymbol{r}')\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{7.4.41}$$

因此，原则上可由上式从远场测量的散射数据反演出不均匀分布

$$Q(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_K \Gamma_B(\boldsymbol{K})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau_k \tag{7.4.42}$$

与 Kirchhoff 近似存在的矛盾一样，上式同样面临二个困难：①Born 近似成立的条件是$(ka)^2\|Q\|_\infty<2$，即低频(且不均匀区域较小)，而上式覆盖整个频率区域；②上式要求从一切方位角测量散射场．同处理 Kirchhoff 近似一样，我们也可推出类似于式(7.4.29)的第一类积分方程．但两者有明显的区别，Born 近似给出 $\boldsymbol{K}$ 空间低频区的分布，相当于对 $Q(\boldsymbol{r})$作低通滤波，而 Kirchhoff 近似恰好相反．

从 Born 近似成立条件$(ka)^2\|Q\|_\infty<2$ 可知，近似成立依赖于三个因素：①低频近似；②不均匀区 a 要足够小；③不均匀区的不均匀度，即折射率变化比较小．实际中这三个条件非常苛刻．下面介绍的 Rytov 近似对较高的频率和较大的不均匀区域仍有较好的近似效果．

首先，作变换

$$u(\boldsymbol{r}) = u^i(\boldsymbol{r})\exp[w(\boldsymbol{r})] \tag{7.4.43}$$

代入式(7.4.31)得到 $w(\boldsymbol{r})$的非线性方程

$$\nabla^2 w(\boldsymbol{r}) + \nabla w(\boldsymbol{r})\cdot\nabla w(\boldsymbol{r}) + 2\nabla\ln u^i(\boldsymbol{r})\cdot\nabla w(\boldsymbol{r}) - k_0^2 Q(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7.4.44}$$

引进新的函数 $\xi(\boldsymbol{r})\equiv u^i(\boldsymbol{r})w(\boldsymbol{r})$，把 $w(\boldsymbol{r})=\xi(\boldsymbol{r})/u^i(\boldsymbol{r})$代入上式

$$\nabla^2\xi(\boldsymbol{r}) + k_0^2\xi(\boldsymbol{r}) = u^i(\boldsymbol{r})[k_0^2 Q(\boldsymbol{r}) - |\nabla w(\boldsymbol{r})|^2]$$

利用 Green 函数式(7.4.2)或(7.4.15)

$$u^i(\boldsymbol{r})w(\boldsymbol{r}) = -\int_G u^i(\boldsymbol{r}')[k_0^2 Q(\boldsymbol{r}') - |\nabla w(\boldsymbol{r}')|^2]G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{7.4.45}$$

取 Rytov 近似

$$|k_0^2 Q(\boldsymbol{r}')| \gg |\nabla w(\boldsymbol{r}')|^2$$

式(7.4.45) 近似成

$$u^i(\boldsymbol{r})w(\boldsymbol{r}) \approx -k_0^2\int_G Q(\boldsymbol{r}')u^i(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{7.4.46}$$

比较式(7.4.34)，右边积分项完全相同，分别用 u_s^{B} 和 w_s^{R} 表示二种近似解，显然有关系

$$w^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_s^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{r})}{u^i(\boldsymbol{r})}$$

由式(7.4.43)，总波场满足关系

$$u^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}) = u^i(\boldsymbol{r})\exp\left[\frac{u_s^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{r})}{u^i(\boldsymbol{r})}\right] \tag{7.4.47}$$

上式也可由式(7.4.34)通过"重整化"得到，把式(7.4.34)写成

$$u(\boldsymbol{r}) \approx u^i(\boldsymbol{r})\left[1 - \frac{k_0^2}{u^i(\boldsymbol{r})}\int_G Q(\boldsymbol{r}')u^i(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\right] = u^i(\boldsymbol{r})\left[1 + \frac{u_s^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{r})}{u^i(\boldsymbol{r})}\right]$$

利用指数展开，近似有

$$u(\boldsymbol{r}) \approx u^i(\boldsymbol{r})\exp\left[\frac{u_s^{\mathrm{B}}(\boldsymbol{r})}{u^i(\boldsymbol{r})}\right] \tag{7.4.48}$$

上式即为式(7.4.47). 一般"重整化"解式(7.4.48)的成立范围比原解式(7.4.37)要大得多. 研究表明 Rytov 近似对具有较大不均匀区的散射体，亦有较好的近似. 但在 Born 近似成立的区域，Rytov 近似略差于 Born 近似.

7.4.4 二维近场逆散射成像理论

如图 7.4.3，设入射声波为 $\boldsymbol{k}_0$ 方向传播的平面波

$$u^i(\boldsymbol{r}) = u_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}) \tag{7.4.49}$$

其中 $\boldsymbol{k}_0 = (k_{0x}, k_{0y})$ 和 $\boldsymbol{r} = (x, y)$. 假如在测量直线(或平面)上测得散射场 $u^s(\boldsymbol{r})$或 $w(\boldsymbol{r})$，逆问题为：能否从这些测量数据反演出分布函数 $Q(\boldsymbol{r})$呢？为了简单，考虑二维情况，即假定系统与 z 无关，以物体中心一点为坐标原点，建立坐标(x, y)，并作坐标旋转，形成新的坐标系统(η, ξ)，η 轴的方向即为$\boldsymbol{k}_0$ 的方向，x 轴与 ξ 轴的夹角为 φ，显然 φ 与入射波方向角有关系 $\varphi_0 = \varphi + \pi/2$. 二维 Helmholtz 方程的基本解为式(7.4.15)，因此在 Born 近似下，散射波为

$$u^s(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mathrm{i}k_0^2}{4}\iint_G Q(\boldsymbol{r}')u^i(\boldsymbol{r}')H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' \tag{7.4.50}$$

利用 Hankel 函数的 Fourier 展开式

$$H_0^{(1)}(k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi^2}\iint_\infty \frac{\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]}{k_0^2-k^2}\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}$$

代入式(7.4.50)

$$u^s(\boldsymbol{r}) = -\frac{u_0k_0^2}{4\pi^2}\iint_\infty \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}}{k_0^2-k^2}\iint_G Q(\boldsymbol{r}')\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}' + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}]\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'$$

注意到在图 7.4.3 情形下，$\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}' = k_0\eta'$ 以及$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_\xi\xi + k_\eta\eta$，其中$(k_\xi, k_\eta)$是对应

于坐标系统(η,ξ)的波矢量. 于是上式可写成

$$u^s(\boldsymbol{r}) = -\frac{u_0k_0^2}{4\pi^2}\iint_G Q(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'\exp(\mathrm{i}k_0\eta')\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{i}k_\xi(\xi-\xi')]\,\mathrm{d}k_\xi \times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[\mathrm{i}k_\eta(\eta-\eta')]}{(k_0^2-k_\xi^2)-k_\eta^2}\mathrm{d}k_\eta\right] \tag{7.4.51}$$

利用复变函数可求得积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[\mathrm{i}k_\eta(\eta-\eta')]}{(k_0^2-k_\xi^2)-k_\eta^2}\mathrm{d}k_\eta = \pi\mathrm{i}\frac{\exp(\mathrm{i}\gamma\mid\eta-\eta'\mid)}{\gamma}$$

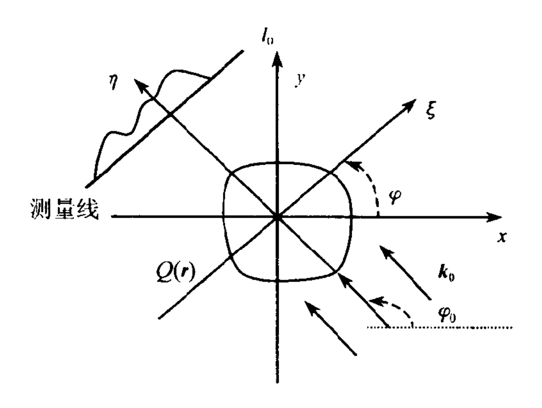


图 7.4.3　入射波为 k_0 方向传播的平面波,在测量线上测得散射场

其中 $\gamma=\sqrt{k_0^2-k_\xi^2}$. 因 $\eta>\eta'$,上式代入式(7.4.51)并在测量线取值

$$u^s(\xi,\eta)\mid_{\eta=l_0} = -\frac{\mathrm{i}u_0k_0^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\gamma l_0)}{\gamma}\iint_G Q(\boldsymbol{r}')\exp[-\mathrm{i}(k_\xi\xi'+(\gamma-k_0)\eta')]\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' \times\exp(\mathrm{i}k_\xi\xi)\mathrm{d}k_\xi$$

上式对 ξ 作 Fourier 变换, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}D_{\varphi_0}(\xi)\exp(-\mathrm{i}k_\xi\xi)\mathrm{d}\xi = \iint_G Q(\boldsymbol{r}')\exp[-\mathrm{i}(k_\xi\xi'+(\gamma-k_0)\eta')]\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' \tag{7.4.52}$$

其中

$$D_{\varphi_0}(\xi)\equiv\frac{2\mathrm{i}\gamma}{u_0k_0^2}\exp(-\mathrm{i}\gamma l_0)u^s(\xi,\eta)\mid_{\eta=l_0}$$

下标 φ_0 表示该函数与入射波的方向有关.

定义单位矢量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}_0$: $\boldsymbol{S}\equiv(k_\xi\boldsymbol{k}_\xi+\gamma\boldsymbol{k}_\eta)/k_0$; $\boldsymbol{S}_0\equiv\boldsymbol{k}_0/k_0$, 于是有

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}=(k_\xi\xi+\gamma\eta)/k_0;\qquad \boldsymbol{S}_0\cdot\boldsymbol{r}=\eta$$

式(7.4.52)可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_{\varphi_0}(\xi)\exp(-\mathrm{i}k_\xi\xi)\mathrm{d}\xi = \iint_G Q(\boldsymbol{r}')\exp[-\mathrm{i}k_0(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}_0)\cdot\boldsymbol{r}']\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' \tag{7.4.53}$$

分别用 $\tilde{\mathrm{D}}_{\varphi_0}(k_\xi)$ 和 $\tilde{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{k})$ 表示上式左右边的 Fourier 变换，则上式可表达成

$$\tilde{D}_{\varphi_0}(k_\xi) = \tilde{Q}[k_0(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}_0)] \tag{7.4.54}$$

上式的意义很明显，它把成像函数 $Q(\boldsymbol{r})$ 的 Fourier 变换与测得的散射场联系起来. 下面分析每一次入射波提供给我们的关于 $Q(\boldsymbol{r})$ 的谱 $\tilde{Q}(\boldsymbol{k})$ 的信息. 在谱平面 (k_ξ,k_η) 上，由式(7.4.54)知，$\boldsymbol{k}$ 的取值限制在半圆上，如图 7.4.4，

$$\boldsymbol{k} = k_0(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}_0) \tag{7.4.55}$$

半圆圆心在 $-k_0\boldsymbol{S}_0$ 处，且半径为 k_0. 由于 $\gamma>0$，当 $\boldsymbol{S}$ 变化时，它在 $\boldsymbol{k}_\eta$ 方向的分量大于零，因此半圆是通过坐标原点的那一部分. 这个半圆称为 **Ewald 半圆**.

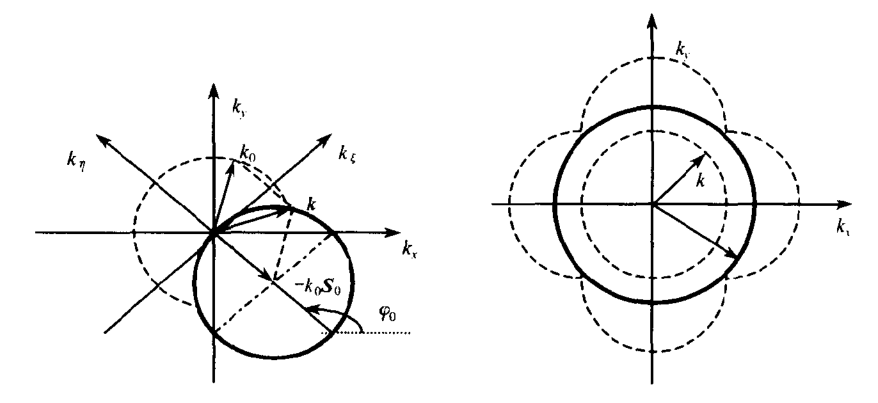


图 7.4.4 Ewald 半圆　　　图 7.4.5 半径为 $\sqrt{2}k_0$ 的圆内 $\tilde{Q}(\boldsymbol{k})$ 已知

由以上讨论可知，对每一个入射波，可求得 $Q(\boldsymbol{r})$ 的谱 $\tilde{Q}(\boldsymbol{k})$ 在半圆上的值. 为了从 $\tilde{Q}(\boldsymbol{k})$ 求 $Q(\boldsymbol{r})$，必须知道整个谱平面 (k_ξ,k_η) 上的 $\tilde{Q}(\boldsymbol{k})$. 为此，变化入射波的方向 $\boldsymbol{k}_0$ 一周(注意：测量线始终垂直于入射波方向)，这时可以求得图 7.4.5 中半径为 $\sqrt{2}k_0$ 的圆内 $\tilde{Q}(\boldsymbol{k})$ 的值. 因此，Born 近似相当于对 $\tilde{Q}(\boldsymbol{k})$ 作低通滤波.

对 Rytov 近似，也可作类似的讨论. 写成统一的公式

$$D_{\varphi_0}(\xi) \equiv \frac{2\gamma}{k_0}\exp[-\mathrm{i}(\gamma-k_0)l_0]\,\Gamma_{\varphi_0}(\xi) \tag{7.4.56}$$

其中

$$\Gamma_{\varphi_0}(\xi) \equiv \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{k_0u_0}\exp(-\mathrm{i}k_0l_0)u^s(\xi,\eta)\big|_{\eta=l_0}, & \text{Born 近似} \\ \dfrac{\mathrm{i}}{k_0u_0}w^{\mathrm{R}}(\xi,\eta)\big|_{\eta=l_0}, & \text{Rytov 近似}. \end{cases}$$

下面介绍所谓滤波反传播方法从 $\widetilde{Q}(\boldsymbol{k})$ 求 $Q(\boldsymbol{r})$. 记由 Born 或 Rytov 近似求得的分布为 $Q_{lp}(\boldsymbol{r})$，其中下标"lp"表示低通滤波

$$Q_{lp}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\infty}\widetilde{Q}_{lp}(\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^2\boldsymbol{k} \tag{7.4.57}$$

其中

$$\widetilde{Q}_{lp}(\boldsymbol{k}) = \begin{cases}\widetilde{Q}(\boldsymbol{k}), & |\boldsymbol{k}|\leqslant\sqrt{2}k_0\\ 0, & |\boldsymbol{k}|>\sqrt{2}k_0\end{cases}$$

图 7.4.5 中半圆上各点坐标(k_x,k_y)与参数(k_ξ,φ_0)的关系为

$$\begin{aligned}k_x &= k_\xi\cos\varphi - k_\eta\sin\varphi\\ k_y &= k_\xi\sin\varphi + k_\eta\cos\varphi\end{aligned} \tag{7.4.58}$$

其中 $k_\eta=\sqrt{k_0^2-k_\xi^2}-k_0$；$\varphi_0=\varphi+\pi/2$. 对式(7.4.57)作积分变换，新的独立变量为(k_ξ,φ_0)($|k_\xi|<k_0$,$|\varphi_0|<\pi$)，变换式(7.4.58)的 Jacobi 行列式为

$$\left|\frac{\partial(k_x,k_y)}{\partial(k_\xi,\varphi_0)}\right| = \frac{|k_0k_\xi|}{\sqrt{k_0^2-k_\xi^2}}$$

另一方面，容易求得

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_xx + k_yy = k_\xi\xi + k_\eta\eta = k_\xi\xi + (\gamma - k_0)\eta$$

上二式代入式(7.4.57)并利用式(7.4.54)得到

$$Q_{lp}(x,y) = \frac{k_0}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi_0\int_{-k_0}^{k_0}\frac{\mathrm{d}k_\xi}{\gamma}|k_\xi|\widetilde{D}_{\varphi_0}(k_\xi)\exp\{\mathrm{i}[k_\xi\xi+(\gamma-k_0)\eta]\}$$

其中 $\xi=x\sin\varphi_0-y\cos\varphi_0$；$\eta=x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0$. 利用 $\Gamma_{\varphi_0}(\xi)$表示，上式即为

$$Q_{lp}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi_0\int_{-k_0}^{k_0}\mathrm{d}k_\xi|k_\xi|\widetilde{\Gamma}_{\varphi_0}(k_\xi)\exp\{\mathrm{i}[k_\xi\xi+(\gamma-k_0)(\eta-l_0)]\} \tag{7.4.59}$$

其中

$$\widetilde{\Gamma}_{\varphi_0}(k_\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\Gamma_{\varphi_0}(\xi)\exp(-\mathrm{i}k_\xi\xi)$$

是 $\Gamma_{\varphi_0(\xi)}$ 的 Fourier 变换，可由测量数据求得. 进一步记

$$\Pi_{\varphi_0}(\xi,\eta) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{\varphi_0}(k_\xi)H(k_\xi)G_\eta(k_\xi)\exp(\mathrm{i}k_\xi\xi)\mathrm{d}k_\xi \tag{7.4.60}$$

以及滤波函数

$$H(k_\xi) \equiv \begin{cases}|k_\xi|, & |k_\xi|\leqslant k_0\\ 0, & |k_\xi|>k_0\end{cases}$$

$$G_\eta(k_\xi) \equiv \begin{cases}\exp[\mathrm{i}(\gamma-k_0)(\eta-l_0)], & |k_\xi|\leqslant k_0\\ 0, & |k_\xi|>k_0\end{cases}$$

于是,式(7.4.59)可写成反传播形式

$$Q_{lp}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Pi\varphi_0(x\sin\varphi_0-y\cos\varphi_0,x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0)\mathrm{d}\varphi_0 \tag{7.4.61}$$

由上式可见,$Q_{lp}(x,y)$ 由滤波和反传播算子作用于 $\Gamma_{\varphi_0}(\xi)$而得到. 具体计算过程总结为:

1. 根据不同方向 φ_0 的入射波测量得到的散射场, 计算 $\Gamma_{\varphi_0}(\xi)$和它的 Fourier 变换 $\widetilde{\Gamma}_{\varphi_0}(k_\xi)$;

2. 不同的 η 值确定不同的滤波函数 $N_\eta(k_\xi)\equiv H(k_\xi)G_\eta(k_\xi)$, 与 $\Gamma_{\varphi_0}(k_\xi)$相乘后求 Fourier 逆变换;

3. 反传播, 把不同角度 φ_0 得到的(x,y)点的函数值相加作为 $Q_{lp}(x,y)$ 的值.

无论是 Kirchhoff 近似还是 Born 近似或 Rytov 近似, 由于这些近似方法本身的限制或入射波方向的限制, 我们只能知道像函数 $Q(\boldsymbol{r})$在 $\boldsymbol{k}$ 空间的部分谱分布, 为了重建真正的像函数, 必须求解类似于式(7.4.29)的第一类积分方程, 这是十分困难的. 下面介绍一种谱估计的迭代方法, 即 Gerchberg-Papoulis 方法(GP 法), 来外推未知区域的谱分布. GP 法谱外推的原理是基于解析函数的重要定理: 区域 D 中的解析函数由 D 中任一子区域D'上的值, 或者 D 中任一弧上的值惟一决定. GP 法结合谱的解析性质及成像区域的先验知识, 利用迭代法从不完整的谱求出整个空间谱的分布情况. 具体步骤如下:

1. 假定已知被成像区域的边界(先验知识), 用 K 表示测得的谱区域, 取整个谱分布的零级近似为

$$\widetilde{Q}_0(\boldsymbol{k})=\begin{cases}\widetilde{Q}(\boldsymbol{k}), & \text{当 } \boldsymbol{k}\in K\\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{k}\notin K\end{cases}$$

对此作逆 Fourier 变换, 求得成像函数的零级近似

$$Q_0(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi^2}\iint_\infty \widetilde{Q}_0(\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}; \tag{7.4.62}$$

2. 设成像区为 Ω, 用支撑函数

$$P(\boldsymbol{r})=\begin{cases}1, & \text{当 } \boldsymbol{r}\in\Omega\\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{r}\notin\Omega\end{cases}$$

乘以 $Q_0(\boldsymbol{r})$得到 $O_0(\boldsymbol{r})$

$$O_0(\boldsymbol{r})\equiv Q_0(\boldsymbol{r})P(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.63}$$

对 $O_0(\boldsymbol{r})$求 Fourier 变换, 给出的谱记为 $\widetilde{O}_0(\boldsymbol{k})$, 令

$$\widetilde{Q}_1(\boldsymbol{k})=\begin{cases}\widetilde{Q}(\boldsymbol{k}), & \text{当 } \boldsymbol{k}\in K\\ \widetilde{O}_0(\boldsymbol{k}), & \text{当 } \boldsymbol{k}\notin K\end{cases}$$

对 $\widetilde{Q}_1(\boldsymbol{k})$作逆 Fourier 变换，得到一级近似像函数

$$Q_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\infty} \widetilde{Q}_1(\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}; \tag{7.4.64}$$

3. 重复第二步，对第 n 次迭代，用 $P(\boldsymbol{r})$乘$(n-1)$迭代得到的 $Q_{n-1}(\boldsymbol{r})$

$$O_{n-1}(\boldsymbol{r}) \equiv Q_{n-1}(\boldsymbol{r})P(\boldsymbol{r}) \tag{7.4.65}$$

求 $O_{n-1}(\boldsymbol{r})$的 Fourier 变换给出谱的第$(n-1)$次近似 $\widetilde{O}_{n-1}(\boldsymbol{k})$，令

$$\widetilde{Q}_n(\boldsymbol{k}) = \begin{cases} \widetilde{Q}(\boldsymbol{k}), & \text{当 } \boldsymbol{k} \in K \\ \widetilde{O}_{n-1}(\boldsymbol{k}), & \text{当 } \boldsymbol{k} \notin K \end{cases}$$

得到第 n 次迭代的像函数

$$Q_n(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\infty} \widetilde{Q}_n(\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^2\boldsymbol{k} \tag{7.4.66}$$

迭代停止的判据可用平方误差来决定

$$\iint_{\Omega} |Q_n(\boldsymbol{r}) - Q_{n-1}(\boldsymbol{r})|^2\mathrm{d}^2\boldsymbol{r} < \varepsilon$$

其中 ε 是给定的小正数.

GP 法进行谱外推的分辨率与已知频谱的精度关系很大，但对噪声不敏感.当用 Fourier 变换求像函数时，存在的问题之一是，要同时处理空间局域和频谱有限的函数对.我们知道空间局域函数的谱总是无限的.如果对谱作切断近似,必然破坏其解析函数的性质.但是，如果谱能量主要分布在低频区域,则这种切断近似还是有效的.余下的重要问题是:迭代是否收敛? 在什么条件下收敛? 收敛的解是否是真正的解? 下面简单讨论之.

由式(7.4.66)得

$$Q_n(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{K} \widetilde{Q}(\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^2\boldsymbol{k} + \frac{1}{4\pi^2}\iint_{K_{外}} \widetilde{O}_{n-1}(\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^2\boldsymbol{k} \tag{7.4.67}$$

式中 $K_{外}$ 表示谱的不完整部分. 上式右边第一项即为零级近似，而第二项利用式(7.4.65),得到

$$\begin{aligned} Q_n(\boldsymbol{r}) &= Q_0(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{4\pi^2}\iint_{K_{外}} \left[\iint_{\Omega} Q_{n-1}(\boldsymbol{r}')\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'\right]\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^2\boldsymbol{k} \\ &= Q_0(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\Omega} Q_{n-1}(\boldsymbol{r}')\left[\iint_{K_{外}} \exp[-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})]\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' \end{aligned}$$

当 $n\to\infty$，上式化成第二类 Fredholm 积分方程

$$Q(\boldsymbol{r}) = Q_0(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\Omega} Q(\boldsymbol{r}')K(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' \tag{7.4.68}$$

其中积分核定义为

$$K(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \iint_{K_{外}} \exp[-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})]\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}$$

因此，积分核及区域 Ω 的性质决定解的惟一性和迭代过程的收敛性. 由积分方程的理论知，当积分核满足

$$\iint_{\Omega} |K(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|^2 \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' < 1$$

时迭代过程收敛，且收敛到真正的解 $Q(\boldsymbol{r})$. 由于积分核与谱的不完整区域有关，因此 GP 法的收敛性与谱的不完整区域大小密切相关.

习 题 七

7.1 在地球物理勘探中，经常遇到位势逆问题

$$\nabla^2 u = \rho(x,y,z)$$
$$u|_{z=0} = v(x,y)$$

即已知地表面位势的测量数据，求地球内部的质量分布. 证明上述逆问题可化为第一类 Fredholm 积分方程. 设 $\rho(x,y,z)$是局域的

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases}\rho_1(x,y,z), & (x,y,z)\in G\\ 0, & (x,y,z)\notin G.\end{cases}$$

7.2 在重力测量中，通常测量的数据是垂直方向的重力加速度分量

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = g(x,y)$$

证明上题的逆问题可化为第一类 Fredholm 积分方程

7.3 考虑地热逆问题

$$u_t = a\nabla^2 u + f(\boldsymbol{r})$$
$$u(\boldsymbol{r},t)|_{t=0} = u(\boldsymbol{r},0)$$

其中 $u(\boldsymbol{r},t)$为地下温度场分布，a 为岩石热扩散系数，$f(\boldsymbol{r})$为地热源强度，$u(\boldsymbol{r},0)$为初始温度分布.

(a) 假定已知地球的初始温度分布和岩石热扩散系数，测量数据为地表面温度变化 $u(x,y,z,t)|_{z=0} = u(x,y,0,t)$，从测量数据反演热源强度，证明 $f(\boldsymbol{r})$的反演可化为第二类 Fredholm 积分方程；

(b) 假定已知岩石热扩散系数，测量数据为地表面温度变化 $u(x,y,z,t)|_{z=0} = u(x,y,0,t)$，从测量数据反演地球初始温度分布. 假定热源强度为零. 证明这一逆问题可化为第一类 Fredholm 积分方程.

7.4 积分方程

$$\int_{-6}^{6} k(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = g(x)$$

其中

$$k(x)=1+\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right),\qquad |x|\leqslant 6;$$

$$g(x)=(6+x)\left[1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right]-\frac{9}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right),\qquad |x|\leqslant 6$$

(a) 求上述方程的严格解；

(b) 用积分离散化方法求数值解，并且分析离散精度对解的影响.

7.5 二维电导率成像

$$\nabla\cdot(\sigma\nabla u)=0,\qquad \boldsymbol{r}\in G$$

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial G}=J_0(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}\in\partial G$$

从表面测量电流密度 $J_0(\boldsymbol{r})$，反演电导率 $\sigma(\boldsymbol{r})$分布，导出 PST 迭代关系.

7.6 考虑本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=\lambda u,\qquad x\in(-1,1)$$

$$u(-1)=u(1)=0$$

设

$$p(x)=\begin{cases}p_1, & x<0\\ p_2, & x>0\end{cases}$$

其中 p_1 和 p_2 是常数. 又设 $v(x,\lambda)$是下列 Cauchy 问题的解

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)=\lambda v$$

$$v(-1,\lambda)=0;\qquad v'(-1,\lambda)=1$$

证明本征值 λ 是方程 $v(1,\lambda)=0$ 的根，其中

$$v(1,\lambda)=\sqrt{\frac{p_1}{\lambda}}\left(\sin\sqrt{\frac{\lambda}{p_1}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{p_2}}+\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{p_1}}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{p_2}}\right).$$

7.7 考虑本征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+q(x)u(x)=\lambda u(x),\qquad x\in(0,l)$$

$$u(0)=0;\qquad u'(l)=0$$

设(λ_n,u_n)和(μ_n,v_n)分别是 $q(x)=p_1(x)$和 $q(x)=p_2(x)$的本征值和相应的本征函数，如果 $\lambda_n=\mu_n,(n=1,2,\cdots)$ 并且

$$\frac{u_n(l)}{u'_n(0)}=\frac{v_n(l)}{v'_n(0)},\qquad (n=1,2,\cdots)$$

证明惟一性：$p_1(x)=p_2(x)$.

第八章　非线性数学物理方程

在 6.2 节中,我们利用微扰法求得了非线性 Klein-Gordon 方程的微扰解. 如果参数 ε 不是小量,非线性 Klein-Gordon 方程的解有什么性质? 由于非线性项的存在,偏微分方程能否产生新的解? 另一方面,线性方程一般是非线性方程通过线性化而来的,如声波方程,假定流体质点偏离平衡位置的振动是无限小量,对流体力学方程进行线性化处理,从而得到线性化的波动方程. 自 20 世纪 60 年代以来,非线性方程在物理、化学、生物等各个学科中不断出现,其研究内容日趋丰富. 与线性方程的定解问题一样,非线性方程同样存在定解问题的适定性,但后者要复杂得多. 而且非线性方程有许多自身的特点,因此本章重点放在几个物理中典型的非线性方程求解和求解方法上. 8.1 节介绍若干典型非线性方程及其行波解;8.2 节介绍 Hopf-Cole 和 Hirota 方法求非线性方程的解;8.3 节介绍求解时间演化方程初值问题的逆散射方法;最后,8.4 节介绍一种重要的变换,即 Bäcklund 变换.

8.1　典型非线性方程及其行波解

在无限空间,线性或非线性偏微分方程

$$\mathbf{P}u = 0 \tag{8.1.1}$$

其中 $\mathbf{P}$ 为包括时间 t 和空间 x 偏导数的微分算子,形如 $u(x,t)=F(x-ct)$ 的解,称为上式的**行波解**,其中 c 为常数. 对线性偏微分方程,如波动方程(1.1.7),$F(\xi)(\xi=x-t,c=1)$ 为满足一定条件的任意函数. 但对非线性偏微分方程,由于迭加原理已不成立,$F(\xi)$ 只能取特定的形式才有可能满足上式. 事实上,满足式(8.1.1)的特定形式 $F(\xi)$ 是方程的非线性本征模式. 从行波解可以分析非线性偏微分方程解的重要性质. 我们特别感兴趣的是非线性偏微分方程的所谓“孤立波”形式的解.

8.1.1　Burgers 方程及冲击波

Burgers 方程是非线性的耗散方程,一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{8.1.2}$$

其中 $\alpha>0$ 为常数. 设上式的行波解有形式

$$u = u(\xi);\qquad \xi = x - ct \tag{8.1.3}$$

代入式(8.1.2)有

$$\alpha \frac{d^2 u}{d\xi^2} + c\frac{du}{d\xi} - u\frac{du}{d\xi} = 0 \qquad (8.1.4)$$

对 ξ 积分一次得到

$$\alpha \frac{du}{d\xi} + cu - \frac{1}{2}u^2 = \frac{a}{2} \qquad (8.1.5)$$

其中 a 为积分常数. 上式改写成

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{2\alpha}(u^2 - 2cu + a) \qquad (8.1.6)$$

设方程右边有二个实根

$$u_1 = c + \sqrt{c^2 - a}; \qquad u_2 = c - \sqrt{c^2 - a} \qquad (8.1.7)$$

由于 c 和 a 都是待定常数,取 $c^2 - a > 0$,于是式(8.1.6)为

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{2\alpha}(u - u_1)(u - u_2) \qquad (8.1.8)$$

上式积分可得到

$$u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{1}{2}(u_1 - u_2)\tanh\frac{u_1 - u_2}{4\alpha}(\xi - \xi_0) \qquad (8.1.9)$$

其中 ξ_0 为积分常数. 因此,我们得到了 Burgers 方程(8.1.2)的行波解式(8.1.9),波的振幅和波速为

$$A \equiv \frac{1}{2}(u_1 - u_2); \qquad c = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \qquad (8.1.10)$$

显然有下列关系

$$\left.\frac{du}{d\xi}\right|_{u=u_1} = \left.\frac{du}{d\xi}\right|_{u=u_2} = 0$$

$$u\,|_{\xi=\xi_0} = c; \qquad u\,|_{\xi\to-\infty} = u_1; \qquad u\,|_{\xi\to\infty} = u_2$$

因此式(8.1.9)的图像如图 8.1.1,称为 Burgers 方程的**冲击波解**.

下面分析平衡点 $u = u_1$ 和 $u = u_2$ 的稳定性. 为此把二阶方程(8.1.4)写成一阶方程组

$$\frac{d}{d\xi}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\alpha}(u - c) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad (8.1.11)$$

在平衡点 $u = u_1$,上述方程的系数矩阵的特征值 λ 满足

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{\alpha}(u_1 - c) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.1.12)$$

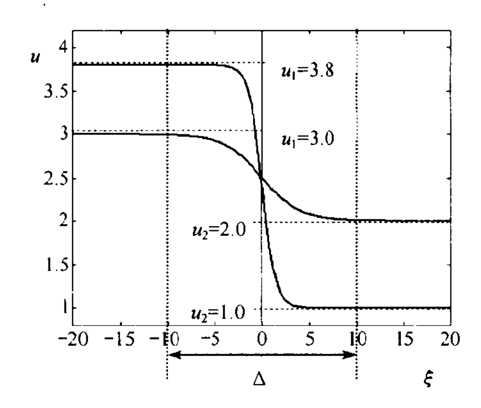


图 8.1.1　Burgers 方程的行波解, $\alpha=1$

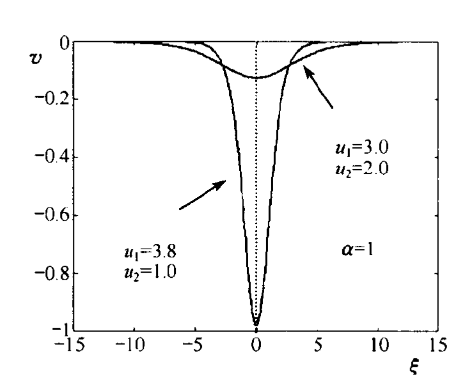


图 8.1.2　Burgers 方程的"孤立波"解

容易求得二个特征值为

$$\lambda_1^{(1)}=0;\qquad \lambda_2^{(1)}=\frac{1}{\alpha}(u_1-c)=\frac{\sqrt{c^2-a}}{\alpha}>0$$

因此 $u=u_1$ 是不稳定平衡点. 对平衡点 $u=u_2$, 可求得

$$\lambda_1^{(2)}=0;\qquad \lambda_2^{(2)}=\frac{1}{\alpha}(u_2-c)=-\frac{\sqrt{c^2-a}}{\alpha}<0$$

可见为稳定的平衡点. 从不稳定平衡点 $u=u_1$ 向稳定平衡点 $u=u_2$ 的过渡速度由宽度 Δ 描述(如图 8.1.1), 决定于 $(u_2-u_1)/\alpha$. 式(8.1.9)对 ξ 微分可得到

$$v(\xi)\equiv\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{(u_1-u_2)^2}{8\alpha}\mathrm{sech}^2\left(\frac{u_1-u_2}{4\alpha}\right)(\xi-\xi_0)\qquad(8.1.13)$$

显然, 当 $\xi\to\pm\infty$, $v(\xi)\to 0$. 回到 (x,t) 变量, 上式表示向 x 方向传播的"孤立"波, 如图 8.1.2. 值得指出的是, 从式(8.1.10)可见, "孤立"波传播的速度与振幅有关, 这也是非线性本征模式的典型特性.

8.1.2　KdV 方程及孤立波

KdV 方程首先由 Kortweg 和 de Vries 在 1895 年研究浅水表面波时导出, 20 世纪 60 年代又在等离子物理问题中出现, 因此对其研究比较成熟. KdV 方程的标准形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\qquad(8.1.14)$$

其他形式的 KdV 方程均可通过适当的变换化成以上形式. 下面求上式的行波解, 式(8.1.3)代入得到

$$\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\xi^3}-6u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=0\qquad(8.1.15)$$

积分一次得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} - 3u^2 - cu = a \tag{8.1.16}$$

其中 a 为积分常数. 上式二边乘 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$ 再积分得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = u^3 + \frac{c}{2}u^2 + au + b \tag{8.1.17}$$

其中 b 为积分常数. 因此

$$\xi - \xi_0 = \pm\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2u^3 + cu^2 + 2au + 2b}} \tag{8.1.18}$$

我们寻求无限远处为零并且平滑下降的解,即满足无限远边界条件

$$u(\xi)\mid_{\xi\to\pm\infty} = 0; \qquad \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi\to\pm\infty} = \left.\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}\right|_{\xi\to\pm\infty} = 0 \tag{8.1.19}$$

由式(8.1.16)和式(8.1.17), $a = b = 0$,故

$$\xi - \xi_0 = \pm\int\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{2u + c}} = \frac{2}{\mathrm{i}\sqrt{c}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2u + c}{-c}}\right) \tag{8.1.20}$$

于是得到

$$u(\xi) = -\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - \xi_0)\right] \tag{8.1.21}$$

显然上式与式(8.1.13)有相同的形式,称为 KdV 方程的"孤立波"解.

把 KdV 方程(8.1.14)写成形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{8.1.22}$$

因此 u 为守恒量,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\,\mathrm{d}x = 常数 \tag{8.1.23}$$

上式具有质量守恒的含义. 另一方面,式(8.1.14)二边乘 u 得到

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[-2u^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{8.1.24}$$

因此 u^2 也为守恒量,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{d}x = 常数 \tag{8.1.25}$$

上式具有动量守恒的含义. 而质量和动量守恒是质点力学的基本守恒量,故"孤立波"解式(8.1.21)具有类似粒子的性质,称为"孤子".

如果不使用无限远边界条件式(8.1.19),并且令方程

$$u^3 + \frac{c}{2}u^2 + au + b = 0 \tag{8.1.26}$$

的三个根为 $u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3$,于是

$$\xi - \xi_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}} \tag{8.1.27}$$

上式右边积分可用椭圆余弦函数表示成

$$u = u_2 - (u_2 - u_3)\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{1}{2}(u_1 - u_3)}(\xi - \xi_0), k\right] \tag{8.1.28}$$

其中 k 为椭圆余弦函数的模

$$k = \sqrt{\frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}} \tag{8.1.29}$$

椭圆函数定义为下列积分的反函数

$$z = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{u = \sin\varphi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

其中 $0<k<1$ 称为椭圆函数的模数. 定义椭圆正弦和余弦函数 $\mathrm{sn}(z)$ 和 $\mathrm{cn}(z)$ 为

$$u = \sin\varphi = \mathrm{sn}(z, k) \tag{8.1.30}$$

$$\mathrm{cn}(z, k) = \cos\varphi = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2(z, k)} \tag{8.1.31}$$

以及第三种椭圆函数

$$\mathrm{dn}(z, k) = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2(z, k)} \tag{8.1.32}$$

椭圆余弦函数是周期为 $4K(k)$ 的周期函数,因此式(8.1.28)表示周期为 $2K(k)$ 的行波,其中 $K(k)$ 为积分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

图 8.1.3 表示 KdV 方程的周期解式(8.1.28). 周期解的形状与 k 的大小密切相关,图 8.1.4 表明 $k^2 = 0.999$ 时周期解的形状. 当 k 增加(但小于 1),周期增加. 当严格有 $k = 1$,周期变成无限大,形成"孤立波"解,即当 $u_1 \to u_2$, $k \to 1$, $\mathrm{cn}(z, k) \to \mathrm{sech} z$,于是

$$u = u_2 - (u_2 - u_3)\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{1}{2}(u_1 - u_3)}(\xi - \xi_0)\right] \tag{8.1.33}$$

特别是当 $u_1 \to u_2 \to 0$,此时 $u_3 = -c/2$,"孤立波"解为式(8.1.21). 当 $u_2 \to u_3$, $k \to 0$, $\mathrm{cn}(z, k) \to \cos z$,因此

$$u = u_2 - (u_2 - u_3)\cos^2\left[\sqrt{\frac{1}{2}(u_1 - u_3)}(\xi - \xi_0)\right]. \tag{8.1.34}$$

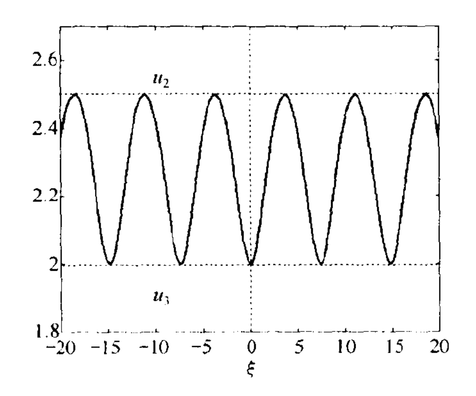


图 8.1.3 KdV 方程的周期解：
$u_1=3.0, u_2=2.5, u_3=2.0$

图 8.1.4 KdV 方程周期解的形状：
$u_1=2.5005, u_2=2.5, u_3=2.0$

8.1.3 非线性Klein-Gordon 方程

非线性 Klein-Gordon 方程的一般形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{d}V(u)}{\mathrm{d}u} = 0 \tag{8.1.35}$$

其中 c_0 为常数，$V(u)$为系统的势能. 取 $V(u)=V_0(1-\cos u)$，$(V_0>0)$，上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V_0 \sin u = 0 \tag{8.1.36}$$

称为 Sine-Gordon 方程，在非线性光学中有重要的应用. 另两种重要的非线性 Klein-Gordon方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \beta u^2 = 0 \tag{8.1.37}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \beta u^3 = 0 \tag{8.1.38}$$

我们已在 6.2 节用微扰法讨论过上式的解。

首先求式(8.1.36)的行波解，以式(8.1.3)形式的行波解代入式(8.1.36)可以得到

$$(c^2 - c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} + V_0 \sin u = 0 \tag{8.1.39}$$

分二种情况讨论：

(1) $c^2>c_0^2$，把式(8.1.39)写成

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \gamma^2 \sin u = 0 \tag{8.1.40}$$

其中 $\gamma^2 = V_0/(c^2 - c_0^2) > 0$，令 $v = du/d\xi$，上式可化成一阶方程组

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\xi} = v \\ \dfrac{dv}{d\xi} = -\gamma^2 \sin u \end{cases} \tag{8.1.41}$$

即有 $v dv = -\gamma^2 \sin u du$，于是

$$\frac{1}{2} v^2 + \gamma^2 (1 - \cos u) = h \tag{8.1.42}$$

其中 h 为积分常数，上式即为

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 + 4\gamma^2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) = 2h \tag{8.1.43}$$

因此

$$\xi - \xi_0 = \pm \frac{1}{2\gamma} \int \frac{du}{\sqrt{k^2 - \sin^2(u/2)}} \tag{8.1.44}$$

其中 $k = \sqrt{h/(2\gamma^2)} < 1$，上式右边积分可用椭圆正弦函数表示

$$\sin\left(\frac{u}{2}\right) = \pm k \operatorname{sn}[\gamma(\xi - \xi_0), k] \tag{8.1.45}$$

显然，上式代表一个周期解，如图 8.1.5，图中“+”和“-”表示上式中分别取正号和负号．当 $k \to 0$，上式变成

$$\sin\left(\frac{u}{2}\right) = \pm k \sin[\gamma(\xi - \xi_0)] \tag{8.1.46}$$

为线性波．考虑特殊情况：$k = 1$，利用积分

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2(u/2)}} = \ln\left[\frac{1 + \sin(u/2)}{1 - \sin(u/2)}\right]$$

由式(8.1.44)得到

$$\left[\frac{1 + \sin(u/2)}{1 - \sin(u/2)}\right] = \exp[\pm 2\gamma(\xi - \xi_0)] \tag{8.1.47}$$

利用三角关系

$$\sqrt{\frac{1 + \sin(u/2)}{1 - \sin(u/2)}} = \tan\left(\frac{u}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{8.1.48}$$

因此

$$u = -\pi + 4\arctan\{\exp[\pm \gamma(\xi - \xi_0)]\} \tag{8.1.49}$$

称为 Sine-Gordon 的广义“孤立波”解．当分别取“+”和“-”时，如图 8.1.6，前者称为正扭结波(kink wave)，后者称为反扭结波(anti-kink wave)．

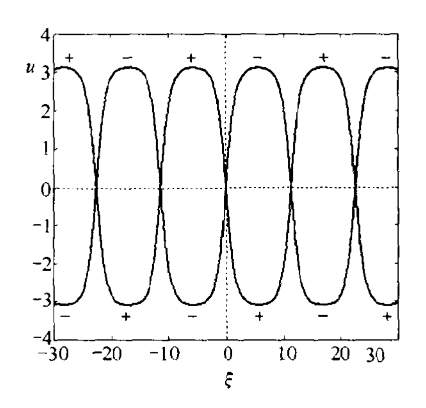


图 8.1.5　Sine-Gordon 方程的周期解：$k=0.9998$，$\gamma=1$

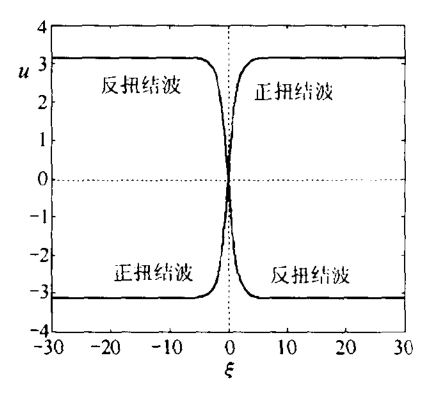


图 8.1.6　Sine-Gordon 方程的孤立波解：$k=1$，$\gamma=1$

（2）$c^2<c_0^2$，式(8.1.43)为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=2h+4\delta^2\sin^2\frac{u}{2} \tag{8.1.50}$$

其中 $\delta^2=V_0/(c_0^2-c^2)>0$，于是

$$\xi-\xi_0=\pm\frac{1}{2\delta}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\dfrac{h}{2\delta^2}+\sin^2(u/2)}}=\pm\frac{1}{2\delta}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k'^2-\cos^2(u/2)}} \tag{8.1.51}$$

其中 $k'=1+h/(2\delta^2)$，上式的周期解为

$$\cos\left(\frac{u}{2}\right)=\pm k'\mathrm{sn}[\delta(\xi-\xi_0),k'] \tag{8.1.52}$$

当 $k'\to 0$，上式变成

$$\cos\left(\frac{u}{2}\right)=\pm k'\sin[\delta(\xi-\xi_0)],\quad(0<u<2\pi) \tag{8.1.53}$$

同样，考虑特殊情况：$k'=1$，利用积分

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\cos^2(u/2)}}=-\ln\left[\frac{1+\cos(u/2)}{1-\cos(u/2)}\right] \tag{8.1.54}$$

由式(8.1.51)得到

$$\left[\frac{1+\cos(u/2)}{1-\cos(u/2)}\right]=\exp[\pm 2\delta(\xi-\xi_0)] \tag{8.1.55}$$

利用三角关系

$$\sqrt{\frac{1+\cos(u/2)}{1-\cos(u/2)}}=\tan\left(\frac{u}{4}\right) \tag{8.1.56}$$

因此

$$u = 4\arctan\{\exp[\pm\delta(\xi - \xi_0)]\} \tag{8.1.57}$$

式(8.1.49)和(8.1.57)即是 Sine-Gordon 方程的"孤立波"解，它们是行波，在空间以速度 c 传播. Sine-Gordon 方程还存在另一种"驻波"形式的"孤立波"解. 不失一般性，把式(8.1.36)写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u \tag{8.1.58}$$

事实上，只要对式(8.1.36)作变换

$$t' = \sqrt{V_0}\,t;\qquad x' = (\sqrt{V_0}/c_0)x \tag{8.1.59}$$

即可把式(8.1.36)化成(8.1.58). 受式(8.1.49)和(8.1.57)的启发，我们来寻找式(8.1.58)如下形式的"驻波"解

$$u = 4\arctan\left[\frac{w(x)}{v(t)}\right] \tag{8.1.60}$$

即 $\tan(u/4) = w(x)/v(t)$，利用三角函数关系

$$\sin u = \frac{4\tan(u/4)[1 - \tan^2(u/4)]}{[1 + \tan^2(u/4)]^2} \tag{8.1.61}$$

式(8.1.60)代入式(8.1.58)得到

$$(w^2 + v^2)\left(\frac{w''}{w} + \frac{v''}{v}\right) - 2[(w')^2 + (v')^2] = v^2 - w^2 \tag{8.1.62}$$

为了得到分离变量的形式，上式对 x 和 t 分别微分，得到

$$(w^2 + v^2)\left(\frac{w''}{w}\right)' + 2ww'\left(\frac{w''}{w} + \frac{v''}{v}\right) - 4w'w'' = -2ww' \tag{8.1.63}$$

和

$$(w^2 + v^2)\left(\frac{v''}{v}\right)' + 2vv'\left(\frac{w''}{w} + \frac{v''}{v}\right) - 4v'v'' = 2vv' \tag{8.1.64}$$

上二式分别除以 ww' 和 vv' 得到

$$\frac{(w^2 + v^2)}{ww'}\left(\frac{w''}{w}\right)' + 2\left(-\frac{w''}{w} + \frac{v''}{v}\right) = -2 \tag{8.1.65}$$

和

$$\frac{(w^2 + v^2)}{vv'}\left(\frac{v''}{v}\right)' + 2\left(\frac{w''}{w} - \frac{v''}{v}\right) = 2 \tag{8.1.66}$$

式(8.1.65)加(8.1.66)并且除以$(w^2 + v^2)$，得到

$$\frac{1}{ww'}\left(\frac{w''}{w}\right)' = -\frac{1}{vv'}\left(\frac{v''}{v}\right)' \tag{8.1.67}$$

上式左边是 x 的函数，而右边是 t 的函数，恒等条件是等于常数(令为 4α)故有

$$\left(\frac{w''}{w}\right)' = 4\alpha ww';\qquad \left(\frac{v''}{v}\right)' = -4\alpha vv' \tag{8.1.68}$$

积分一次得到

$$\frac{w''}{w}=2\alpha w^2+\beta_1;\qquad \frac{v''}{v}=-2\alpha v^2+\beta_2 \tag{8.1.69}$$

其中 β_1 和 β_2 是积分常数. 上二式两边分别乘 ww'和 vv'并进一步积分,得到

$$(w')^2=\alpha w^4+\beta_1 w^2+\gamma_1$$

$$(v')^2=-\alpha v^4+\beta_2 v^2+\gamma_2 \tag{8.1.70}$$

其中 γ_1 和 γ_2 是积分常数. 四个常数 β_1、β_2、γ_1 和 γ_2 并非完全独立,对式(8.1.62)的二次微分引进了二个常数,因此四个积分常数中,只有二个是独立的. 式(8.1.69)和(8.1.70)代入式(8.1.62)得

$$[1-(\beta_1-\beta_2)](w^2-v^2)=2(\gamma_1+\gamma_2) \tag{8.1.71}$$

由于 w 和 v 分别是 x 和 t 的函数,上式恒成立的条件是

$$\beta_1-\beta_2=1;\qquad \gamma_1+\gamma_2=0$$

取 $\beta_2=-\beta$ 和 $\gamma_1=\gamma$,于是 $\beta_1=1-\beta$ 和 $\gamma_2=-\gamma$,式(8.1.70)变成

$$w'=\sqrt{\alpha w^4+(1-\beta)w^2+\gamma}$$

$$v'=\sqrt{-\alpha v^4-\beta v^2-\gamma} \tag{8.1.72}$$

即

$$x-x_0=\pm\int\frac{1}{\sqrt{\alpha w^4+(1-\beta)w^2+\gamma}}\mathrm{d}w$$

$$t-t_0=\pm\int\frac{1}{\sqrt{-\alpha v^4-\beta v^2-\gamma}}\mathrm{d}v \tag{8.1.73}$$

因此,w 和 v 可用椭圆函数表示. 考虑比较简单的情况:$\gamma=0$ 和 $\alpha=-1$. 进一步假定 $0<\beta<1$,此时

$$x-x_0=\pm\int\frac{1}{w\sqrt{(1-\beta)-w^2}}\mathrm{d}w=\mp\frac{1}{\sqrt{1-\beta}}\mathrm{sech}^{-1}\frac{w}{1-\beta}$$

即有

$$w(x)=\sqrt{1-\beta}\,\mathrm{sech}\left[\sqrt{1-\beta}(x-x_0)\right] \tag{8.1.74}$$

对时间部分,直接从式(8.1.70)可推得

$$[(1/v)']^2=1-\beta(1/v)^2 \tag{8.1.75}$$

于是

$$\pm(t-t_0)=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arcsin\frac{\sqrt{\beta}}{v} \tag{8.1.76}$$

即有

$$\frac{1}{v(t)}=\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sin\left[\sqrt{\beta}(t-t_0)\right] \tag{8.1.77}$$

式(8.1.74)和(8.1.77)代入式(8.1.60)得到 Sine-Gordon 方程的一个“驻波”解

$$u(x,t) = 4\arctan\left[\pm\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}\frac{\sin\sqrt{\beta V_0}t}{\cosh[\sqrt{(1-\beta)V_0}x/c_0]}\right] \tag{8.1.78}$$

显然上式表示一个周期为 $2\pi/\sqrt{\beta V_0}$ 的周期解，在 x 轴的上下振荡，像在不断地呼吸，同时看起来像“孤子”和“反孤子”的一对振荡，因此把 Sine-Gordon 方程的这种解称为“呼吸孤子”解，简称为“呼吸子”.

对非线性 Klein-Gordon 方程(8.1.37)和(8.1.38)，可求出它们的行波解以及“孤波”解，解的性质与系数 α 和 β，以及行波速度 c 有关. 式(8.1.37)解的情况为：

(1) $c^2>c_0^2$ 且($\alpha<0,\beta<0$)，或 $c^2<c_0^2$ 且($\alpha>0,\beta>0$)

$$u(\xi) = \begin{cases} \dfrac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{sech}^2\chi(\xi-\xi_0), & (0\leqslant u\leqslant 3\alpha/\beta) \\ -\dfrac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{csch}^2\chi(\xi-\xi_0), & (u\leqslant 0) \end{cases} \tag{8.1.79}$$

(2) $c^2>c_0^2$ 且($\alpha<0,\beta>0$)，或 $c^2<c_0^2$ 且($\alpha>0,\beta<0$)

$$u(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{sech}^2\chi(\xi-\xi_0), & (0\leqslant u\leqslant -3\alpha/\beta) \\ \dfrac{3\alpha}{2\beta}\operatorname{csch}^2\chi(\xi-\xi_0), & (u\leqslant 0) \end{cases} \tag{8.1.80}$$

其中 $\chi\equiv\sqrt{|\alpha/(c^2-c_0^2)}/2$. 式 (8.1.79)和(8.1.80)即是式(8.1.37)的“孤波”解.

同样，式(8.1.38)解的情况为：

(1) $c^2>c_0^2$ 且($\alpha>0,\beta>0$)，或 $c^2<c_0^2$ 且($\alpha<0,\beta<0$)

$$u(\xi) = \pm k\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta(1+k^2)}}\operatorname{sn}[\sigma_1(k)(\xi-\xi_0),k] \tag{8.1.81}$$

其中

$$\sigma_1(k) = \sqrt{\frac{\alpha}{(1+k^2)(c^2-c_0^2)}}$$

而模数 k 由下式决定

$$1+k^2 = \frac{\alpha}{c^2-c_0^2} \tag{8.1.82}$$

当 $k\to1$，式(8.1.81)变成“冲击波”解

$$u(\xi) = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\tanh[\sigma_1(1)(\xi-\xi_0)] \tag{8.1.83}$$

(2) $c^2>c_0^2$ 且($\alpha<0,\beta<0$)，或 $c^2<c_0^2$ 且($\alpha>0,\beta>0$)

$$u(\xi) = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta(2-k^2)}}\operatorname{dn}[\sigma_2(k)(\xi-\xi_0),k] \tag{8.1.84}$$

其中

$$\sigma_2(k) = \sqrt{\frac{-\alpha}{(2-k^2)(c^2-c_0^2)}}$$

模数 k 由下式决定

$$2-k^2 = -\frac{\alpha}{c^2-c_0^2} \tag{8.1.85}$$

当 $k\to1$,式(8.1.84)变成"孤波"解

$$u(\xi) = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\operatorname{sech}[\sigma_2(1)(\xi-\xi_0)] \tag{8.1.86}$$

(3) $c^2>c_0^2$ 且($\alpha<0,\beta>0$),或 $c^2<c_0^2$ 且($\alpha>0,\beta<0$)

$$u(\xi) = \pm\sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta(2-k^2)}}\frac{\operatorname{cn}[\sigma_3(k)(\xi-\xi_0),k]}{\operatorname{sn}[\sigma_3(k)(\xi-\xi_0),k]} \tag{8.1.87}$$

其中

$$\sigma_3(k) = \sigma_2(k)$$

模数 k 的方程与式(8.1.85)相同. 当 $k\to1$,式(8.1.87)变成"孤波"解

$$u(\xi) = \pm\sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}\operatorname{csch}[\sigma_3(1)(\xi-\xi_0)]. \tag{8.1.88}$$

8.1.4 非线性 Schrödinger 方程

非线性 Schrödinger 方程,简称 NLS 方程,是描述非线性波调制(即非线性波包)的方程,其一般形式为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta|u|^2u = 0 \tag{8.1.89}$$

有意思的是 NLS 方程具有单频解

$$u = A\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)] \tag{8.1.90}$$

其中 A、k 和 ω 分别为平面波的振幅、波数和频率,上式代入式(8.1.89)得到 k 与 ω 的关系,即色散关系

$$\omega = \alpha k^2 - \beta|A|^2 \tag{8.1.91}$$

与线性波不同的是,上述色散关系与振幅 A 有关,而群速度(即能量传播速度)与振幅 A 无关

$$c_g \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = 2\alpha k \tag{8.1.92}$$

因 NLS 方程的非线项描述非线性的调制作用,故我们求式(8.1.89)的包络形式解

$$u(x,t) = \varphi(\xi)\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)];\qquad \xi = x-ct \tag{8.1.93}$$

代入式(8.1.89)得到

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}+\mathrm{i}(2\alpha k-c)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}+(\omega-\alpha k^2)\varphi+\beta|\varphi|^2\varphi=0 \qquad (8.1.94)$$

通常 φ 是实函数,故选择 $c=c_g=2\alpha k$,因此

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\xi^2}+(\omega-\alpha k^2)\varphi+\beta\varphi^3=0 \qquad (8.1.95)$$

二边乘 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\xi$ 再对 ξ 积分得到

$$\alpha\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+(\omega-\alpha k^2)\varphi^2+\frac{\beta}{2}\varphi^4=h \qquad (8.1.96)$$

其中 h 是积分常数. 分三种情况讨论上述方程的解:令 $\gamma\equiv-(\omega-\alpha k^2)$

(1) $\gamma/\beta>0$;$\gamma/\alpha<0$,得到周期解

$$\varphi(\xi)=\pm\kappa\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta(1+\kappa^2)}}\mathrm{sn}[\rho_1(\kappa)(\xi-\xi_0),\kappa] \qquad (8.1.97)$$

其中

$$\rho_1(\kappa)=\sqrt{\frac{-\gamma}{\alpha(1+\kappa^2)}}$$

模数 κ 由下式决定

$$1+\kappa^2=-\frac{\gamma}{\alpha} \qquad (8.1.98)$$

当 $\kappa\to1$,式(8.1.97)变成"冲击波"解

$$\varphi(\xi)=\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\tanh[\rho_1(1)(\xi-\xi_0)]. \qquad (8.1.99)$$

(2) $\gamma/\beta>0$;$\gamma/\alpha>0$,得到周期解

$$\varphi(\xi)=\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta(2-\kappa^2)}}\mathrm{dn}[\rho_2(\kappa)(\xi-\xi_0),\kappa] \qquad (8.1.100)$$

其中

$$\rho_2(\kappa)=\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha(2-\kappa^2)}}$$

模数 κ 由下式决定

$$2-\kappa^2=\frac{\gamma}{\alpha} \qquad (8.1.101)$$

当 $\kappa\to1$,式(8.1.100)变成"孤波"解

$$\varphi(\xi)=-\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\mathrm{sech}[\rho_2(1)(\xi-\xi_0)] \qquad (8.1.102)$$

上式可由式(8.1.96)直接令积分常数 $h=0$ 得到

$$\xi-\xi_0=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi\sqrt{(2\gamma/\beta)-\varphi^2}} \qquad (8.1.103)$$

如果 $\gamma/\beta>0$，

$$\xi-\xi_0=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\ln\left[\frac{\sqrt{2\gamma/\beta-\varphi^2}-\sqrt{2\gamma/\beta}}{\varphi}\right] \tag{8.1.104}$$

即有"孤波"解

$$\varphi(\xi)=-\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\operatorname{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi-\xi_0) \tag{8.1.105}$$

即为式(8.1.102).

(3) $\gamma/\beta<0;\gamma/\alpha>0$，得到周期解

$$\varphi(\xi)=\pm\sqrt{\frac{-2\gamma}{\beta(2-\kappa^2)}}\frac{\operatorname{cn}[\rho_3(\kappa)(\xi-\xi_0),\kappa]}{\operatorname{sn}[\rho_3(\kappa)(\xi-\xi_0),\kappa]} \tag{8.1.106}$$

其中

$$\rho_3(\kappa)=\rho_2(\kappa)$$

模数 κ 的决定方程与式(8.1.101)相同. 当 $\kappa\to1$，式(8.1.106)变成"孤波"解

$$u(\xi)=\pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{\beta}}\operatorname{csch}[\rho_3(1)(\xi-\xi_0)] \tag{8.1.107}$$

以式(8.1.105)代入式(8.1.93)

$$u(x,t)=-\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\operatorname{sech}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\xi-\xi_0)\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)] \tag{8.1.108}$$

上式称为 NLS 方程的包络"孤立波"解. 显然包络"孤立波"的振幅为

$$a\equiv\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}} \tag{8.1.109}$$

因此 $\gamma=a^2\beta/2$，由 γ 的定义，可得到包络"孤立波"解的色散关系

$$\omega=\alpha k^2-\gamma=\alpha k^2-\frac{\beta a^2}{2} \tag{8.1.110}$$

而式(8.1.91)是简单的单频波式(8.1.90)的色散关系.

8.2　Hopf-Cole 变换和 Hirota 方法

自变量变换或函数变换是求解偏微分方程的基本方法. 如在 1.1.1 小节中我们利用自变量变换式(1.1.8)把方程(1.1.7)变成了较简单的形式式(1.1.9)，从而得到了包含任意函数的解式(1.1.10). Fourier 积分式(2.5.7)实质上可看作对式(2.5.2)同时作自变量变换($x\to\lambda$)和函数变换($u\to U$). 对线性微分方程，不论是自变量变换，还是函数变换，一般都是线性变换. 但是通过线性变换不可能把非线性偏微分方程简单化. 只有通过非线性变换才能实现. 本节介绍二种特殊的非线性变换方法，即 Hopf-Cole 变换和 Hirota 方法.

8.2.1 Burgers 方程的 Hopf-Cole 变换

为了方便,重写 Burgers 方程如下

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{8.2.1}$$

显然 Burgers 方程是在线性扩散方程的基础上增加了一项非线性项,因此希望通过非线性变换与线性扩散方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{8.2.2}$$

联系起来. 为此,令

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{8.2.3}$$

代入式(8.2.1)并积分一次得到(令积分常数为零)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{8.2.4}$$

因为我们寻求形式 $w \to 0$(当 $x \to \pm\infty$)的解, 故取积分常数为零. 进一步设非线性变换为

$$v = f(w) \tag{8.2.5}$$

为了寻找恰当的非线性函数 $f(w)$, 上式代入式(8.2.2)得到

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\alpha f''}{f'}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{8.2.6}$$

对照式(8.2.4),只要取

$$\alpha\frac{f''}{f'} = -\frac{1}{2} \tag{8.2.7}$$

上式的解为

$$f(w) = a + b\exp\left(-\frac{w}{2\alpha}\right) \tag{8.2.8}$$

其中 a 和 b 为积分常数, 最简单的情况为 $a=0$ 和 $b=1$. 因而得到

$$w = -2\alpha\ln f = -2\alpha\ln v \tag{8.2.9}$$

因此在非线性变换下

$$u = -2\alpha\frac{\partial\ln v}{\partial x} \tag{8.2.10}$$

Burgers 方程(8.2.1)变成线性扩散方程(8.2.2). 上式称为 **Hopf-Cole 变换**. 因此如果知道式(8.2.2)的一个解,通过式(8.2.10)可求 Burgers 方程(8.2.1)的解.

例 8.2.1 已知式(8.2.2)的行波解

$$v(x,t) = 1 + \exp[k(x-ct)]; \quad (k = -c/\alpha) \tag{8.2.11}$$

代入式(8.2.10)得到 Burgers 方程的一个解

$$u(x,t)=-2\alpha\frac{\partial}{\partial x}\ln\{1+\exp[k(x-ct)]\}=c\left(1-\tanh\frac{c}{2\alpha}\xi\right) \tag{8.2.12}$$

显然上式与式(8.1.9)一致，只要取 $u_1-u_2=2c$ 和 $u_1+u_2=2c$ 即 $u_1=2c$ 和 $u_2=0$.

例 8.2.2 已知式(8.2.2)的行波解

$$v(x,t)=1+\sum_{i=1}^{N}a_i\exp[k_i(x-c_it)],\qquad (k_i=-c_i/\alpha) \tag{8.2.13}$$

其中 a_i 和 c_i 为常数，代入式(8.2.10)得到 Burgers 方程的一个解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=-2\alpha\frac{\partial}{\partial x}\ln\left\{1+\sum_{i=1}^{N}a_i\exp[k_i(x-c_it)]\right\}\\&=-2\alpha\frac{\sum_{i=1}^{N}a_ik_i\exp[k_i(x-c_it)]}{1+\sum_{i=1}^{N}a_i\exp[k_i(x-c_it)]}.\end{aligned} \tag{8.2.14}$$

例 8.2.3 由式(1.4.11)，已知式(8.2.2)的一个解($t>0$)

$$v(x,t)=1+\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) \tag{8.2.15}$$

代入式(8.2.10)得到 Burgers 方程的一个解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=-2\alpha\frac{\partial}{\partial x}\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)\right]\\&=\frac{x}{t}\cdot\left[1+\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)\right]^{-1}.\end{aligned} \tag{8.2.16}$$

例 8.2.4 考虑 Burgers 方程的初值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0;\qquad x\in(-\infty,\infty),\qquad t>0\\&u(x,t)|_{t=0}=u_0(x);\qquad x\in(-\infty,\infty)\end{aligned} \tag{8.2.17}$$

由 Hopf-Cole 变换式(8.2.10)，上述初值问题化为线性扩散方程的初值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\qquad x\in(-\infty,\infty),\qquad t>0\\&v(x,t)|_{t=0}=v_0(x)\equiv\exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\int_0^x u_0(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned} \tag{8.2.18}$$

由式(1.4.10)得到

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-s,t)v_0(s)\mathrm{d}s \tag{8.2.19}$$

其中 $G(x-s,t)$ 由式(1.4.11)决定

$$G(x-s,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4\alpha t}\right] \tag{8.2.20}$$

因此式(8.2.17)的解为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-s)}{t}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4\alpha t}\right]v_0(s)\mathrm{d}s \cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4\alpha t}\right]v_0(s)\mathrm{d}s\right\}^{-1} \tag{8.2.21}$$

可见，由于非线性项的存在，Burgers 方程的解十分丰富，除 8.1 节介绍的行波解外，还可以找到各种形式的解. 这些“数学”形式的解有无物理意义，应该由具体的物理问题决定.

8.2.2 KdV 方程的广义 Hopf-Cole 变换

重写 KdV 方程如下

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.22}$$

比较 KdV 方程与 Burgers 方程，前者仅比后者高一阶导数，理应存在类似的 Hopf-Cole 变换使 KdV 方程线性化. 事实上，令

$$u=\frac{\partial w}{\partial x};\quad w=-2\frac{\partial \ln v}{\partial x} \tag{8.2.23}$$

即广义 **Hopf-Cole 变换**

$$u=-2\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2} \tag{8.2.24}$$

上式的导出过程将在 8.2.4 小节给出. (8.2.23)第一式代入式(8.2.22)并且积分一次(令积分常数为零)

$$\frac{\partial w}{\partial t}-3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.25}$$

(8.2.23)第二式代入上式

$$\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x\partial t}-6\left(\frac{\partial^2 \ln v}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial^4 \ln v}{\partial x^4}=0 \tag{8.2.26}$$

上式微分展开后，两边乘 v^2 得到

$$v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+3\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]=0 \tag{8.2.27}$$

上式尽管仍然是非线性的，而且比原方程更复杂，但有一个特点：方程的每一项中未知函数或它的导数均出现二次，因此称为 KdV 方程的**双线性形式**.

尽管式(8.2.27)比式(8.2.22)复杂，但是如果取

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.28}$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.29}$$

式(8.2.27)同样能满足. 上式可写成

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1}\right]=0 \tag{8.2.30}$$

即

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1}=\text{常数}(-\eta) \tag{8.2.31}$$

故

$$\eta\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \tag{8.2.32}$$

因此，如果 v 同时满足二个线性方程(8.2.28)和(8.2.32)，通过广义 Hopf-Cole 变换式(8.2.24)形成的 u 一定是 KdV 方程的一个解. 但反之结论不一定成立. 即这一条件仅仅是充分条件.

例 8.2.5　同时满足方程(8.2.28)和(8.2.32)的一个解为

$$v=1+\exp[2(kx-\omega t)],\qquad(\omega=4k^3,\eta=-2k) \tag{8.2.33}$$

由式(8.2.24)

$$\begin{aligned}w&=-2\frac{\partial}{\partial x}\ln\{1+\exp[2(kx-\omega t)]\}\\&=-2\exp[2(kx-\omega t)]\operatorname{sech}(kx-\omega t)\end{aligned} \tag{8.2.34}$$

$$u=\frac{\partial w}{\partial x}=-2k^2\operatorname{sech}^2k(x-4k^2t) \tag{8.2.35}$$

与式(8.1.21)比较，相当于取 $c=4k^2$.

直接求解式(8.2.27)能给出 KdV 方程更丰富的解. 为此引进形式参数 ε，作级数展开

$$v=1+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i v_i \tag{8.2.36}$$

如果上述级数是截断的，即 N 项后的 $v_i=0(i\geqslant N+1)$，只要令 $\varepsilon=1$，就求得了式(8.2.27)的解. 上式代入式(8.2.27)并按 ε 的幂次分类，得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right)=0 \tag{8.2.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right)=\left(-v_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right)$$

$$- 3\left[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right] \tag{8.2.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3}\right) = \left(- v_1\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right)$$
$$- 3\left(2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots \tag{8.2.39}$$

取式(8.2.37)的解为

$$v_1 = a_1\exp[2(k_1 x - \omega_1 t)] + a_2\exp[2(k_2 x - \omega_2 t)] \tag{8.2.40}$$

其中 $\omega_1 = 4k_1^3$ 和 $\omega_2 = 4k_2^3$,(a_1, a_2)是表示振幅的常数. 上式代入式(8.2.38),右边第一项为零,于是得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}\right) = 48k_1k_2(k_1 - k_2)^2 a_1a_2\exp[2(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t] \tag{8.2.41}$$

不难求得上式的一个特解

$$v_2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 a_1a_2\exp[2(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t] \tag{8.2.42}$$

上式和式(8.2.40)代入式(8.2.39),经过繁复的数学运算,可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3}\right) = 0 \tag{8.2.43}$$

取上式的特解为 $v_3 = 0$. 同理可得 $v_i = 0 (i \geqslant 3)$. 因此级数式(8.2.36)是截断的,只要令 $\varepsilon = 1$, 就求得了式(8.2.27)的一个解

$$v = 1 + a_1\exp(2\theta_1) + a_2\exp(2\theta_2) + a_3\exp[2(\theta_1 + \theta_2)] \tag{8.2.44}$$

其中

$$a_3 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 a_1a_2;\quad \theta_1 = k_1 x - \omega_1 t;\quad \theta_2 = k_2 x - \omega_2 t \tag{8.2.45}$$

由式(8.2.23)

$$w = -2\frac{\partial}{\partial x}\ln\{1 + a_1\exp(2\theta_1) + a_2\exp(2\theta_2) + a_3\exp[2(\theta_1 + \theta_2)]\}$$
$$= -4\frac{a_1k_1\exp(2\theta_1) + a_2k_2\exp(2\theta_2) + a_3(k_1 + k_2)\exp[2(\theta_1 + \theta_2)]}{1 + a_1\exp(2\theta_1) + a_2\exp(2\theta_2) + a_3\exp[2(\theta_1 + \theta_2)]} \tag{8.2.46}$$

上式称为 KdV 方程的双"孤波"解, 如图 8.2.1. 图中取值为:$k_1 = 1, k_2 = 2, a_1 = a_2 = 3$. 图 8.2.1 表明了三个时刻:$t = 0, t = 0.15$ 和 $t = 0.5$, u 与 x 的关系. 初始时刻($t = 0$), 只有一个"孤波", $t > 0$ 时一个"孤波"分裂成二个. 随着时间增长,

二个“孤波”彼此分开. 由于振幅大的“孤波”有较大的速度,因此,二个“孤波”分开距离随时间增加.

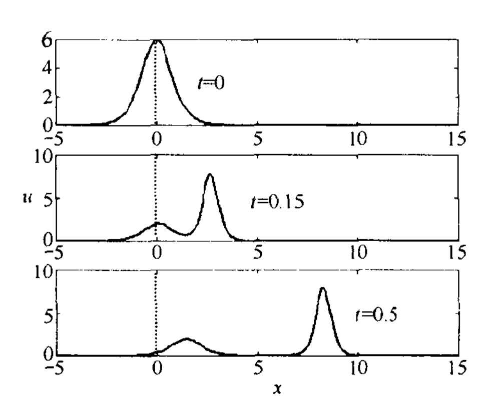


图 8.2.1 KdV 方程的双“孤波”解

8.2.3 KdV-Burgers 方程的广义 Hopf-Cole 变换

KdV-Burgers 方程是 KdV 方程与 Burgers 方程的组合

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.47}$$

当 $\beta=0$, 上式即为 Burgers 方程. 当 $\alpha=0$,上式通过自变量和函数的线性变换: $x'=\beta^{-1/3}x$ 和 $u'=-\beta^{-1/3}u/6$,可化成式(8.2.22)的 KdV 标准形式. 上式的广义 Hopf-Cole 为

$$u=\frac{\partial w}{\partial x};\qquad w=-\frac{12}{5}\alpha\ln v+12\beta\frac{\partial\ln v}{\partial x} \tag{8.2.48}$$

第一式代入式(8.2.47)并且积分一次(令积分常数为零)得到

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.49}$$

(8.2.48)第二式代入上式, 整理后得到 KdV-Burgers 方程的双线性形式为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\alpha}{5}v-\beta v\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)\\&-3\beta^3\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right]-\frac{\alpha}{5}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{5}\frac{\partial v}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=0\end{aligned} \tag{8.2.50}$$

显然,如果取 v 同时满足

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0 \tag{8.2.51}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \tag{8.2.52}$$

$$\frac{\alpha}{5} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{8.2.53}$$

那么式(8.2.50)也能满足. 式(8.2.51)与(8.2.29)同样处理，得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \eta \frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.2.54}$$

因此，如果 v 同时满足三个线性方程(8.2.52)～(8.2.54)，通过广义 Hopf-Cole 变换式(8.2.48)形成的 u 一定是 KdV-Burgers 方程的一个解.

例 8.2.6 线性方程(8.2.52)～(8.2.54)的一个共同解为

$$v = 1 + \exp(kx - \omega t) \tag{8.2.55}$$

且 $\eta = k = -\alpha/(5\beta)$ 和 $\omega = -\alpha k^2 + \beta k^3$. 代入式(8.2.48)得到

$$w = -\frac{12\alpha}{5}\ln[1 + \exp(kx - \omega t)] + 6\beta k \exp\left[\frac{1}{2}(kx - \omega t)\right]\operatorname{sech}\left[\frac{1}{2}(kx - \omega t)\right] \tag{8.2.56}$$

以及

$$u = 2c - \frac{3\alpha^2}{25\beta}\left[1 + \tanh\left(\frac{\alpha}{10\beta}\xi\right)\right]^2; \qquad (\xi = x - ct) \tag{8.2.57}$$

其中相速度 $c \equiv \omega/k = -\alpha k + \beta k^2 = 6\alpha^2/(25\beta)$. 上式即为 KdV-Burgers 方程的一个冲击波解.

8.2.4 Hirota 方法

我们找到了 Burgers 方程、KdV 方程以及 KdV-Burgers 的 Hopf-Cole 变换或广义 Hopf-Cole 变换，通过这些非线性变换，把非线性方程化成容易求解的线性方程，得到了这三个方程的更多解. 问题是，对一般的非线性方程这样的非线性变换是否存在？能否把原方程化为式(8.2.27)或(8.2.50)这种双线性形式？本节介绍 Hirota 方法，其基本思想是：在函数变换中同时引进两个未知函数，然后通过选择其中一个函数或选择两个函数间某种关系使原非线性方程化成**双线性形式**求解.

为了运算方便，Hirota 引进双线性算子(bilinear operator)

$$D_t^m D_x^n (f \cdot g) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n f(x,t) g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}} \tag{8.2.58}$$

其中 m 和 n 是非负整数. 例如

$$D_t(f \cdot g) \equiv D_t^1 D_x^0 (f \cdot g) = \left(\frac{\partial t}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right) f(x,t) g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}}$$

$$= g\frac{\partial f}{\partial t} - f\frac{\partial g}{\partial t} \tag{8.2.59}$$

$$D_x(f\cdot g) \equiv D_t^0 D_x^1(f\cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) f(x,t) g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}$$

$$= g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x} \tag{8.2.60}$$

$$D_x^2(f\cdot g) \equiv D_t^0 D_x^2(f\cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 f(x,t) g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}$$

$$= g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \tag{8.2.61}$$

$$D_x^3(f\cdot g) \equiv D_t^0 D_x^3(f\cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^3 f(x,t) g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}$$

$$= g\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial x} - f\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \tag{8.2.62}$$

$$D_t D_x(f\cdot g) \equiv D_t^1 D_x^1(f\cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) f(x,t) g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}$$

$$= g\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} \tag{8.2.63}$$

需要注意的是，f 和 g 不能随便交换次序，例如由式(8.2.59)，得到

$$D_t(f\cdot g) = -D_t(g\cdot f) \tag{8.2.64}$$

显然，有关系

$$D_t(f\cdot f) = 0,\qquad D_x(f\cdot f) = 0,\qquad D_x^3(f\cdot f) = 0 \tag{8.2.65}$$

$$D_x^2(f\cdot f) = 2\left[f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right] \tag{8.2.66}$$

$$D_t D_x(f\cdot f) = 2\left(f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{8.2.67}$$

以 KdV 方程(8.2.22)或(8.2.25)为例，我们来阐明 Hirota 方法的基本过程．引进二个未知函数 g 和 f，作函数变换

$$w(x,t) = \frac{g(x,t)}{f(x,t)} \tag{8.2.68}$$

显然有

$$w_t = \left(\frac{g}{f}\right)_t = \frac{g_t f - g f_t}{f^2} = \frac{D_t(g\cdot f)}{f^2} \tag{8.2.69}$$

$$w_x = \left(\frac{g}{f}\right)_x = \frac{g_x f - g f_x}{f^2} = \frac{D_x(g\cdot f)}{f^2} \tag{8.2.70}$$

得到上二式，已利用了式(8.2.59)和(8.2.60)．同样可得

$$w_{xx} = \left(\frac{g}{f}\right)_{xx} = \frac{D_x^2(g\cdot f) - 2(\ln f)_{xx} g f}{f^2} \tag{8.2.71}$$

$$w_{xxx} = \left(\frac{g}{f}\right)_{xxx} = \frac{D_x^3(g \cdot f) - 6(\ln f)_{xx} D_x(g \cdot f)}{f^2} \tag{8.2.72}$$

式(8.2.71)中取 $g=f$ 时，得到

$$2(\ln f)_{xx} = \frac{D_x^2(f \cdot f)}{f^2} \tag{8.2.73}$$

以上各式代入式(8.2.25)并两边乘 f^2 得到

$$D_t(g \cdot f) - 3\left[\frac{D_x(g \cdot f)}{f}\right]^2 + D_x^3(g \cdot f) - 3\frac{D_x^2(f \cdot f)}{f^2} D_x(g \cdot f) = 0 \tag{8.2.74}$$

上式引进任意常数 λ，化为

$$\begin{aligned} &[D_t(g \cdot f) + 3\lambda D_x(g \cdot f) + D_x^3(g \cdot f)] \\ &- 3\frac{D_x(g \cdot f)}{f^2}[D_x(g \cdot f) + \lambda f^2 + D_x^2(f \cdot f)] = 0 \end{aligned} \tag{8.2.75}$$

由于 g 和 f 是未知函数，可以要求 g 和 f 满足

$$\begin{gathered} (D_t + 3\lambda D_x + D_x^3)(g \cdot f) = 0 \\ (D_x^2 + \lambda)(f \cdot f) + D_x(g \cdot f) = 0 \end{gathered} \tag{8.2.76}$$

第二式中取 $\lambda=0$ 得到

$$D_x(g \cdot f) = -D_x^2(f \cdot f) = -2f^2(\ln f)_{xx} \tag{8.2.77}$$

由式(8.2.70),并结合上式

$$\frac{D_x(g \cdot f)}{f^2} = \left(\frac{g}{f}\right)_x = -2(\ln f)_{xx} = -2\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x$$

因此取 g 和 f 的关系

$$g = -2\frac{\partial f}{\partial x} \tag{8.2.78}$$

即

$$w(x,t) = -2\frac{\partial \ln f}{\partial x}$$

显然，上式就是式(8.2.23). 式(8.2.78)代入式(8.2.76)得到(注意:$\lambda=0$)

$$(D_t + D_x^3)(f_x \cdot f) = 0 \tag{8.2.79}$$

利用关系

$$\begin{gathered} D_t D_x(f \cdot f) = 2D_t(f_x \cdot f) \\ D_x^4(f \cdot f) = 2D_x^3(f_x \cdot f) \end{gathered}$$

式(8.2.79)简化为

$$D_x(D_t + D_x^3)(f \cdot f) = 0 \tag{8.2.80}$$

上式就是我们求得的 KdV 方程的**双线性形式**. 式(8.2.27)是在已知广义 Hopf-Cole变换式(8.2.23)的情况下导出的，而式(8.2.80)是采用 Hirota 方法得到且同时得到了 Hopf-Cole 变换.

与式(8.2.36)类似，引进形式参数 ε，作级数展开

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i \tag{8.2.81}$$

代入式(8.2.80)并按 ε 的幂次分类，得到

$$\begin{aligned} D_x(D_t + D_x^3)(f_0 \cdot f_0) &= 0 \\ D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_0) &= 0 \\ 2D_x(D_t + D_x^3)(f_2 \cdot f_0) &= -D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot f_1) \\ D_x(D_t + D_x^3)(f_3 \cdot f_0) &= -D_x(D_t + D_x^3)(f_2 \cdot f_1) \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{8.2.82}$$

显然，(8.2.82)第一式仍是非线性的，但 f_0 = 常数是它的一个特解，而其他方程都是线性的.

例 8.2.7　NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0 \tag{8.2.83}$$

对一般的 NLS 方程(8.1.89)可通过线性变换

$$x \to \sqrt{\alpha} x; \qquad u \to \sqrt{2\beta^{-1}} u$$

化成式(8.2.83)形式. 作函数变换

$$u = \frac{g}{f} \tag{8.2.84}$$

其中 f 为实函数. 式(8.2.83)的双线性形式为

$$\begin{cases} (\mathrm{i}D_t + D_x^2)(g \cdot f) = 0 \\ D_x^2(f \cdot f) - 2|g|^2 = 0 \end{cases} \tag{8.2.85}$$

例 8.2.8　Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u \tag{8.2.86}$$

作函数变换

$$\tan\left(\frac{u}{4}\right) = \frac{g}{f} \tag{8.2.87}$$

利用三角函数关系式(8.1.61)，可以求得双线性形式为

$$\begin{cases} (D_x^2 - D_t^2 - 1)(f \cdot g) = 0 \\ (D_x^2 - D_t^2)[(f \cdot f) - (g \cdot g)] = 0. \end{cases} \tag{8.2.88}$$

8.3 逆散射方法

本节介绍利用一维 Schrödinger 方程的逆散射方法求解非线性演化方程的初值问题. 主要介绍逆散射方法解 KdV 方程的初值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,\qquad x\in(-\infty,\infty),\qquad t>0\\&u(x,t)\mid_{t=0}=u(x,0),\qquad x\in(-\infty,\infty)\end{aligned}\tag{8.3.1}$$

本节的讨论都假定所求的解满足条件:当 $x\to\pm\infty$ 时 $u(x,t)\to 0$. 8.3.1 小节首先介绍一维 Schrödinger 方程的逆散射问题; 8.3.2 小节介绍逆散射方法解 KdV 方程初值问题的基本思想;8.3.3 小节介绍具体步骤和 KdV 方程初值问题的孤立子解; 最后介绍求解其他非线性方程初值问题的 Lax 理论.

8.3.1 一维 Schrödinger 方程的逆散射问题

考虑一维 Schrödinger 方程在无限空间的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+k^2\psi=u(x)\psi(x),\qquad x\in(-\infty,\infty)\tag{8.3.2}$$

其中 $u(x)$ 为势函数, 假定为实函数且局域, 即满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u(x)|\mathrm{d}x<\infty\tag{8.3.3}$$

由于势函数的局域性, 当 $x\to\pm\infty$ 时,式(8.3.2)可近似成

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+k^2\psi=0,\quad(x\to\pm\infty)\tag{8.3.4}$$

分二种情况讨论:

1. 连续谱 $k^2>0$, 这时本征函数的渐近性质由上式得到为

$$\psi(x,k)\sim a\exp(-\mathrm{i}kx)+b\exp(\mathrm{i}kx),\quad(x\to\pm\infty)\tag{8.3.5}$$

2. 离散谱 $k^2<0$, 令 $k=\pm\mathrm{i}\kappa$,本征函数的渐近性质为

$$\begin{aligned}&\psi(x,\mathrm{i}\kappa)\sim\exp(-\kappa x),\quad(x\to+\infty)\\&\psi(x,\mathrm{i}\kappa)\sim\exp(\kappa x),\quad(x\to-\infty)\end{aligned}\tag{8.3.6}$$

现在分析式(8.3.2)的解在 $x\to+\infty$ 处的渐近特征. 设基本解 $\varphi(x,k)$ 为

$$\varphi(x,k)=\exp(\mathrm{i}kx)+\int_x^{\infty}K(x,y)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y\tag{8.3.7}$$

其中 $K(x,y)$ 为待定函数, 并且规定 $y<x$ 时 $K(x,y)=0$. 显然根据上式定义的 $\varphi(x,k)$ 有渐近特征

$$\begin{aligned}&\varphi(x,k)\sim\exp(\mathrm{i}kx),\qquad(x\to+\infty)\\&\varphi(x,\mathrm{i}\kappa)\sim\exp(-\kappa x),\qquad(x\to+\infty)\end{aligned}\tag{8.3.8}$$

因 Schrödinger 方程中 k 以 k^2 出现，因此式(8.3.7)中把 k 改成 $-k$ 也是式(8.3.2)的解

$$\varphi(x,-k)=\exp(-\mathrm{i}kx)+\int_x^{\infty}K(x,y)\exp(-\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \tag{8.3.9}$$

显然有

$$\varphi(x,-k)\sim\exp(-\mathrm{i}kx),\qquad (x\to+\infty) \tag{8.3.10}$$

$$\varphi(x,-\mathrm{i}\kappa)\sim\exp(\kappa x),\qquad (x\to+\infty)$$

由 $\varphi(x,k)$和 $\varphi(x,-k)$的渐近式，可知 $\varphi(x,k)$和 $\varphi(x,-k)$线性独立，因此方程(8.3.2)的通解为二者的线性组合

$$\psi(x,k)=\beta(k)\varphi(x,k)+\alpha(k)\varphi(x,-k) \tag{8.3.11}$$

上式改写为

$$\frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}=\varphi(x,-k)+\frac{\beta(k)}{\alpha(k)}\varphi(x,k) \tag{8.3.12}$$

利用式(8.3.8)和(8.3.10)中第一式

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}=\exp(-\mathrm{i}kx)+\frac{\beta(k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}kx)$$

$$\equiv\exp(-\mathrm{i}kx)+b(k)\exp(\mathrm{i}kx) \tag{8.3.13}$$

显然，上式第一项表示 $x=+\infty$处入射的单位振幅平面波，第二项表示由于存在 $u(x)$而引起反射的平面波，因此 $b(k)$表示**反射系数**，如图 8.3.1. 注意：$b(k)$由解在 $x\to+\infty$的渐近特征定义.

当 $x\to-\infty$时，由式(8.3.5)且结合图 8.3.1 得到渐近特性

$$\psi(x,k)\sim a(k)\exp(-\mathrm{i}kx),\quad (x\to-\infty) \tag{8.3.14}$$

其中 $a(k)$即为**透射系数**. 注意 $a(k)$由解在 $x\to-\infty$的渐近特征定义.

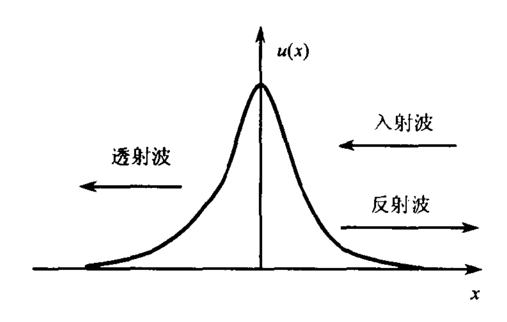


图 8.3.1　散射问题

在正散射问题中，已知 $u(x)$，求透射系数 $a(k)$和反射系数 $b(k)$. 但本节我们感兴趣的是逆散射问题：已知散射信息 $b(k)$或 $a(k)$，求 $u(x)$的分布. 如果存在 $k^2<0$ 的离散谱，已知散射信息中还必须包括 $k=\pm\mathrm{i}\kappa$ 的特征. 下面我们来导

出相关的计算公式.

首先求 $K(x,y)$满足的方程，因 $y<x$ 时 $K(x,y)=0$,式(8.3.7)可写成

$$\varphi(x,k) = \exp(\mathrm{i}kx) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \tag{8.3.15}$$

于是上式右边积分为 Fourier 积分，Fourier 逆变换为

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x,k) - \exp(\mathrm{i}kx)]\exp(-\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y. \tag{8.3.16}$$

另一方面，由式(8.3.12),两边乘 $\exp(\mathrm{i}ky)$并对 k 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,-k)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k + \int_{-\infty}^{\infty} b(k)\varphi(x,k)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k \tag{8.3.17}$$

把式(8.3.7)和(8.3.9)代入上式并利用式(8.3.16)，得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k = K(x,y) + B_c(x+y) + \int_{x}^{\infty}K(x,z)B_c(z+y)\mathrm{d}z, \quad (y>x) \tag{8.3.18}$$

其中

$$B_c(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k$$

为反射系数 $b(k)$的 Fourier 变换，$b(k)$在物理中是可测量，因此在逆散射问题中可认为 $B_c(x)$已知. 得到式(8.3.18)，已利用 δ 函数的积分关系

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k$$

因此，为得到 $K(x,y)$的方程，关键是求式(8.3.18)左边的积分. 根据留数定理

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}k = \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N} a_{-1}^{n} \tag{8.3.19}$$

其中 a_{-1}^{n}是函数

$$f(k) \equiv \frac{\psi(x,k)}{\alpha(k)}\exp(\mathrm{i}ky) \tag{8.3.20}$$

在上半平面(当 $y>0$)或下半平面(当 $y<0$)的极点处的留数. $f(k)$的极点即是 $\alpha(k)$的零点.

可证明下列两个性质(证明略):

(1) $\alpha(k)$的零点是本征值问题式(8.3.2)的 N 个离散本征值 $i\kappa_n(n=1,2,\cdots,N)$. 在 $k=\mathrm{i}\kappa_n(n=1,2,\cdots,N)$点，$\psi(x,\mathrm{i}\kappa_n)$和 $\varphi(x,\mathrm{i}\kappa_n)$线性相关，即有

$$\psi(x,\mathrm{i}\kappa_n) = c_n\varphi(x,\mathrm{i}\kappa_n) \tag{8.3.21}$$

事实上，由式(8.3.10)，因 $\varphi(x,-\mathrm{i}\kappa_n)\sim\exp(\kappa_n x),(x\to+\infty)$，为了保证 $\psi(x,$

$-\mathrm{i}\kappa_n$)在无穷远处的有限性，只有取式(8.3.11)中 $\alpha(\mathrm{i}\kappa_n)=0$. 利用渐近特性式(8.3.6)得到

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x,\mathrm{i}\kappa_n) = c_n\exp(-\kappa_n x) \tag{8.3.22}$$

一般要求本征函数 $\psi(x,\mathrm{i}\kappa_n)$归一化，即要求

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x,\mathrm{i}\kappa_n)\mathrm{d}x = 1$$

因此 c_n 为离散本征值 $\mathrm{i}\kappa_n$ 的本征函数$\psi(x,\mathrm{i}\kappa_n)$的归一化常数

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x,\mathrm{i}\kappa_n)\mathrm{d}x = \frac{1}{c_n^2}.$$

(2) $\alpha(k)$的所有零点 $k=\mathrm{i}\kappa_n(n=1,2,\cdots,N)$都是一阶的，因而也是 $f(k)$的一阶极点，且有关系

$$\left.\frac{\partial\alpha(k)}{\partial k}\right|_{k=\mathrm{i}\kappa_n} = -\frac{\mathrm{i}}{c_n} \tag{8.3.23}$$

因此

$$a_{-1}^{n} = \frac{\psi(x,\mathrm{i}\kappa_n)}{\left.\dfrac{\partial\alpha(k)}{\partial k}\right|_{k=\mathrm{i}\kappa_n}}\exp(-\kappa_n y) = \mathrm{i}c_n^2\varphi(x,\mathrm{i}\kappa_n)\exp(-\kappa_n y) \tag{8.3.24}$$

代入式(8.3.18)

$$-\sum_{n=1}^{N}c_n^2\varphi(x,\mathrm{i}\kappa_n)\exp(-\kappa_n y) = K(x,y) + B_c(x+y) + \int_x^{\infty}K(x,z)B_c(z+y)\mathrm{d}z,\qquad (y>x) \tag{8.3.25}$$

式(8.3.7)中取 $k=\mathrm{i}\kappa_n$ 代入上式，整理后得到

$$K(x,y) + B(x+y) + \int_x^{\infty}K(x,z)B(z+y)\mathrm{d}z = 0,\qquad (y>x) \tag{8.3.26}$$

其中

$$B(x) = \sum_{n=1}^{N}c_n^2\exp(-\kappa_n x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \tag{8.3.27}$$

式(8.3.26)即为决定 $K(x,y)$的 Volterra 积分方程，称为 GLM (Gelfand-Levitan-Marchenko)积分方程.

假定已得到式(8.3.26)的解，下面推导决定势函数 $u(x)$的方程. 首先要求

$$\lim_{y\to\infty}K(x,y) = 0,\qquad \lim_{y\to\infty}\frac{\partial K(x,y)}{\partial y} = 0 \tag{8.3.28}$$

否则式(8.3.15)中 Fourier 积分不存在. 式(8.3.7)两边对 x 求导二次得到

$$\frac{\partial\varphi(x,k)}{\partial x} = \mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kx) - K(x,x)\exp(\mathrm{i}kx) + \int_x^{\infty}\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x,k)}{\partial x^2} = -\left\{k^2 + \mathrm{i}kK(x,x) + \frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x} - \left[\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\right]_{y=x}\right\}\exp(\mathrm{i}kx) + \int_x^\infty \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \tag{8.3.29}$$

另一方面,式(8.3.7)中的积分分部积分二次，并且利用式(8.3.28)，得到

$$\begin{aligned}\varphi(x,k) &= \left[1 - \frac{1}{\mathrm{i}k}K(x,x)\right]\exp(\mathrm{i}kx) - \frac{1}{\mathrm{i}k}\int_x^\infty \frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \\ &= \left\{1 - \frac{1}{\mathrm{i}k}K(x,x) - \frac{1}{k^2}\left[\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right]_{y=x}\right\}\exp(\mathrm{i}kx) \\ &\quad - \frac{1}{k^2}\int_x^\infty \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial y^2}\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{8.3.30}$$

于是，由式(8.3.29)和(8.3.30)得

$$\frac{\partial^2\varphi(x,k)}{\partial x^2} + k^2\varphi(x,k) = -\left\{\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x} + \left[\frac{\partial K(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right]_{y=x}\right\}\exp(\mathrm{i}kx) + \int_x^\infty\left[\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial^2 y}\right]\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y \tag{8.3.31}$$

注意到求导关系

$$\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{\partial K(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right]_{y=x}$$

由式(8.3.2)、(8.3.7)和(8.3.31)得到

$$-2\frac{\mathrm{d}K(x,y)}{\mathrm{d}x}\exp(\mathrm{i}kx) + \int_x^\infty\left[\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial^2 y}\right]\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y = u\exp(\mathrm{i}kx) + u\int_x^\infty K(x,y)\exp(\mathrm{i}ky)\mathrm{d}y$$

上式两边比较得到

$$u(x) = -2\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x} \tag{8.3.32}$$

$$\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial^2 y} = uK(x,y) \tag{8.3.33}$$

式(8.3.32)即是我们要求的方程.

至此，我们求得了逆散射问题的全部方程，总结如下：

1. 已知 Schrödinger 方程在无限空间中的本征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + k^2\psi = u(x)\psi(x), \qquad x \in (-\infty,\infty) \tag{8.3.34}$$

的反射系数 $b(k)(-\infty<k<\infty)$、N 个离散本征值 $\kappa_n(n=1,2,\cdots,N)$ 以及相应本征函数的归一化常数 $c_n(n=1,2,\cdots,N)$，求得

$$B(x) = \sum_{n=1}^N c_n^2\exp(-\kappa_n x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty b(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k. \tag{8.3.35}$$

2. 由 GLM 积分方程求 $K(x,y)$

$$K(x,y)+B(x+y)+\int_x^{\infty}K(x,z)B(z+y)\mathrm{d}z=0,\qquad (y>x).\tag{8.3.36}$$

3. 一旦求得 $K(x,y)$，势函数 $u(x)$ 计算公式为

$$u(x)=-2\frac{\mathrm{d}K(x,x)}{\mathrm{d}x}.\tag{8.3.37}$$

二个特殊情况是：

(1) 无反射势函数 $u(x)$, $b(x)=0$, 于是

$$B(x)=\sum_{n=1}^{N}c_n^2\exp(-\kappa_n x)\tag{8.3.38}$$

(2) 无离散本征值的势函数 $u(x)$，即无束缚态，于是

$$B(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k\tag{8.3.39}$$

一般，GLM 积分方程(8.3.36)的求解非常困难，在特殊情况下，即 $B(x+y)$ 可分离，GLM 积分方程可转为代数方程，设

$$B(x+y)=\sum_{n=1}^{N}X_n(x)Y_n(y)\tag{8.3.40}$$

代入式(8.3.36)得

$$K(x,y)+\sum_{n=1}^{N}X_n(x)Y_n(y)+\sum_{n=1}^{N}Y_n(y)\int_x^{\infty}K(x,z)X_n(z)\mathrm{d}z=0$$
$$(y>x)\tag{8.3.41}$$

设解具有形式

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{N}L_n(x)Y_n(y)\tag{8.3.42}$$

代入式(8.3.41)得到

$$\sum_{n=1}^{N}\left[L_n(x)+X_n(x)+\sum_{m=1}^{N}L_m(x)\int_x^{\infty}Y_m(z)X_n(z)\mathrm{d}z\right]Y_n(y)=0$$
$$(y>x)\tag{8.3.43}$$

对每一点 y, 上式恒成立，因此

$$L_n(x)+X_n(x)+\sum_{m=1}^{N}L_m(x)\int_x^{\infty}Y_m(z)X_n(z)\mathrm{d}z=0$$
$$(n=1,2,\cdots,N)\tag{8.3.44}$$

上式为 $L_n(x)$ 的线性代数方程，一旦求得 $L_n(x)(n=1,2,\cdots,N)$，可由式(8.3.42)得到 $K(x,y)$.

例 8.3.1 已知反射系数为

$$b(k) = -\frac{\beta}{\beta + \mathrm{i}k} \tag{8.3.45}$$

束缚态只有一个，并且波函数的渐近特性为

$$\psi(x) \sim \sqrt{\beta}\exp(-\beta x), \qquad x \to +\infty$$

比较式(8.3.22)，显然 $\kappa_1 = \beta$ 和 $c_1 = \sqrt{\beta}$，因此

$$B(x) = \beta\exp(-\beta x) - \frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}kx)}{\beta + \mathrm{i}k}\mathrm{d}k$$

上式积分可由留数定理得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}kx)}{\beta + \mathrm{i}k}\mathrm{d}k = \begin{cases}\exp(-\beta x), & x > 0\\ 0, & x < 0\end{cases}$$

于是

$$B(x) = \beta\exp(-\beta x)H(-x)$$

其中 $H(x)$为 Heaviside 函数. 由式(8.3.36)可得到

$$K(x,y) = 0, \quad 当\ x + y > 0 \tag{8.3.46}$$

当 $x + y < 0$ 时，式(8.3.36)为

$$K(x,y) + \beta\exp[-\beta(x+y)] + \beta\int_x^{-y}K(x,z)\exp[-\beta(z+y)]\mathrm{d}z = 0 \quad (y > x) \tag{8.3.47}$$

上式分部积分得到

$$K(x,y) + \beta\exp[-\beta(x+y)] + K(x,x)\exp[-\beta(x+y)] - K(x,-y) + \int_x^{-y}\frac{\partial K(x,z)}{\partial z}\exp[-\beta(z+y)]\mathrm{d}z = 0, \qquad (y > x)$$

显然 $K(x,y) = -\beta$ 是上式的解. 结合式(8.3.46)

$$K(x,y) = -\beta H(-x-y), \qquad K(x,x) = -\beta H(-2x)$$

由式(8.3.37)

$$u(x) = 2\beta\frac{\mathrm{d}H(-2x)}{\mathrm{d}x} = -2\beta\delta(x). \tag{8.3.48}$$

例 8.3.2 已知反射系数为零，即 $b(k) = 0$，而束缚态只有两个，并且波函数的渐近特性为

$$\varphi_1(x) \sim c_1\exp(-\kappa_1 x); \qquad \varphi_2(x) \sim c_2\exp(-\kappa_2 x) \qquad x \to +\infty \tag{8.3.49}$$

其中 $\kappa_1 \neq \kappa_2$，于是

$$B(x) = c_1^2\exp(-\kappa_1 x) + c_2^2\exp(-\kappa_2 x)$$

GLM 积分方程为

$$K(x,y)+c_1^2\exp[-\kappa_1(x+y)]+c_2{}^2\exp[-\kappa_2(x+y)]$$
$$+\int_x^\infty K(x,z)\{c_1^2\exp[-\kappa_1(z+y)]+c_2{}^2\exp[-\kappa_2(z+y)]\}\mathrm{d}z=0 \tag{8.3.50}$$

显然 $B(x+y)$是可分离的，设解为

$$K(x,y)=L_1(x)\exp(-\kappa_1 y)+L_2(x)\exp(-\kappa_2 y) \tag{8.3.51}$$

式(8.3.44)为

$$L_1(x)+c_1^2\mathrm{e}^{-\kappa_1 x}+c_1^2\left[L_1(x)\int_x^\infty \mathrm{e}^{-2\kappa_1 z}\mathrm{d}z+L_2(x)\int_x^\infty \mathrm{e}^{-2(\kappa_1+\kappa_2)z}\mathrm{d}z\right]=0$$
$$L_2(x)+c_2^2\mathrm{e}^{-\kappa_1 x}+c_2^2\left[L_1(x)\int_x^\infty \mathrm{e}^{-2(\kappa_1+\kappa_2)z}\mathrm{d}z+L_2(x)\int_x^\infty \mathrm{e}^{-2\kappa_2 z}\mathrm{d}z\right]=0$$

积分后上述方程可写成

$$L_m(x)+c_m^2\exp(-\kappa_m x)+c_m^2\sum_{n=1}^{2}L_n(x)\frac{\exp[-(\kappa_m+\kappa_n)x]}{\kappa_m+\kappa_n}=0$$
$$(m=1,2) \tag{8.3.52}$$

经过复杂但不困难的数学计算，可以得到

$$u(x)=-2\frac{\mathrm{d}^2\ln\Omega(x)}{\mathrm{d}x^2} \tag{8.3.53}$$

其中

$$\Omega(x)=\left[1+\frac{c_1^2}{2\kappa_1}\exp(-2\kappa_1 x)\right]\left[1+\frac{c_2^2}{2\kappa_2}\exp(-2\kappa_2 x)\right]$$
$$-\frac{c_1^2c_2^2}{(\kappa_1+\kappa_2)^2}\exp[-2(\kappa_1+\kappa_2)x]$$

如果 $c_2=0$，直接可得到“孤波”形式的势函数

$$u(x)=-2\kappa_1^2\mathrm{sech}^2(\kappa_1 x+x_0) \tag{8.3.54}$$

其中 $\exp(x_0)=\sqrt{2\kappa_1}/c_1$.

8.3.2 解 KdV 方程初值问题的基本思想

对式(8.3.1)中的 KdV 方程作非线性变换

$$u(x,t)=\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda(t) \tag{8.3.55}$$

代入 KdV 方程得到

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda(t)\psi=u(x,t)\psi \tag{8.3.56}$$

以及

$$\psi^2\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0 \tag{8.3.57}$$

其中

$$Q = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(u + \lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8.3.58}$$

式(8.3.57)是一个非常复杂的非线性方程，而且式(8.3.56)和(8.3.57)是联立方程. 但是根据 $u(x,t)$的特性可把式(8.3.57)简化. 下面进行这方面的推导.

显然式(8.3.56)即是 Schrödinger 方程的本征值问题，此时 t 仅作为一个形式参数. 对连续谱，λ 的变化范围是$(-\infty<\lambda<+\infty)$，显然与时间 t 无关，一定有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8.3.59}$$

对离散谱 $\lambda(t) = -\kappa_n^2$,式(8.3.57)两边对 x 积分

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\mathrm{d}x + \left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \tag{8.3.60}$$

由式(8.3.60)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\psi = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{8.3.61}$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\mathrm{d}x < \infty \tag{8.3.62}$$

所以式(8.3.59)也成立,即对连续谱和离散谱，λ 都不随时间变化. 于是式(8.3.57)简化成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 \tag{8.3.63}$$

上式积分可得

$$\psi^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\psi}\right) = d(t) \tag{8.3.64}$$

其中 $d(t)$为 t 的任意函数. 上式给出

$$Q = d(t)\psi\int_0^x\frac{1}{\psi^2}\mathrm{d}x + e(t)\psi \tag{8.3.65}$$

其中 $e(t)$也为 t 的任意函数.

分二种情况讨论:

(1) $\lambda = -\kappa_n^2$ 是离散谱，当 $x\to+\infty$，由式(8.3.6)，$\psi\to 0$,因此 $1/\psi\to\infty$，但 Q 有界，故只有 $d(t)\equiv 0$. 因此

$$Q = e(t)\psi \tag{8.3.66}$$

利用式(8.3.55)和(8.3.58)，上式化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\psi^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - 3\lambda\psi^2\right] = e(t)\psi^2$$

两边对 x 积分，并利用式(8.3.61)和(8.3.62)，给出 $e(t)\equiv 0$. 因此对 $\lambda=-\kappa_n^2$ 离散谱情况，式(8.3.57)简化为 $Q=0$，即

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\qquad(\lambda=-\kappa_n^2)\tag{8.3.67}$$

为了考察上式解的渐近性质，注意到 $x\to+\infty$ 时，$u\to 0$，且由式(8.3.22)

$$\psi\approx c_n(\kappa_n,t)\exp(-\kappa_n x)$$

代入式(8.3.67)得到

$$\frac{\mathrm{d}c_n}{\mathrm{d}t}=4\kappa_n^3c_n$$

因此

$$c_n(\kappa_n,t)=c_n(0)\exp(4\kappa_n^3t)\tag{8.3.68}$$

(2) $\lambda=k^2$ 是连续谱，当 $x\to-\infty$，由式(8.3.14)，$\psi\sim a(k,t)\exp(-\mathrm{i}kx)$，因而式(8.3.65)近似为

$$\begin{aligned}Q&=d(t)\psi\int_0^x\frac{1}{\psi^2}\mathrm{d}x+e(t)\psi\\&\approx\frac{d(t)}{a(k,t)}\exp(-\mathrm{i}kx)\int_0^x\exp(2\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x\\&\quad+e(t)a(k,t)\exp(-\mathrm{i}kx)\end{aligned}\tag{8.3.69}$$

另一方面，注意到 $x\to-\infty$ 时，$u\to 0$，直接由式(8.3.58)得

$$Q\approx\left(\frac{\partial a}{\partial t}+4\mathrm{i}k^3a\right)\exp(-\mathrm{i}kx)\tag{8.3.70}$$

二式结合得到

$$\frac{\partial a}{\partial t}+[4\mathrm{i}k^3-e(t)]a=\frac{d(t)}{a}\int_0^x\exp(2\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x\tag{8.3.71}$$

上式左边仅是 t 的函数，与 x 无关，而右边与 x 有关，等式成立的条件是 $d(t)\equiv 0$，并且有

$$\frac{\partial a}{\partial t}+[4\mathrm{i}k^3-e(t)]a=0\tag{8.3.72}$$

当 $x\to+\infty$，由式(8.3.13)，$\psi\sim\exp(-\mathrm{i}kx)+b(k)\exp(\mathrm{i}kx)$，直接由式(8.3.58)得

$$Q\approx\left(\frac{\partial b}{\partial t}-4\mathrm{i}k^3b\right)\exp(\mathrm{i}kx)+4\mathrm{i}k^3\exp(-\mathrm{i}kx)\tag{8.3.73}$$

由式(8.3.65)并且注意到 $d(t)=0$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial t}-4\mathrm{i}k^3b-e(t)b\right]\exp(\mathrm{i}kx)+[4\mathrm{i}k^3-e(t)]\exp(-\mathrm{i}kx)=0\tag{8.3.74}$$

上式恒成立的条件是

$$e(t) = 4\mathrm{i}k^3; \qquad \frac{\partial b}{\partial t} = 8\mathrm{i}k^3 b \tag{8.3.75}$$

因此，对 $\lambda = k^2$ 连续谱情况，式(8.3.57)为

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(u+\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4\mathrm{i}k^3\psi \qquad (\lambda = k^2) \tag{8.3.76}$$

至此，我们把 KdV 方程化为求 ψ 的方程，即

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \lambda(t)\psi = u(x,t)\psi \tag{8.3.77}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(u+\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\lambda = -\kappa_n^2) \tag{8.3.78}$$

或

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 3(u+\lambda)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4\mathrm{i}k^3\psi \quad (\lambda = k^2) \tag{8.3.79}$$

式(8.3.78)或(8.3.79)的初始条件可由式(8.3.77)令 $t=0$

$$\frac{\partial^2 \psi(x,0)}{\partial x^2} + \lambda(0)\psi(x,0) = u(x,0)\psi(x,0) \tag{8.3.80}$$

求正散射问题得到.

如果知道 $u(x,t)$，那么式(8.3.78)或(8.3.79)是线性方程，但实际上 $u(x,t)$待求，因此它们仍然是非线性方程.

逆散射方法求 $u(x,t)$的基本思想是，首先以 $t=0$ 时刻的 $u(x,0)$作为 Schrödinger 方程的势函数，求解正散射问题式(8.3.80)，得到一系列的散射信息，包括 $t=0$ 时刻的：

(1) 透射系数 $a(k,0)$和反射系数 $b(k,0)(-\infty<k<\infty)$；

(2) N 个离散本征值 $\lambda(0) = -\kappa_n^2(0)(n=1,2,\cdots,N)$；

(3) 本征函数的归一化常数 $c_n(0)(n=1,2,\cdots,N)$.

然后由式(8.3.78)或(8.3.79)求这些散射信息的演化规律，得到 t 时刻的散射信息，即 $b(k,t)$、$\kappa_n(t)$和 $c_n(t)$. 最后，由 t 时刻的散射信息，通过式(8.3.77)反演 $u(x,t)$. 这样就避免了直接求解非线性方程. 特别要指出的是，$a(k,t)$、$b(k,t)$和 $c_n(t)$是 ψ 在 $x\to\pm\infty$ 的渐近特征，因此决定演化规律比较容易，它们由式(8.3.59)、(8.3.68)和(8.3.75)给出.

8.3.3 KdV 方程初值问题的孤立子解

根据 8.3.2 小节的讨论，逆散射方法求 KdV 方程初值问题式(8.3.1)的具体步骤分为三步：

首先，以初值为势函数解下列 Schrödinger 方程的本征值问题

$$\frac{\partial^2 \psi(x,0)}{\partial x^2} + \lambda(0)\psi(x,0) = u(x,0)\psi(x,0) \tag{8.3.81}$$

求出 N 个束缚态的本征值：$\lambda(0)=-\kappa_n^2(n=1,2,\cdots,N)$，以及相应本征函数的渐近特征

$$\begin{aligned}\psi_n(x,0)&\sim c_n(\kappa_n,0)\exp(-\kappa_n x),\quad (x\to+\infty)\\ \psi_n(x,0)&\sim c_n(\kappa_n,0)\exp(\kappa_n x),\quad (x\to-\infty)\end{aligned}\tag{8.3.82}$$

且要求 $\psi_n(x,0)$ 归一化

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2(x,0)\mathrm{d}x=1\tag{8.3.83}$$

对连续谱 $\lambda(0)=k^2>0$，求解散射问题. 如图 8.3.1，设入射平面波为

$$\psi_i(x,k)=\exp(-\mathrm{i}kx)\tag{8.3.84}$$

求反射系数 $b(k,0)$，即 $x\to+\infty$ 的渐近特性

$$\lim_{x\to\infty}\psi(x,k)=\exp(-\mathrm{i}kx)+b(k,0)\exp(\mathrm{i}kx)\tag{8.3.85}$$

第二步，由下列方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\qquad(\lambda=-\kappa_n^2)\tag{8.3.86}$$

或

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}-3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x}=4\mathrm{i}k^3\psi\qquad(\lambda=k^2)\tag{8.3.87}$$

决定散射数据的时间演化规律，即 $\lambda(t)$、$b(k,t)$ 和 $c_n(\kappa_n,t)$. 由式(8.3.59)、(8.3.68)和(8.3.75)，我们已经求得演化规律为

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\lambda(0)\\ c_n(\kappa_n,t)&=c_n(\kappa_n,0)\exp(4\kappa_n^3t)\\ b(k,t)&=b(k,0)\exp(8\mathrm{i}k^3t).\end{aligned}\tag{8.3.88}$$

最后，求解逆散射问题

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\lambda(t)\psi=u(x,t)\psi\tag{8.3.89}$$

这里 t 仅为形式参数，8.3.1 小节的结论全部成立．我们已得到上式的反射系数 $b(k,t)(-\infty<k<\infty)$、N 个离散本征值 $\kappa_n(n=1,2,\cdots,N)$ 以及归一化常数 $c_n(\kappa_n,t)(n=1,2,\cdots,N)$，因此

$$B(x,t)=\sum_{n=1}^{N}c_n^2(\kappa_n,t)\exp(-\kappa_n x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k,t)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k\tag{8.3.90}$$

然后由 GLM 积分方程求 $K(x,y,t)$

$$K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^{\infty}K(x,z,t)B(z+y,t)\mathrm{d}z=0,\qquad(y>x)\tag{8.3.91}$$

一旦求得 $K(x,y,t)$，势函数 $u(x,t)$的计算公式为

$$u(x,t) = -2\frac{\mathrm{d}K(x,x,t)}{\mathrm{d}x} \tag{8.3.92}$$

上式即是 KdV 方程初值问题式(8.3.1)的解. 图 8.3.2 表明了利用逆散射方法求解 KdV 方程初值问题的步骤. 图中 $S(t)$表示散射数据 $\lambda(t)$、$c_n(\kappa_n,t)$和 $b(k,t)$. 这一过程与 Fourier 变换方法求线性方程的初值问题是一样的，如第一章，求解热导方程的初值问题式(1.4.1)的过程可用图 8.3.3 表示.

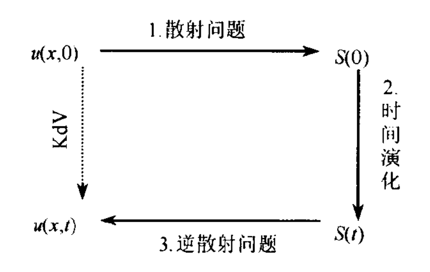


图 8.3.2 逆散射求 KdV 方程的初值问题

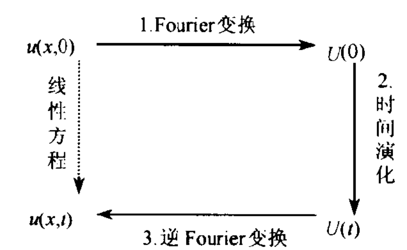


图 8.3.3 Fourier 变换求线性方程的初值问题

例 8.3.3 求 KdV 方程的初值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \qquad x \in (-\infty,\infty), \quad t > 0 \\ &u(x,t)\mid_{t=0} = -U_0\mathrm{sech}^2 x, x \in (-\infty,\infty)\end{aligned} \tag{8.3.93}$$

第一步:求解本征值问题和散射问题

$$\frac{\partial^2 \psi(x,0)}{\partial x^2} + [\lambda(0) + U_0\mathrm{sech}^2 x]\psi(x,0) = 0 \tag{8.3.94}$$

令变量变换

$$y = \tanh x, \qquad x \in (-\infty,\infty)$$

x 的变化范围为$(-\infty<x<+\infty)$，故 y 的变化范围为$[-1<y<+1]$，注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{sech}^2 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} = (1-y^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$$

式(8.3.94)化成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-y^2)\frac{\mathrm{d}\psi(y,0)}{\mathrm{d}y}\right] + \left[U_0 + \frac{\lambda(0)}{1-y^2}\right]\psi(y,0) = 0 \tag{8.3.95}$$

上式为连带 Legendre 方程.

首先,考虑束缚态 $\lambda(0) = -\kappa^2<0$,根据连带 Legendre 方程的性质，只有当

$$\begin{aligned}&U_0 = l(l+1), \qquad (l = 0,1,2,\cdots) \\ &\kappa = m, \qquad (m = 1,2,\cdots,l)\end{aligned} \tag{8.3.96}$$

时连带 Legendre 方程(8.3.95)才有在区间$[-1<y<+1]$内有限的解，否则在 $y=\pm 1$(即 $x\to\pm\infty$)时解发散. 于是在整个区域$[-1<y<+1]$内都有限的解为

$$\psi(y,0) = A_l^m P_l^m(y) \tag{8.3.97}$$

其中 $P_l^m(y)$为连带 Legendre 函数

$$P_l^m(y) = (-1)^m(1-y^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l(y)}{\mathrm{d}y^m}$$

$P_l(y)$为 l 阶 Legendre 多项式，具体形式见式(2.1.41). 常数 A_l^m 由归一化条件决定. 当 $l=1$ 时，$\kappa=1$，只有一个本征值，相应的本征函数为

$$\psi_1(y,0) = A_1^1 P_1^1(y) = A_1^1\sqrt{1-y^2}$$

即

$$\psi_1(x,0) = A_1^1 \mathrm{sech}x$$

归一化常数满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^2(x,0)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2 x\mathrm{d}x = 2[A_1^1]^2 = 1$$

于是 $A_1^1=1/\sqrt{2}$

$$\psi_1(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sech}x$$

上式的渐近特性为

$$\psi_1(x,0)\sim\sqrt{2}\exp(-x),\qquad (x\to+\infty) \tag{8.3.98}$$

当 $l=2$ 时，κ 有二个值 $\kappa_1=1$ 和 $\kappa_2=2$，相应的本征函数为

$$\psi_1(y,0) = A_2^1 P_2^1(y);\qquad \psi_2(y,0) = A_2^2 P_2^2(y)$$

即

$$\psi_1(x,0) = -3A_2^1\tanh x\,\mathrm{sech}x;\qquad \psi_2(x,0) = 3A_2^2\mathrm{sech}^2 x$$

利用归一化条件决定二个常数，最后得到

$$\psi_1(x,0) = \sqrt{\frac{3}{2}}\tanh x\,\mathrm{sech}x;\qquad \psi_2(x,0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sech}^2 x$$

上式的渐近特性为

$$\psi_1(x,0)\sim\sqrt{6}\exp(-x);\qquad \psi_2(x,0)\sim 2\sqrt{3}\exp(-x)$$
$$(x\to+\infty). \tag{8.3.99}$$

其次，考虑散射态 $\lambda(0)=k^2>0$，连带 Legendre 方程(8.3.95)的解比较复杂，要用超几何函数表示，我们不详细讨论. 可以证明下列渐近形式

$$\psi(x,k,0)\sim\exp(-\mathrm{i}kx)+b(k,0)\exp(\mathrm{i}kx)$$
$$(x\to+\infty) \tag{8.3.100}$$

其中

$$b(k,0)=\frac{\Gamma(\bar{c})\Gamma(\bar{c}-\bar{a}-\bar{b})}{\Gamma(\bar{c}-\bar{a})\Gamma(\bar{c}-\bar{b})}$$

$$\bar{a}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}k+\sqrt{\left(U_0+\frac{1}{4}\right)};\qquad \bar{b}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}k-\sqrt{\left(U_0+\frac{1}{4}\right)}$$

$$\bar{c}=1-\mathrm{i}k$$

考察 $b(k,0)$的分母

$$\Gamma(\bar{c}-\bar{a})\Gamma(\bar{c}-\bar{b})=\Gamma\left(\frac{1}{2}-\sqrt{U_0+\frac{1}{4}}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\sqrt{U_0+\frac{1}{4}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\cos\pi\sqrt{U_0+1/4}}$$

其中已利用 Γ 函数的性质

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}$$

因此当

$$\sqrt{U_0+\frac{1}{4}}=l+\frac{1}{2},\qquad (l=1,2,\cdots)$$

时，$b(k,0)\equiv 0$，上式即为

$$U_0=l(l+1)\tag{8.3.101}$$

因此当 U_0 满足上式时，反射系数为零，这样的势函数称为**无反射势**. 下面我们主要讨论这种情况.

第二步：$\lambda(0)$，$b(k,0)$和 $c_n(\kappa_n,0)$的时间演化规律. 由(8.3.88)第一式，$\lambda(t)=\lambda(0)$.

当 $l=1$，即 $U_0=2$ 时，本征值只有一个 $\kappa_1=1$. 显然这是无反射势，即 $b(k,t)=0$. 由式(8.3.98)，$c_1(\kappa_1,0)=\sqrt{2}$，因此

$$c_1(\kappa_1,t)=\sqrt{2}\exp(4t)\tag{8.3.102}$$

当 $l=2$，即 $U_0=6$ 时，κ 有二个值 $\kappa_1=1$ 和 $\kappa_2=2$. 显然这也是无反射势，即 $b(k,t)=0$. 由式(8.3.99)，$c_1(\kappa_1;0)=\sqrt{6}$以及 $c_2(\kappa_2,0)=2\sqrt{3}$，因此

$$c_1(\kappa_1,t)=\sqrt{6}\exp(4t);\qquad c_2(\kappa_2,t)=2\sqrt{3}\exp(32t)\tag{8.3.103}$$

第三步：解 GLM 积分方程并求 $u(x,t)$

当 $l=1$ 时

$$B(x,t)=c_1^2(\kappa_1,t)\exp(-x)=2\exp[-(x-8t)]\tag{8.3.104}$$

因此 GLM 积分方程为

$$K(x,y,t)+2\mathrm{e}^{-(x+y-8t)}+2\mathrm{e}^{-(y-8t)}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-z}K(x,z,t)\mathrm{d}z=0\tag{8.3.105}$$

显然 $B(x,t)$可分离，因此上式的解可写成形式

$$K(x,y,t) = I(x,t)\exp(-y)$$

代入式(8.3.105)可得到

$$I(x,t) = -\exp(4t)\operatorname{sech}(x-4t)$$

最后可得

$$K(x,y,t) = -\exp(4t-y)\operatorname{sech}(x-4t)$$

由式(8.3.92)，得到初值问题式(8.3.93)当 $U_0=2$ 时的解

$$u(x,t) = -2\operatorname{sech}^2(x-4t) \tag{8.3.106}$$

这就是 KdV 方程的单孤子解.

当 $l=2$ 时

$$B(x,t) = 6\exp[-(x-8t)] + 12\exp[-2(x-32t)] \tag{8.3.107}$$

上式也是可分离的，与例 8.3.2 相似. 通过繁复的计算，可以得到

$$K(x,x,t) = -6\frac{\exp[-2(x-4t)] + 2\exp[-4(x-16t)] + \exp[-6(x-12t)]}{1+3\exp[-2(x-4t)] + 3\exp[-4(x-16t)] + \exp[-6(x-12t)]}$$

最后得到 KdV 方程的双孤子解

$$u(x,t) = 12\frac{3+4\cosh 2(x-4t) + \cosh 4(x-16t)}{[3\cosh(x-28t) + \cosh 3(x-12t)]^2} \tag{8.3.108}$$

当 $l=N$ 时，通过同样的方法，可求得 KdV 方程的多孤子解. 由式(8.3.93)中初始条件知，在初始时刻，$u(x,0)$表示一个孤子，但随着时间演化，一个孤子分裂成 N 个孤子，N 仅仅决定于 U_0 的大小，而 U_0 表示初始时刻单个孤子的能量. 单个孤子的能量越大，分裂的孤子数也越多，只要 U_0 满足 $U_0=N(N+1)$. 当 U_0 不满足这个条件时，反射系数不为零，因此问题比较复杂，我们不再讨论.

8.3.4 Lax 理论

8.3.3 小节我们应用逆散射方法求出了 KdV 方程的初值问题. 这样的方法能否应用于其他方程呢？Lax 把 KdV 方程的逆散射方法加以推广，原则上得到了一般非线性方程初值问题的逆散射方法. 可以看出，KdV 方程的逆散射方法实际上把 KdV 方程化成关于 ψ 和 u 的方程组

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \lambda(t)\psi = u(x,t)\psi \tag{8.3.109}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + 3(u+\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial x} + e(t)\psi \tag{8.3.110}$$

其中 $\lambda(t)=\lambda(0)$，$e(t)=0$(对离散谱)或 $e(t)=4\mathrm{i}k^3$(对连续谱). 因此，Lax 认为求解一般非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{P}\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots\right) \tag{8.3.111}$$

的初值问题，首先必须找到一个本征值问题，例如方程(8.3.109)

$$\mathbf{L}\psi = \lambda\psi \tag{8.3.112}$$

其中 $\mathbf{L}$ 是一个与 u 有关的线性 Hermite 算子. 其次，关键是本征值必须与时间无关，即

$$\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8.3.113}$$

最后，必须找到一个合适的线性算子 $\mathbf{M}$，使

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathbf{M}\psi \tag{8.3.114}$$

例如方程(8.3.110). 为使本征值与时间无关，我们来分析线性算子 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{M}$ 必须满足的关系. 对式(8.3.112)求导

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t}\psi + \mathbf{L}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\psi + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{8.3.115}$$

其中算子 $\mathbf{L}$ 对时间的偏导是对 $\mathbf{L}$ 中出现的参数 t 求导，例如式(8.3.109)中

$$\mathrm{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)$$

因此

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

利用式(8.3.113)和(8.3.114)，式(8.3.115)成为

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t}\psi + \mathbf{LM}\psi = \mathbf{M}(\lambda\psi) \tag{8.3.116}$$

再由式(8.3.112)

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t}\psi = (\mathbf{ML} - \mathbf{LM})\psi \tag{8.3.117}$$

因此要求 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{M}$ 满足

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} = \mathbf{ML} - \mathbf{LM} \tag{8.3.118}$$

反之，如果 $\mathbf{M}$ 满足上式，那么本征值一定与时间无关且 ψ 满足式(8.3.114). 事实上，把式(8.3.115)改写成

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\psi = \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t}\psi + (\mathbf{L} - \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{8.3.119}$$

式(8.3.118)代入上式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\psi &= (\mathbf{ML} - \mathbf{LM})\psi + (\mathbf{L} - \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial t}\\ &= (\mathbf{L} - \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{M}\lambda\psi - \mathbf{LM}\psi = (\mathbf{L} - \lambda)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathbf{M}\psi\right)\end{aligned} \tag{8.3.120}$$

上式两边求内积

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(\psi,\psi) = \left[\psi,(\mathbf{L}-\lambda)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathbf{M}\psi\right)\right]$$

因为 L 是 Hermite 算子，故

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(\psi,\psi) = \left[(\mathbf{L}-\lambda)\psi,\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathbf{M}\psi\right)\right]$$

而由式(8.3.112)得到

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}(\psi,\psi) = 0 \tag{8.3.121}$$

即本征值不随时间变化．进一步，因为本征值不随时间变化，由式(8.3.120)

$$(\mathbf{L}-\lambda)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathbf{M}\psi\right) = 0 \tag{8.3.122}$$

因此$\partial\psi/\partial t - \mathbf{M}\psi$ 也是 L 的本征函数并且本征值为 λ，于是令

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathbf{M}\psi \equiv \alpha\psi \tag{8.3.123}$$

其中 α 为常数．因此

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - (\mathbf{M} + \alpha\mathbf{I})\psi = 0 \tag{8.3.124}$$

其中 I 为恒等算子，只要重新定义 $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \alpha\mathbf{I}$,而并不改变式(8.3.118)

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} = \mathbf{ML} - \mathbf{LM} = \mathbf{M}'\mathbf{L} - \mathbf{LM}' \tag{8.3.125}$$

因此可取 $\alpha = 0$，于是

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathbf{M}\psi = 0$$

即得到式(8.3.114)．

根据上述思想,Lax 得到了一般非线性演化方程的逆散射方法：

第一步：求正问题，根据 $u(x,0)$,求解本征值问题式(8.3.112)，并且根据 $x \to \pm\infty$时 ψ 的渐近特征，求初始散射数据；

第二步：根据式(8.3.114)和 $x \to \pm\infty$时 M 的特征，求散射数据的时间演化规律；

第三步：根据式(8.3.112)，求逆散射问题,得到 $u(x,t)$．

Lax 理论给出了逆散射方法求非线性演化方程的一般规律，但线性算子 L 和 M 的寻找是非常困难的．应用 Lax 理论和其他方法，逆散射方法已成功应用于 NLS 方程和 Sine-Gordon 等方程的初值问题，这里不再进一步展开．

8.4　Bäcklund 变换

Bäcklund 变换建立了一个非线性偏微分方程的解与另一个线性偏微分方程解

之间的关系,或者建立了同一个非线性偏微分方程不同解之间的关系．因此可以通过 Bäcklund 变换,根据已知线性偏微分方程的解,求非线性偏微分方程的解,或者根据非线性偏微分方程的一个简单解,求另一个复杂的解．本节首先介绍 Bäcklund 变换的基本思想。

8.4.1 Bäcklund 变换的基本思想

首先,介绍二个不同方程之间的 Bäcklund 变换．设 $u(x,t)$是待求非线性偏微分方程的解

$$\mathbf{U}u = 0 \tag{8.4.1}$$

其中 **U** 为非线性微分算子,又设 $v(x,t)$是已知线性偏微分方程的解

$$\mathbf{K}v = 0 \tag{8.4.2}$$

其中 **K** 为线性微分算子,**Bäcklund 变换**定义为下列一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{P}\left(u, v, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial t}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{Q}\left(u, v, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{8.4.3}$$

其中 **P** 和 **Q** 为已知的微分算子．一旦找到上述关系，就可以从 v 求 u．注意:式(8.4.3)中 v 和 u 可以互相交换．

例 8.4.1 Burgers 方程的 Bäcklund 变换．Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{8.4.4}$$

通过 Hopf-Cole 变换

$$u = -2\alpha\frac{\partial \ln v}{\partial x} = -\frac{2\alpha}{v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.4.5}$$

变成线性扩散方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{8.4.6}$$

由式(8.4.5)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\alpha}uv \tag{8.4.7}$$

另一方面，上式两边对 x 微分，并再利用上式，得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\alpha}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2\alpha}v\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4\alpha^2}u^2 v \tag{8.4.8}$$

利用式(8.4.6)得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{2}v\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4\alpha}u^2 v \tag{8.4.9}$$

式(8.4.7)和(8.4.9)即是 Burgers 方程的 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{2} v \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{4\alpha} u^2 v \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{2\alpha} u v \end{cases} \tag{8.4.10}$$

显然上式满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) \tag{8.4.11}$$

称为 Bäcklund 变换的**相容性条件**. 以上我们已经知道了式(8.4.4)与(8.4.6)的变换关系，因此 Bäcklund 变换很容易求得. 对一般的非线性偏微分方程,Bäcklund 变换很难求得,没有一般规律可遵循.

其次,介绍同一个方程不同解之间的 Bäcklund 变换. 设 $u_1(x,t)$和 $u_2(x,t)$是非线性偏微分方程(8.4.1)的二个不同解. Bäcklund 变换定义为下列一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = \mathbf{P}\left(u_2, u_1, \dfrac{\partial u_1}{\partial x}, \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, a\right) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \mathbf{Q}\left(u_2, u_1, \dfrac{\partial u_1}{\partial x}, \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, a\right) \end{cases} \tag{8.4.12}$$

其中 a 为任意常数. 这样的 Bäcklund 变换也称为**自 Bäcklund 变换**. 注意：自 Bäcklund 变换含有任意常数. 如果能找到上述关系，就可以从一个已知解求另一个解，而已知解可是非线性偏微分方程的平凡解. 反复使用自 Bäcklund 变换，就可求出非线性偏微分方程的一系列解. 同样,自 Bäcklund 变换也很难求得，没有一般规律可遵循.

8.4.2　Sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换

考虑 Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(u) \tag{8.4.13}$$

其中 $F(u)=\sin u$，但我们先假定它为任意函数. 作自变数变换

$$\xi = \frac{x+t}{2}; \qquad \eta = \frac{x-t}{2} \tag{8.4.14}$$

式(8.4.13)变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F(u) \tag{8.4.15}$$

设 u_1 和 u_2 是上述方程的两个独立解，作变换

$$\begin{cases} u_1 = u + v \\ u_2 = u - v \end{cases} \quad 或者 \quad \begin{cases} u = \dfrac{u_1 + u_2}{2} \\ v = \dfrac{u_1 - u_2}{2} \end{cases} \tag{8.4.16}$$

并且令

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=f(v);\qquad \frac{\partial v}{\partial \eta}=g(u) \tag{8.4.17}$$

显然，只有特殊的 $F(u)$、$f(v)$和 $g(v)$才能满足上述关系．如果存在且找到上式这样的关系，相当于找到了 u_1 和 u_2 的关系，即式(8.4.15)的自 Bäcklund 变换．

由式(8.4.17)得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}&=f'(v)\frac{\partial v}{\partial \eta}=f'(v)g(u)\\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}&=g'(u)\frac{\partial u}{\partial \xi}=g'(u)f(v)\end{aligned} \tag{8.4.18}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi\partial \eta}&=\frac{\partial^2(u+v)}{\partial \xi\partial \eta}=f'(v)g(u)+g'(u)f(v)=F(u_1)=F(u+v)\\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi\partial \eta}&=\frac{\partial^2(u-v)}{\partial \xi\partial \eta}=f'(v)g(u)-g'(u)f(v)=F(u_2)=F(u-v)\end{aligned} \tag{8.4.19}$$

于是，由上式第一式得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(u+v)}{\partial u}&=f'(v)g'(u)+g''(u)f(v)\\ \frac{\partial F(u+v)}{\partial v}&=f''(v)g(u)+g'(u)f'(v)\end{aligned} \tag{8.4.20}$$

但是

$$\frac{\partial F(u+v)}{\partial u}=\frac{\partial F(u+v)}{\partial v}$$

因此

$$f'(v)g'(u)+g''(u)f(v)=f''(v)g(u)+g'(u)f'(v) \tag{8.4.21}$$

即

$$\frac{g''(u)}{g(u)}=\frac{f''(v)}{f(v)}\equiv-\lambda^2 \tag{8.4.22}$$

上式成立的条件是恒等于常数$(-\lambda^2)$．于是

$$\begin{aligned}f(v)&=a_1\sin\lambda v+a_2\cos\lambda v\\ g(u)&=b_1\sin\lambda u+b_2\cos\lambda u\end{aligned} \tag{8.4.23}$$

由式(8.4.19)，取 $v=0$

$$\begin{aligned}F(u)&=f'(0)g(u)+g'(u)f(0)\\ &=f'(0)g(u)-g'(u)f(0)\end{aligned} \tag{8.4.24}$$

即 $2g'(u)f(0)=0$，因此 $f(0)=0$，即 $a_2=0$．故由上式和式(8.4.23)得到

$$F(u)=f'(0)g(u)=a_1\lambda(b_1\sin\lambda u+b_2\cos\lambda u) \tag{8.4.25}$$

于是，满足式(8.4.16)和(8.4.17)的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = a_1 \lambda (b_1 \sin\lambda u + b_2 \cos\lambda u) \tag{8.4.26}$$

的自 Bäcklund 变换为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial \xi} &= a_1 \sin\left(\lambda \frac{u_1 - u_2}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial \eta} &= b_1 \sin\left(\lambda \frac{u_1 + u_2}{2}\right) + b_2 \cos\left(\lambda \frac{u_1 + u_2}{2}\right) \end{aligned} \tag{8.4.27}$$

注意：式(8.4.26)中的四个常数可以合并成三个，而式(8.4.27)中的四个常数不能合并．所以自 Bäcklund 变换包含一个任意常数，这与定义式(8.4.12)是一致的．

对 Sine-Gordon 方程：$\lambda = 0, b_2 = 0$ 以及 $a_1 = 1/b_1 \equiv 1/a$，故式(8.4.27)变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial \xi} &= \frac{2}{a}\sin\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) \\ \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial \eta} &= 2a \sin\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \end{aligned} \tag{8.4.28}$$

上式即为 Sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换．

例 8.4.2　显然 Sine-Gordon 方程的一个平凡解为 $u_2 = 0$，代入上式得到

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 2a \sin\frac{u_1}{2}; \qquad \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \frac{2}{a}\sin\frac{u_1}{2}$$

分别积分得到

$$\ln \tan\frac{u_1}{4} = a\eta + G_1(\xi)$$

$$\ln \tan\frac{u_1}{4} = \frac{\xi}{a} + G_2(\eta) \tag{8.4.29}$$

比较二式得到

$$G_2(\eta) - a\eta = G_1(\xi) - a^{-1}\xi \tag{8.4.30}$$

上式右边是 ξ 的函数，而左边是 η 的函数，恒等的条件是两边为同一常数，取此常数为 δ，因此有

$$G_2(\eta) = a\eta + \delta; \qquad G_1(\xi) = a^{-1}\xi + \delta$$

代入式(8.4.29)

$$\ln \tan\frac{u_1}{4} = a\eta + \frac{1}{a}\xi + \delta$$

因此由式(8.4.14)得到

$$\tan\frac{u_1}{4} = \exp\left[\frac{a^2 + 1}{2a}\left(x - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}t\right) + \delta\right] \tag{8.4.31}$$

上式与式(8.1.57)类似，是 Sine-Gordon 方程的“孤立波”解．令

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}=\pm c$$

即解为 $\pm x$ 方向传播的“孤立波”,相当于取

$$a=a_1=\sqrt{\frac{1+c}{1-c}};\qquad a=a_2=\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} \tag{8.4.32}$$

显然有

$$\frac{a^2+1}{2a}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

故要求 $c<1$．式(8.4.31)变成

$$\tan\frac{u_1}{4}=\exp\left[\pm\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(x\pm ct)+\delta\right]. \tag{8.4.33}$$

例 8.4.3　Sine-Gordon 方程的另一个平凡解为 $u_2=\pi$，代入式(8.4.28)得到

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta}=2a\sin\left(\frac{u_1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2a\cos\frac{u_1}{2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi}=\frac{2}{a}\sin\left(\frac{u_1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{a}\cos\frac{u_1}{2} \tag{8.4.34}$$

分别积分得到

$$\begin{aligned}\ln\tan\left(\frac{u_1}{4}+\frac{\pi}{2}\right)&=a\eta+S_1(\xi)\\ \ln\tan\left(\frac{u_1}{4}+\frac{\pi}{4}\right)&=-a^{-1}\xi+S_2(\eta)\end{aligned} \tag{8.4.35}$$

比较二式得到

$$S_2(\eta)-a\eta=S_1(\xi)+a^{-1}\xi=\delta \tag{8.4.36}$$

与式(8.4.30)类似处理得到

$$S_2(\eta)=a\eta+\delta;\qquad S_1(\xi)=-a^{-1}\xi+\delta \tag{8.4.37}$$

代入式(8.4.35)

$$\ln\tan\left(\frac{u_1}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=a\eta-\frac{1}{a}\xi+\delta \tag{8.4.38}$$

因此由式(8.4.14)得到

$$\tan\left(\frac{u_1}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\exp\left[\frac{a^2-1}{2a}\left(x-\frac{a^2+1}{a^2+1}t\right)+\delta\right] \tag{8.4.39}$$

上式与式(8.1.49)类似，也是 Sine-Gordon 方程的“孤立波”解．

8.4.3　KdV 方程的自 Bäcklund 变换

考虑 KdV 方程(8.2.22)经变换式(8.2.24)后的方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 3\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{8.4.40}$$

设 w_1 和 w_2 是两个独立解，即有

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - 3u_1^2 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0; \qquad u_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} \tag{8.4.41}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - 3u_2^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0; \qquad u_2 = \frac{\partial w_2}{\partial x} \tag{8.4.42}$$

下面我们来求 KdV 方程的自 Bäcklund 变换．对 u_1 和 u_2 作变换

$$u_1 = \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \lambda; \quad u_2 = \frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \lambda \tag{8.4.43}$$

即 u_1 和 u_2 满足

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + (\lambda - u_1)\psi_1 = 0; \qquad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + (\lambda - u_2)\psi_2 = 0 \tag{8.4.44}$$

为了求 u_1 和 u_2 的自 Bäcklund 变换，设想存在函数 $v(x)$,使 ψ_1 和 ψ_2 之间有关系

$$\psi_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - v(x)\psi_1 \tag{8.4.45}$$

我们试图通过上式来建立 u_1 和 u_2 之间的联系，即由 ψ_1 和 ψ_2 建立 u_1 和 u_2 的关系. 上式代入(8.4.44)第二式，并利用第一式，得到

$$\left(u_1 - u_2 - 2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (u_1 - u_2)v\right]\psi_1 = 0 \tag{8.4.46}$$

如果选择函数 $v(x)$满足

$$u_1 - u_2 - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{8.4.47}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (u_1 - u_2)v = 0 \tag{8.4.48}$$

那么式(8.4.46)一定满足. 由式(8.4.47)

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{8.4.49}$$

积分一次并取积分常数为零得到

$$v = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) \tag{8.4.50}$$

另一方面，式(8.4.47)和(8.4.48)结合有

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{8.4.51}$$

积分一次并取积分常数为 λ，得到

$$u_1 = \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 + \lambda \tag{8.4.52}$$

式(8.4.50)代入上式得到

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial x} + \frac{1}{4}(w_1 - w_2)^2 + \lambda \tag{8.4.53}$$

即

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = -\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^2 + 2\lambda \tag{8.4.54}$$

上式即是 KdV 方程的自 Bäcklund 变换方程之一. 另一个方程可由式(8.4.41)、(8.4.42)和(8.4.54)求得.式(8.4.41)和(8.4.42)相加得到

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = -\frac{\partial w_1}{\partial t} + 3(u_2^2 + u_1^2) - \frac{\partial^2(u_2 + u_1)}{\partial x^2} \tag{8.4.55}$$

为了消去 u_2 的二阶导数，注意到式(8.4.54)即为

$$u_2 + u_1 = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^2 + 2\lambda \tag{8.4.56}$$

可以求得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(u_2 + u_1)}{\partial x^2} = (u_2 - u_1)^2 + (w_2 - w_1)^2(u_2 - u_1) \\ - 2(w_2 - w_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\end{aligned} \tag{8.4.57}$$

代入式(8.4.55)并再一次应用式(8.4.56)，得到 KdV 方程的自 Bäcklund 变换的第二个方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_2}{\partial t} = -\frac{\partial w_1}{\partial t} + 4\lambda\frac{\partial w_2}{\partial x} + 2u_1^2 + u_1(w_2 - w_1)^2 \\ + 2(w_2 - w_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\end{aligned} \tag{8.4.58}$$

式(8.4.54)和(8.4.58)构成 KdV 方程的自 Bäcklund 变换. 利用它们,可以根据 KdV 方程的一个解,求另一个解.

例 8.4.4 KdV 方程的一个平凡解为 $w_1 = 0$，由此代入自 Bäcklund 变换式(8.4.54)和(8.4.58)得到

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{1}{2}w_2^2 + 2\lambda \tag{8.4.59}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = 4\lambda\frac{\partial w_2}{\partial x} \tag{8.4.60}$$

上式的一般解为

$$w_2 = f(x + 4\lambda t) \tag{8.4.61}$$

其中函数 f 由式(8.4.59)决定，代入式(8.4.59)并令 $\xi = x + 4\lambda t$ 得到

$$f'(\xi) = 2\lambda + \frac{1}{2}f^2(\xi) \tag{8.4.62}$$

即

$$\xi - \xi_0 = 2\int \frac{\mathrm{d}f}{4\lambda + f^2} \tag{8.4.63}$$

取 $\lambda = -k^2 < 0$，上式变成

$$\xi - \xi_0 = 2\int \frac{\mathrm{d}f}{f^2 - 4k^2} = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{f - 2k}{f + 2k}\right) \tag{8.4.64}$$

即

$$f(\xi) = -2k\tanh k(\xi - \xi_0) \tag{8.4.65}$$

取 $\xi_0 = 0$ 得到

$$u_2 = \frac{\partial w_2}{\partial x} = -2k^2\mathrm{sech}^2 k(x - 4k^2 t) \tag{8.4.66}$$

上式即为 KdV 方程的“孤子”解，与式(8.2.35)完全一样.

8.4.4　非线性叠加公式

利用自 Bäcklund 变换,可以从非线性偏微分方程的一个平凡解 u_1,求出另一个非平凡解 u_2. 同样可从已求得的 u_2,求出方程新的解。注意到自 Bäcklund 变换含有任意一个常数,选择不同的常数,可以得到不同的解。

首先考虑 Sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换式(8.4.28)，设想选择不同常数 a_1 和 a_2,从已知解 u_1 可以求得 u_2 和 u_3,再由求得的 u_2 和 u_3 分别选择常数为 a_2 和 a_1 而得到 u_4 和 u_5。注意到这些解仅仅是选择不同的常数形成的,应该没有本质的差别,如果选择合适的积分常数，可使 $u_4 = u_5$. 这一过程可用图 8.4.1 表示.

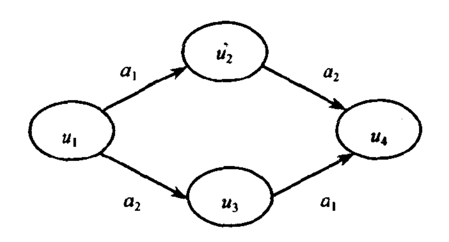


图 8.4.1　从 u_1 到 u_4 过程

这一过程的数学表达式可由(8.4.28)第二式得到(也可用第一式)

$$\frac{\partial u_2}{\partial \eta} = \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - 2a_1\sin\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \tag{8.4.67}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \eta}=\frac{\partial u_1}{\partial \eta}-2a_2\sin\left(\frac{u_1+u_3}{2}\right) \tag{8.4.68}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial \eta}=\frac{\partial u_2}{\partial \eta}-2a_2\sin\left(\frac{u_4+u_2}{2}\right) \tag{8.4.69}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial \eta}=\frac{\partial u_3}{\partial \eta}-2a_1\sin\left(\frac{u_4+u_3}{2}\right) \tag{8.4.70}$$

式(8.4.67)～(8.4.70)称为 Sine-Gordon 方程自 Bäcklund 变换的可交换性. 式(8.4.67)与(8.4.69)相加得到

$$\frac{\partial(u_4-u_1)}{\partial \eta}=-2\left[a_1\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)+a_2\sin\left(\frac{u_4+u_2}{2}\right)\right] \tag{8.4.71}$$

式(8.4.68)与(8.4.70)相加得到

$$\frac{\partial(u_4-u_1)}{\partial \eta}=-2\left[a_1\sin\left(\frac{u_3+u_4}{2}\right)+a_2\sin\left(\frac{u_3+u_1}{2}\right)\right] \tag{8.4.72}$$

式(8.4.71)与(8.4.72)左边相等，故右边也相等，得到

$$a_1\left[\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)-\sin\left(\frac{u_3+u_4}{2}\right)\right]=a_2\left[\sin\left(\frac{u_3+u_1}{2}\right)-\sin\left(\frac{u_4+u_2}{2}\right)\right] \tag{8.4.73}$$

利用三角函数的关系

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

式(8.4.73)化为

$$a_1\sin\left(\frac{u_4-u_1}{4}-\frac{u_2-u_3}{4}\right)=a_2\sin\left(\frac{u_4-u_1}{4}+\frac{u_2-u_3}{4}\right) \tag{8.4.74}$$

有此可求得

$$\tan\left(\frac{u_4-u_1}{4}\right)=\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}\tan\left(\frac{u_2-u_3}{4}\right) \tag{8.4.75}$$

上式称为 Sine-Gordon 方程解的叠加公式．由此，可以根据 u_1、u_2、和 u_3 找到 Sine-Gordon 方程的一个新解 u_4，而且只要通过代数计算即可.

例 8.4.5　Sine-Gordon 方程的一个平凡解为 $u_1=0$，取 a_1 和 a_2 为式(8.4.32)，因此从式(8.4.33)得到两个解

$$\tan\frac{u_2}{4}=\exp[\delta(x-ct)] \tag{8.4.76}$$

和

$$\tan\frac{u_3}{4}=\exp[\delta(x+ct)] \tag{8.4.77}$$

其中 $\delta=1/\sqrt{1-c^2}$，代入式(8.4.75)得到第四个解

$$\tan\left(\frac{u_4}{4}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\sinh\delta ct}{\cosh\delta x} \tag{8.4.78}$$

上式表示一个正扭结孤波和一个反扭结孤波的迭加，称为 Sine-Gordon 方程的双扭结解. 当 $t \to -\infty$时，上式近似为

$$\lim_{t\to-\infty}\tan\frac{u_4}{2} = \frac{1}{2c\sinh 2\delta x}\{\exp[\delta(x-ct)] - \exp[-\delta(x+ct)]\} \tag{8.4.79}$$

第一项表示一个向 x 轴正方向传播的正扭结孤波，而第二项表示向 x 轴负方向传播的反扭结孤波；当 $t\to\infty$时，式(8.4.78)近似为

$$\lim_{t\to+\infty}\tan\frac{u_4}{2} = -\frac{1}{2c\sinh 2\delta x}\{\exp[\delta(x+ct)] - \exp[-\delta(x-ct)]\} \tag{8.4.80}$$

第一项表示一个向 x 轴负方向传播的正扭结孤波，第二项表示向 x 轴正方向传播的反扭结孤波. 当 t 有限，正扭结孤波与反扭结孤波相互叠加，由式(8.4.78)描述.

对 KdV 方程，同样可得到叠加公式. 利用图 8.4.1 的构想，由式(8.4.54)得到四个方程

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = -\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^2 + 2\lambda_1 \tag{8.4.81}$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial x} = -\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{2}(w_1 - w_3)^2 + 2\lambda_2 \tag{8.4.82}$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial x} = -\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{1}{2}(w_2 - w_4)^2 + 2\lambda_2 \tag{8.4.83}$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial x} = -\frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{1}{2}(w_4 - w_3)^2 + 2\lambda_1 \tag{8.4.84}$$

式(8.4.83)减去式(8.4.81)得

$$\frac{\partial w_4}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{1}{2}(w_2 - w_4)^2 - \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^2 + 2(\lambda_2 - \lambda_1) \tag{8.4.85}$$

式(8.4.84)减去式(8.4.82)得

$$\frac{\partial w_4}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{1}{2}(w_3 - w_4)^2 - \frac{1}{2}(w_1 - w_3)^2 - 2(\lambda_2 - \lambda_1) \tag{8.4.86}$$

二式左边相同，因此右边应相等

$$(w_3 - w_4)^2 - (w_1 - w_3)^2 - 4(\lambda_2 - \lambda_1) = (w_2 - w_4)^2 - (w_1 - w_2)^2 + 4(\lambda_2 - \lambda_1)$$

因此得到

$$(w_4 - w_1)(w_3 - w_2) = 4(\lambda_1 - \lambda_2)$$

即

$$w_4 = w_1 + \frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{w_3 - w_2} \tag{8.4.87}$$

上式两边对 x 求导并利用$u=\partial w/\partial x$ 得

$$u_4 = u_1 + \frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{(w_3 - w_2)^2}(u_1 - u_2) \tag{8.4.88}$$

即为 KdV 方程的非线性叠加公式.

习 题 八

8.1 求下列方程的行波解

(a) Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} = 0, \qquad (\alpha, \beta > 0);$$

(b) mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

8.2 求下列方程的行波解

(a) Fisher 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - ku(1-u) = 0;$$

(b) KdV-Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

提示：设

$$u(\xi) = \frac{B\exp[b(\xi - \xi_0)]}{\{1 + \exp[a(\xi - \xi_0)]\}^2}$$

其中 B、b 和 a 为待定常数，ξ_0 为积分常数.

8.3 作函数变换

$$\tan\frac{u}{4} = \frac{g}{f}$$

证明 Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u$$

的双线性形式为

$$\begin{cases} (D_x^2 - D_t^2 - 1)(f \cdot g) = 0 \\ (D_x^2 - D_t^2)[(f \cdot f) - (g \cdot g)] = 0. \end{cases}$$

8.4 作函数变换 $u = g/f$，其中 f 为实函数. 证明 NLS 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0$$

的双线性形式为

$$\begin{cases}(\mathrm{i}D_t + D_x^2)(g \cdot f) = 0 \\ D_x^2(f \cdot f) - 2|g|^2 = 0.\end{cases}$$

8.5 考虑散射问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k^2 u = V(x)u, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

$$u(x,k) \sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad x \to \infty$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + k^2 v = V(x)v, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

$$v(x,k) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad x \to -\infty$$

证明 u 和 v 满足 Volterra 积分方程

$$u(x,k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y) u(y,k) \mathrm{d}y$$

$$v(x,k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y) v(y,k) \mathrm{d}y.$$

8.6 考虑 $x \to -\infty$ 的逆散射数据，与式(8.3.7)相应的方程写作

$$\varphi_-(x,k) = \exp(-\mathrm{i}kx) + \int_{-\infty}^{x} L(x,y) \exp(-\mathrm{i}ky) \mathrm{d}y$$

导出 $L(x,y)$ 满足的方程和边界条件.

8.7 解积分方程

$$\text{(a)}\ K(x,z) + \mathrm{e}^{-(x+z)} + \int_x^{\infty} K(x,y) \mathrm{e}^{-(y+z)} \mathrm{d}y = 0;$$

$$\text{(b)}\ K(x,z) - \mathrm{e}^{-(x+z)} - \int_{-z}^{x} K(x,y) \mathrm{e}^{-(y+z)} \mathrm{d}y = 0.$$

8.8 求势 $u(x) = -U_0\delta(x)$, $(U_0 > 0)$ 的反射系数 $b(k)$、离散本征值以及相应本征函数的归一化常数.

8.9 解初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \qquad x \in (-\infty, \infty), \qquad t > 0$$

$$u(x,t)|_{t=0} = -U_0\delta(x), \qquad U_0 > 0.$$

8.10 设 $w_1 = 0$, $w_2 = -2\tanh(x - 4t)$, $w_3 = -4\coth(2x - 32t)$, $\lambda_1 = -1$ 以及 $\lambda_2 = -4$. 根据 KdV 方程的迭加公式证明

$$w_4 = -\frac{6}{2\coth(2x - 32t) - \tanh(x - 4t)}$$

$$u_4 = -12 \frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2}.$$

人名英汉对照表

Bäcklund　贝克隆
Banach　巴拿赫
Bessel　贝塞尔
Born　玻恩
Burgers　伯格斯
Cauchy　柯西
Chebyshev　切比雪夫
Cherenkov　切连科夫
Cole　科尔
Courant　柯朗
d'Alembert　达朗贝尔
Dirac　狄拉克
Duhamel　杜阿美尔
Euler　欧拉
Fisher　费舍儿
Fourier　傅里叶
Fredholm　弗雷德霍姆
Galerkin　伽辽金
Gauss　高斯
Gelfand　盖尔范德
Gordon　戈登
Goursat　古沙特
Gram　格拉姆
Green　格林
Hamilton　哈密顿
Hankel　汉克尔
Heaviside　赫维赛德
Helmholtz　亥姆霍兹
Hermite　厄米
Hilbert　希尔伯特
Hopf　霍普夫
Jacobi　雅可比
Kantorovich　康托洛维奇
Kirchhoff　基尔霍夫
Korteweg　考特维克
de Vries　德弗里
Lagrange　拉格朗日
Laguerre　拉盖尔
Laplace　拉普拉斯
Lax　拉克斯
Legendre　勒让德
Liouville　刘维尔
Mathieu　马蒂厄
Neumann　诺伊曼
Newton　牛顿
Parseval　帕塞瓦尔
Poisson　泊松
Rayleigh　瑞利
Riesz　里斯
Ritz　里茨
Rutherford　卢瑟福
Rytov　雷托夫
Schimidt　施密特
Schrödinger　薛定谔
Schwartz　施瓦兹
Stefan　斯特藩
Stirling　斯特林
Sturm　斯图姆
Taylor　泰勒
Tikhonov　吉洪诺夫
Volterra　沃尔特拉
Weierstrass　魏尔斯特拉斯
Wronski　朗斯基

参 考 书 目

1. E 鲁滨. 物理学中的数学. 北京:北京:科学出版社, 1981
2. 李政道. 物理学中的数学方法. 南京:江苏科学技术出版社, 1980
3. R 柯朗, D 希尔伯特. 数学物理方法 (上、下). 北京:科学出版社, 1977
4. F W 拜仑, R W 富勒. 物理学中的数学方法 (一、二卷). 北京:科学出版社, 1982
5. 康盛亮, 桂子鹏. 数学物理方程的近代分析方法. 上海:同济大学出版社, 1991
6. D G. 鲁恩伯杰. 最优化的矢量空间方法. 北京:科学出版社, 1987
7. 徐利治. 现代数学手册——经典数学卷. 武汉:华中科技大学出版社, 1999
8. 金忠青, 周志芳. 工程水力学反问题. 南京:河海大学出版社, 1997
9. 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程. 北京:北京大学出版社, 2000
10. E Zauderer. Partial Differential Equations of Applied Mathematics, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1989
11. I Stakgold. Green's Functions and Boundary Value Problems, 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 1997
12. M H Holmes. Introduction to Perturbation Methods. New York: Springer-Verlag, 1995
13. A Kirsch. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problem. New York: Springer-Verlag, 1991
14. M H Xu, J C Cheng and S Y Zhang. A new method of reconstruction of thermal conductivity-depth profiles from photo-acoustic or photo-thermal measurements. J Phys D: Appl Phys 1998, 31: 3154~3159